ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2015

ФІЗИКА

УДК 539.17

В. Ю. Денисов, Т. О. Маргітич

Вплив деформацій вищих мультипольностей на висоту бар'єра ядер

(Представлено академіком НАН України І. М. Вишневським)

Досліджено енергію взаємодії двох ядер з урахуванням лінійних членів, пов'язаних з квадрупольною, октупольною, гексадекапольною деформаціями поверхонь ядер та квадратичними членами за параметром квадрупольної деформації. При визначенні повної енергії враховувалися кулонівська та ядерна енергії взаємодії ядер, а також енергія деформації поверхні кожного ядра. Показано, що бар'єр та енергія взаємодії двох ядер залежать від їх деформації, та визначено значення цих деформацій для найменшого бар'єра. Різниця між бар'єром для сферичних ядер та найнижчим бар'єром для деформованих ядер, з урахуванням зазначених вище деформацій, зростає зі збільшенням маси та заряду взаємодіючих ядер. Найбільший вплив на висоту бар'єра має квадрупольна деформація, врахування октупольної деформації незначно зменшує бар'єр, а гексадекапольна деформація має найменший вплив на значення висоти бар'єра.

Значення висоти бар'єра ядра важливе для проходження і аналізу реакції підбар'єрного злиття, синтезу надважких елементів та різноманітних навколобар'єрних реакцій [1–8]. Висота бар'єра ядро-ядерного потенціалу залежить від деформації ядер та їх взаємної орієнтації [1–9].

Мінімальну висоту бар'єра з урахуванням лише квадрупольної деформації детально досліджено у роботі [10]. Мета даної роботи — визначення мінімальної висоти бар'єра енергії взаємодії двох ядер з урахуванням квадрупольної, октупольної та гексадекапольної деформацій поверхні обох ядер. Для цього було обчислено енергію взаємодії для систем двох однакових ядер з деформацією поверхні мультипольності $l = 2, 3, 4$.

Енергія взаємодії ядер з урахуванням їх деформації. Для обчислення мінімальної висоти бар'єра при зіштовхуванні двох ядер необхідно врахувати їх деформації. Повна потенціальна енергія взаємодії ядер визначається як сума кулонівського, ядерного та обертового потенціалів, а також енергії деформації кожного ядра:

$$V_{\rm full}(R,\Theta_1,\Theta_2,\varphi,\beta_{i2},\beta_{i3},\beta_{i4}) = V_{\rm coul}(R,\Theta_1,\Theta_2,\varphi,\beta_{i2},\beta_{i3},\beta_{i4}) + \\ + V_{\rm nucl}(R,\Theta_1,\Theta_2,\varphi,\beta_{i2},\beta_{i3},\beta_{i4}) + V_{\rm rot}(R) + V_{\rm def}(\beta_{i2},\beta_{i3},\beta_{i4}), \quad (1)$$

© В. Ю. Денисов, Т. О. Маргітич, 2015

де R — відстань між центрами мас ядер; Θ_1, Θ_2, φ — кути Ейлера, що задають взаємну орієнтацію ядер; β_{i2}, β_{i3}, β_{i4} — параметри квадрупольної, октупольної та гексадекапольної деформацій поверхні відповідного ядра i $(i = 1, 2)$, які пов'язані з радіусом поверхні ядра

$$R_i(\theta) = R_{0i}[1 + \beta_{i2}Y_{20}(\theta) + \beta_{i3}Y_{30}(\theta) + \beta_{i4}Y_{40}]. \tag{2}$$

Кулонівський потенціал взаємодії двох аксіально-деформованих ядер залежить від кутів, що задають взаємну орієнтацію ядер у просторі, та параметрів квадрупольної деформації ядер і має вигляд [1, 2, 5, 9, 10]:

$$V_{\text{coul}}(R, \Theta_1, \Theta_2, \varphi, \beta_{i2}, \beta_{i3}, \beta_{i4}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}\Bigg\{1 + \sum_{l=2,3,4}[f_{1l}(R, \Theta_1, R_{10})\beta_{1l} +$$
$$+ f_{1l}(R, \Theta_2, R_{20})\beta_{2\ l}] + f_2(R, \Theta_1, R_{10})\beta_{12}^2 + f_2(R, \Theta_2, R_{20})\beta_{22}^2 +$$
$$+ f_3(R, \Theta_1, R_{10}, \Theta_2, R_{20})\beta_{12}\beta_{22} + f_4(R, \Theta_1, R_{10}, \varphi, \Theta_2, R_{20})\beta_{12}\beta_{22}\Bigg\}, \tag{3}$$

де Z_1 та Z_2 — кількість протонів у відповідному ядрі; e — заряд протона;

$$f_{1l}(R, \Theta_i, R_{i0}) = \frac{3R_{i0}^l}{(2l+1)R^l}Y_{l0}(\Theta_i); \tag{4}$$

$$f_2(R, \Theta_i, R_{i0}) = \frac{6\sqrt{5}R_{i0}^2}{35\sqrt{\pi}R^2}Y_{20}(\Theta_i) + \frac{3R_{i0}^4}{7\sqrt{\pi}R^4}Y_{40}(\Theta_i); \tag{5}$$

$$f_3(R, \Theta_1, R_{10}, \Theta_2, R_{20}) =$$
$$= \frac{27R_{10}^2R_{20}^2}{80\pi R^4} + [17\cos^2(\Theta_1)\cos^2(\Theta_2) - 5\cos^2(\Theta_1) - 5\cos^2(\Theta_2) + 1]; \tag{6}$$

$$f_4(R, \Theta_1, R_{10}, \varphi, \Theta_2, R_{20}) =$$
$$= \frac{27R_{10}^2R_{20}^2}{40\pi R^4}[\cos^2(\varphi)\sin^2(\Theta_1)\sin^2(\Theta_2) - 2\cos(\varphi)\sin(2\Theta_1)\sin(2\Theta_2)] \tag{7}$$

— функції, які описують залежність потенціалу від орієнтації кутів; R_{i0} — радіус i-го ядра; $Y_{l0}(\Theta_i)$ — сферичні гармоніки мультипольності l [11]. Цей вираз враховує всі лінійні та квадратичні члени за параметром квадрупольної деформації кожного із ядер. Значення октупольної та гексадекапольної деформацій, як правило, менші за квадрупольну деформацію і пов'язані співвідношенням $\beta_{i2}^2 \approx \beta_{l>2}$. Таким чином, вираз, що містить одночасно лінійні та квадратичні члени квадрупольної деформації, а також лінійні члени з параметрами деформацій вищих мультипольностей, має точність порядку β_{i2}^2. Наступні її члени будуть з поправкою порядку β_{i2}^3 (або $\beta_2\beta_{l>2}$), тобто замалі, щоб значно впливати на величину енергії взаємодії деформованих ядер.

Ядерна частина енергії взаємодії ядер отримана у наближенні теореми proximity [12] і пов'язана з потенціалом взаємодії сферичних ядер $V(R)$ [13]:

$$V_{\text{nucl}}(R, \Theta_1, \Theta_2, \varphi, \beta_{12}, \beta_{22}) = \frac{C_{10} + C_{20}}{C_{\text{def}}}V(R). \tag{8}$$

Тут $C_{\rm def} = [(C_1^{\parallel} + C_2^{\parallel})(C_1^{\perp} + C_2^{\perp})]^{1/2}$ — узагальнена кривизна; $C_{io} = 1/R_{i0}$ — кривизна i-го сферичного ядра, а $V(R)$ — ядерна частина потенціалу взаємодії сферичних ядер, для якого відстань між поверхнями ядер d така, як і для деформованих, а відстань між центрами мас взаємодіючих сферичних ядер дорівнює $R = R_1 + R_2 + d$. Ядерну частину взаємодії сферичних ядер візьмемо з роботи [13]:

$$V(R) = -1{,}989843CF(R - R_{12} - 2{,}65)[1 + 0{,}003525139\left(\frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2}{A_1}\right)^{3/2} - \\ - 0{,}4113263(I_1 + I_2)], \tag{9}$$

де $s = R - R_{12} - 2{,}65$ Фм, $C = R_1R_2/R_{12}$, $R_{12} = R_1 + R_2$,

$$R_i = R_{ip}\left(1 - \frac{3{,}413817}{R_{1p}^2}\right) + 1{,}284589\left(I_1 - \frac{0{,}4A_i}{A_i + 200}\right). \tag{10}$$

Радіус протонної поверхні R_{ip} в (9) дорівнює:

$$R_{ip} = 1{,}24A_i^{1/3}\left(1 + \frac{1{,}646}{A_i} - 0{,}191I_i\right), \tag{11}$$

де A_i та N_i — кількість нуклонів та нейтронів у кожному ядрі, а параметр $I_i = (N_i - Z_i)/A_i$. Функція $F(s)$ для випадку $s \geqslant 0$ (ядра знаходяться на великій відстані) була апроксимована експоненційною залежністю

$$F(s) = \left\{1 - s^2\left[0{,}0541026C\exp\left(-\frac{s}{1{,}760580}\right) - 0{,}5395420(I_1 + I_2)\exp\left(-\frac{s}{2{,}424408}\right)\right]\right\} \times \\ \times \exp\left(\frac{-s}{0{,}7881663}\right), \tag{12}$$

а для малих відстаней між ядрами функція F параметризується поліномом $-5{,}65 \leqslant s \leqslant 0$:

$$F(s) = 1 - \frac{s}{0{,}7881663} + 1{,}229218s^2 - 0{,}2234277s^3 - 0{,}1038769s^4 - \\ - C(0{,}1844935s^2 + 0{,}07570101s^3) + (I_1 + I_2)(0{,}04470645s^2 + 0{,}03346870s^3). \tag{13}$$

За допомогою цього потенціалу добре описано емпіричні бар'єри між сферичними ядрами [1].

Узагальнена кривизна $C_{\rm def}$ в (7) пов'язана з кривизнами $C_i^{\parallel}$, $C_i^{\perp}$ поверхонь i-го ядра у найближчих їх точках і має вигляд [1]:

$$C_1^{\parallel} = k_1 + k_1', \qquad C_1^{\perp} = k_1 - k_1', \tag{14}$$

$$C_2^{\parallel} = k_2 + k_2'\cos(2\varphi), \qquad C_2^{\perp} = k_2 - k_2'\cos(2\varphi). \tag{15}$$

Кривизни залежать від деформаційних параметрів та кутів, що задають положення ядер у просторі:

$$k_i(R_{i0}, \beta_{i2}, \eta') \approx C_{i0}\left[1 + \sum_{l=2,3,4}\frac{l(l+1) - 2}{2}\beta_{il}Y_{l0}(\eta') - 5\beta_{i2}^2(Y_{20}(\eta'))^2 + \frac{\beta_{i2}^2}{4\pi}\right], \tag{16}$$

$$k_i'(R_{i0}, \beta_{i2}, \eta') \approx$$

$$\approx -C_{i0}\frac{3}{8\pi}\sin^2(\eta')[2\sqrt{5\pi}\beta_{20} + 5\beta_{20}^2 - 30\cos^2(\eta')\beta_{20}^2 + 15\sqrt{\pi}\beta_{40}(7\cos^2(\eta') - 1)], \quad (17)$$

де η' — кут у власній системі координат, що задає точку на поверхні ядра, яка розташована найближче до поверхні іншого ядра.

В моделі рідкої краплі у випадку аксіальної мультипольної деформації поверхні ядра енергія деформації дорівнює [14, 15]:

$$V_{\text{def}}(\beta_{1l}, \beta_{2l}) = \frac{1}{2}\sum_{l=2,3,4}[\chi_{1l}(\beta_{1l})^2 + \chi_{2l}(\beta_{2l})^2]. \quad (18)$$

Тут χ_{il} — коефіцієнт жорсткості поверхні при її деформації. Цей коефіцієнт залежить від коефіцієнта поверхневого натягу σ та кулонівської енергії і для випадку деформації мультипольності l має вигляд [14]:

$$\chi_{il} = \frac{1}{4\pi}(l-1)(l+2)b_{\text{пов}}A^{2/3} - \frac{3}{2\pi}\frac{l-1}{2l+1}\frac{e^2}{r_0}Z^2A^{-1/3}, \quad (19)$$

де

$$b_{\text{пов}} = 4\pi\sigma r_0^2 = a_s(1 - k_sI^2); \quad (20)$$

коефіцієнти a_s, k_s, r_0^2 визначено у масовій формулі [15].

Якщо система обертається, то до повного потенціалу додається обертовий потенціал, що має вигляд [10]:

$$V_{\text{rot}}(R) = \frac{\hbar^2}{2M_n(A_1A_2/(A_1+A_2))}\frac{L(L+1)}{R^2}, \quad (21)$$

де L — орбітальний кутовий момент; M_n — маса нуклона. В даній роботі ми нехтуємо вкладом обертового потенціалу, тому $L = 0$. Відмітимо, що детальне дослідження вкладу обертового потенціалу у випадку квадрупольної деформації ядер подано в роботі [10].

Обговорення результатів. Мінімальну висоту бар'єра мають ядра, витягнуті вздовж осі, що з'єднує їх центри мас при кутах Ейлера $\Theta_1 = \Theta_2 = \varphi = 0$ (рис. 1) [1, 2, 5, 12]. Тому обчислення потенціалу проводилися при такій орієнтації ядер. Більше того, при $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ і кулонівський (3), і ядерний (8) внески в енергію взаємодії ядер не залежать від φ.

Детально розглянемо потенціал взаємодії ядер для таких симетричних систем з двох ядер: ^{40}Ca + ^{40}Ca, ^{64}Ni + ^{64}Ni, ^{90}Zr + ^{90}Zr. В основному стані ці ядра мають сферичну або майже сферичну форму, при зміні якої досліджувався потенціал взаємодії ядер та мінімальний бар'єр залежно від деформацій поверхні β_2, β_3 та β_4.

На рис. 2 розглянуто залежність висоти бар'єра від різних комбінацій мультипольних деформацій поверхонь ядер, що взаємодіють.

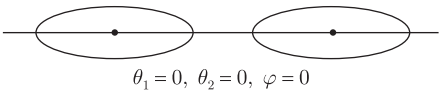

Рис. 1. Орієнтація ядер у просторі, що відповідає мінімальній висоті бар'єра

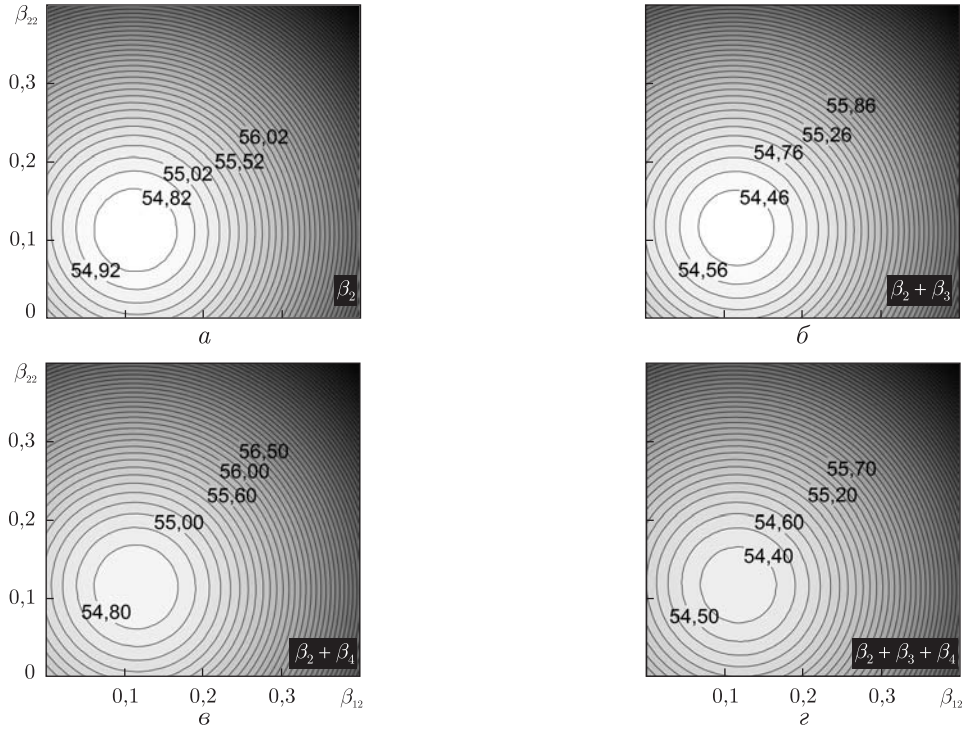

Рис. 2. Залежність бар'єра від квадрупольної деформації для системи ядер ^{40}Ca+^{40}Ca: *а* — враховано лише квадрупольну деформацію ядер; *б* — враховано квадрупольну та октупольну деформації; *в* — враховано квадрупольну та гексадекапольну деформацію; *г* — враховано квадрупольну, октупольну та гексадекапольну деформацію ядер. Висоти бар'єрів (МеВ) позначені на контурних картах

Залежність висоти бар'єра лише від квадрупольної деформації ядер показано на рис. 2, *а*. Видно, що з урахуванням цієї деформації змінюється висота бар'єра. Значення висоти мінімального бар'єра та величини квадрупольної деформації подано в табл. 1.

Для того щоб визначити роль октупольної деформації поверхні ядер, на рис. 2, *б* наведено значення мінімального бар'єра, з урахуванням величин квадрупольної та октупольної деформацій. При цьому для кожного значення даних параметрів квадрупольної деформа-

Таблиця 1. Значення висоти мінімального бар'єра та величин деформації ядра для мінімального бар'єра для систем ^{40}Ca + ^{40}Ca, ^{64}Ni + ^{64}Ni, ^{90}Zr + ^{90}Zr

Система	β_2	β_3	β_4	$V_{\min}$, МеВ
^{40}Ca + ^{40}Ca	0,110	0,0	0,0	54,72
	0,115	0,16	0,0	54,38
	0,115	0,0	0,08	54,70
	0,115	0,16	0,08	54,32
^{64}Ni + ^{64}Ni	0,160	0,0	0,0	94,83
	0,170	0,08	0,0	93,69
	0,170	0,0	0,04	94,61
	0,170	0,08	0,04	93,34
^{90}Zr + ^{90}Zr	0,270	0,0	0,0	177,97
	0,270	0,08	0,0	174,86
	0,275	0,0	0,08	177,54
	0,265	0,08	0,04	174,81

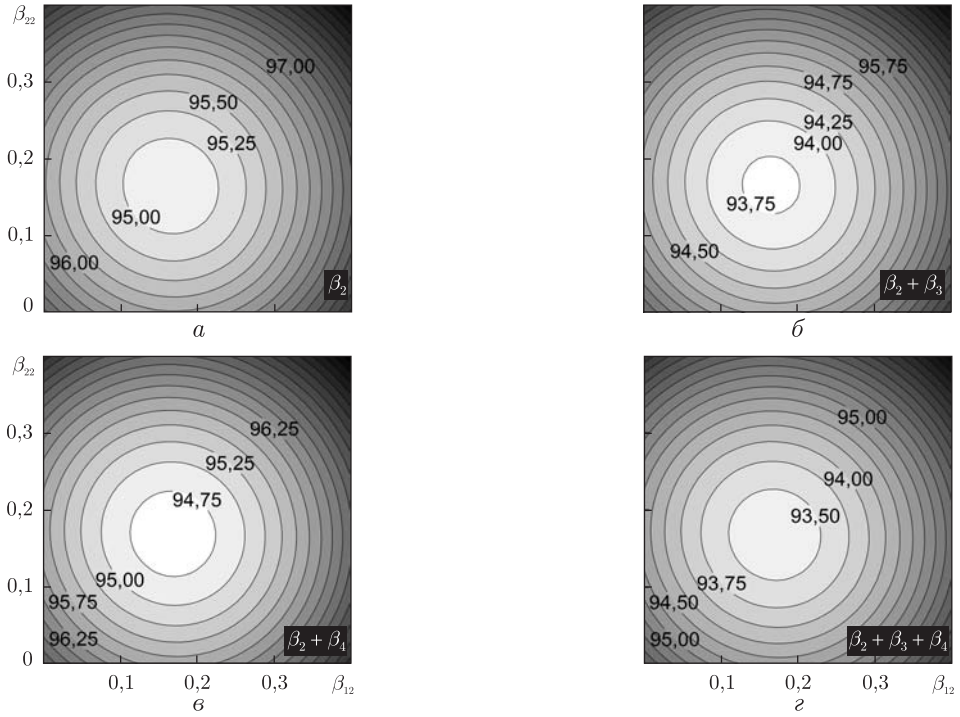

Рис. 3. Залежність бар'єра від квадрупольної деформації для системи ядер $^{64}\mathrm{Ni} + {}^{64}\mathrm{Ni}$. Позначення аналогічні рис. 2

ції були взяті такі значення октупольної деформації, які призводять до мінімальної висоти бар'єра. Врахування октупольної деформації незначно зменшує мінімальну висоту бар'єра (див. табл. 1).

Також аналіз рис. 2, *в* дозволяє побачити вплив гексадекапольної деформації. У цьому випадку враховується лише квадрупольна та гексадекапольна деформації, вплив якої менший, ніж вплив октупольної деформації. Мінімальна висота бар'єра з урахуванням квадрупольної та гексадекапольної деформацій також наведена в табл. 1.

Одночасне врахування квадрупольної, октупольної та гексадекапольної деформацій призводить до найменшого значення висоти бар'єра (див. рис. 2, *г* та табл. 1). При цьому значення β_3 та β_4 на рис. 2 бралися такі, що відповідали мінімальній висоті бар'єра для фіксованого значення β_2.

На рис. 3 та 4 наведено аналогічні результати для більш важких систем двох ядер, що взаємодіють: $^{64}\mathrm{Ni} + {}^{64}\mathrm{Ni}$, $^{90}\mathrm{Zr} + {}^{90}\mathrm{Zr}$. Порівнюючи результати рис. 2–4 та табл. 1, бачимо, що більш тяжкі ядра мають мінімальне значення бар'єра для більшої величини квадрупольної деформації. Значення деформацій, які відповідають мінімальним висотам бар'єрів, та значення цих бар'єрів подано в табл. 1.

Таким чином, в роботі показано, що мінімальна висота бар'єра спостерігається для деформованих ядер та знайдено величини цих деформацій (див. рис. 2–4 та табл. 1);

різниця між висотою бар'єра для сферичних та деформованих ядер зростає зі збільшенням маси та заряду ядер (див. рис. 2–4);

значення квадрупольної деформації, що відповідають мінімальному значенню висоти бар'єра для деформованих ядер, зростають з ростом маси та заряду взаємодіючих ядер (див. табл. 1);

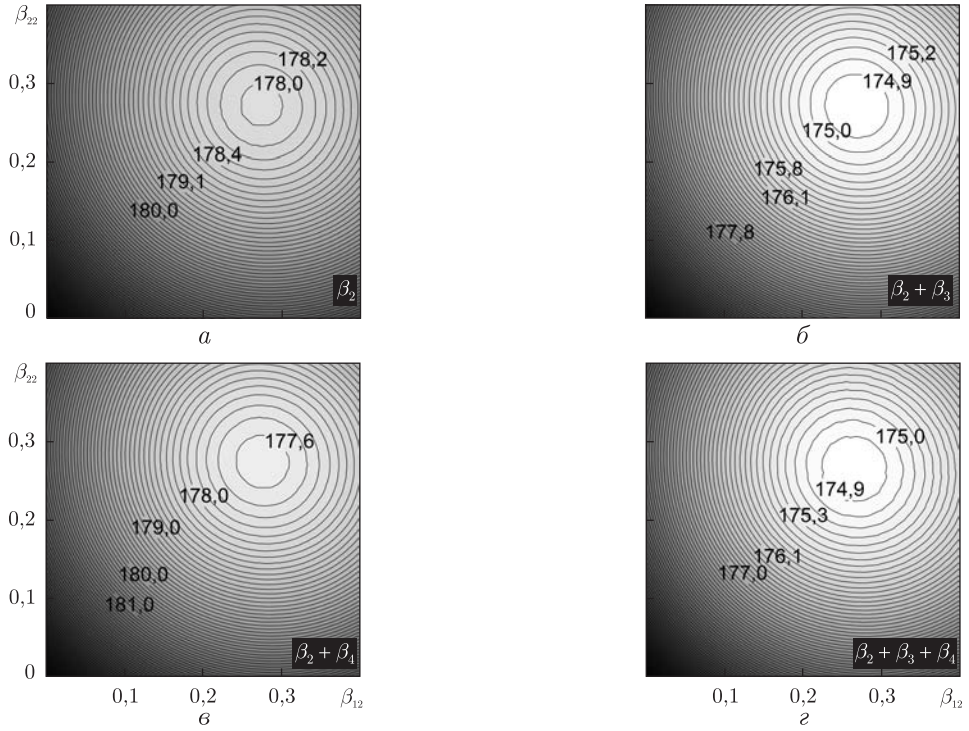

Рис. 4. Залежність бар'єра від квадрупольної деформації для системи ядер ^{90}Zr + ^{90}Zr. Позначення аналогічні рис. 2

значення квадрупольної деформації ядер, що відповідають мінімальному значенню висоти бар'єра, слабо залежать від врахування деформацій вищих мультипольностей;

найбільший вплив на величину мінімального значення висоти бар'єра має квадрупольна деформація поверхні, октупольна деформація дає менший внесок. Гексадекапольна деформація впливає незначно;

з ростом маси та заряду ядер вплив октупольної та гексадекапольної деформацій при мінімальному значенні потенціалу зменшується, що пов'язано з ростом величини жорсткості χ_{il} від l та A (див. (18)).

Отже, для реакцій, які протікають при енергіях зіткнень, близьких до бар'єра, та залежать від його висоти, необхідно враховувати квадрупольну, октупольну та гексадекапольну деформації поверхонь обох ядер.

Автори висловлюють вдячність акад. НАН України І. М. Вишневському за увагу до роботи та корисні обговорення.

1. *Denisov V. Yu., Pilipenko N. A.* Interaction of two deformed, arbitrarily oriented nuclei // Phys. Rev. C. – 2007. – **76**. – P. 014602.
2. *Hofmann H., Munzenberg G.* The discovery of the heaviest elements // Rev. Mod. Phys. – 2000. – **72**. – P. 733–767; *Armbruster P.* // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. – 2000. – **50**. – P. 411–479.
3. *Денисов В. Ю., Плюйко В. А.* Проблемы физики атомного ядра и ядерных реакций. – Київ: Вид.-поліграф. центр "Київ. університет", 2013. – 430 с.
4. *Denisov V. Yu., Ikezoe H.* α-nucleus potential for α-decay and sub-barrier fusion // Phys. Rev. C. – 2005. – **72**. – P. 064613.
5. *Денисов В. Ю. Пилипенко Н. А.* Взаимодействие и слияние деформированных ядер // Ядерная физика. – 2010. – **73**, № 7. – С. 1191–1202.

6. *Dasgupta M., Hinde D. J., Rowley N., Stefanini A. M.* Measuring barriers to fusion // Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. – 1998. – **48**. – P. 401–61.
7. *Hagino K., Takigawa N.* Subbarrier fusion reactions and many-particle quantum tunneling // Progr. of Theor. Phys. – 2012. – **128**. – P. 1061–1106.
8. *Feshbach H.* Theoretical nuclear physics: nuclear reactions. – New York: Wiley, 1992.
9. *Денисов В. Ю., Пилипенко М. О.* Взаємодія двох аксіально-симетричних ядер // Укр. фіз. журн. – 2008. – **53**, № 9. – С. 846–852.
10. *Денисов В. Ю. Маргітич Т. О.* Бар'єри в енергії взаємодії деформованих ядер // Ядерна фізика та енергетика. – 2014. – **15**, № 2. – С. 119–125.
11. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. – Москва: Наука, 1975. – 439 с.
12. *Blocki J., Randrup J., Swiatecki W. J., Tsang C. F.* Proximity forces // Ann. Phys. – **105**. – P. 427–462.
13. *Denisov V. Yu.* Interaction potential between heavy ions // Phys. Lett. B. – 2002. – **526**. – P. 315–321.
14. *Бор О., Моттельсон Б.* Структура атомного ядра. Т. 2. – Москва: Мир, 1977. – 663 с.
15. *Moller P., Nix J. R., Myers W. D., Swiatecki W. J.* Nuclear ground-state masses and deformations // At. Data Nucl. Data Tabl. – 1995. – **59**, No 2. – P. 185–381.

Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ *Надійшло до редакції 03.12.2014*

В. Ю. Денисов, Т. О. Маргитич

Влияние деформаций высших мультипольностей на высоту барьера ядер

Исследуется энергия взаимодействия двух ядер с учетом линейных членов, связанных с квадрупольной, октупольной, гексадекапольной деформациями поверхности ядер и квадратичными членами по параметру квадрупольной деформации. При определении полной энергии учитывались кулоновская и ядерная энергии взаимодействия ядер, а также энергия деформации поверхности каждого ядра. Показано, что барьер и энергия взаимодействия двух ядер зависят от их деформации, и определены значения этих деформаций для наименьшего барьера. Разница между барьером для сферических ядер и наименьшим барьером для деформированных ядер, с учетом указанных выше деформаций, растет с увеличением массы и заряда взаимодействующих ядер. Наибольшее влияние на высоту барьера имеет квадрупольная деформация, учет октупольной деформации незначительно уменьшает барьер, а гексадекапольная деформация имеет наименьшее влияние на величину высоты барьера.

V. Yu. Denisov, T. O. Margitych

Influence of deformations with higher multiplicities on the barrier height of nuclei

The interaction energy between two nuclei with regard for the linear terms associated with the quadrupole, octupole, and hexadecapole deformations of nuclei surfaces and with quadratic terms of the quadrupole deformation parameter is studied. The Coulomb and nuclear interaction energies, as well as the deformation energies of the surfaces of both nuclei, are considered at the evaluation of the interaction energy. It is shown that the barrier and the interaction energy of two nuclei depend on the deformations parameters. The minimal barrier heights of two nuclei and the values of deformations that correspond to them are evaluated. The difference between the barrier height of spherical nuclei and the lowest barrier height related to deformed nuclei, in view of the quadrupole, octupole, and hexadecapole deformations of nuclei surfaces, increases with the mass and the charge of interacting nuclei. The strongest impact on the barrier height is given by the quadrupole deformation, the octupole deformation slightly reduces the barrier, and the hexadecapole deformation weakly affects the value of minimal barrier height.