

Определение характеристик кривой линии по дискретным точкам ее положения, заданным с ошибкой, с приложением к анализу напряжений в подземном трубопроводе

И. В. Орыняк^а, И. В. Лохман^б, А. В. Богдан^а

^а Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

^б ДК “Укртрансгаз”, Киев, Украина

Решается задача восстановления положения непрерывной пространственной линии трубопровода по дискретным точкам, измеренным с некоторой погрешностью. Для решения задачи предложен безытерационный численный алгоритм, согласно которому каждая измеренная точка трубопровода рассматривается как податливая опора. Алгоритм базируется на методе начальных параметров и учитывает понятие “угла несовместимости” между двумя соседними измеренными участками оси трубопровода. С использованием методов теории вероятностей проведен анализ, который позволяет оценить точность восстановленного положения трубопровода и полученных значений напряжений. Правильность расчетов, выполненных с помощью разработанного алгоритма, проверяли путем сравнения с результатами, полученными аналитическими методами.

Ключевые слова: трубопровод, напряжение, кривизна, погрешность прибора.

Введение. Проблема описания набора дискретных точек непрерывной пространственной кривой с целью определения ее производных, по крайней мере, второго порядка достаточно актуальна для многих областей инженерии, науки, компьютерного моделирования. Так, в ядерной физике по экспериментально определяемым положениям частицы, двужущейся в электромагнитном поле, реконструируется непрерывная кривая движения и таким образом находят силы, действующие на эту частицу [1]. В молекулярной биологии для описания структуры белка, состоящего из последовательно соединенных аминокислот, используется винтовая линия, важнейшие геометрические характеристики которой – кривизна, кручение и направляющая ось [2]. Примером инженерного применения данной задачи служит описание геометрических параметров укрепляющих волокон в композитах, которые имеют большое значение для определения интегральных механических характеристик последних [3]. Можно также привести много примеров из области медицины, биологии, техники, астрономии и т.д., иллюстрирующих важность указанной проблемы.

На первый взгляд, данная задача может показаться тривиальной, поскольку является сугубо геометрической интерполяцией достаточно близко расположенных точек и решается с помощью теории сплайнов. Тем не менее большое количество работ свидетельствует об определенных сложностях, которые в первую очередь обусловлены неточностями измерения положения точек, так называемым шумом. При дифференцировании эти ошибки значительно увеличиваются и не позволяют отделить полезную информацию от шумов. Любое сглаживание полученных кривых чревато потерей полезной информации. Очевидно, что без дополнительных данных о реальных входных

ошибках измерения, их характере и допустимой неточности выходной информации невозможно создать эффективный алгоритм. По нашему мнению, именно сосредоточенность имеющихся исследований на геометрической стороне задачи является их основным недостатком. Необходимо учитывать физическое поведение объекта исследования и физически обосновать допустимость ошибок для входной информации. Таким образом, выделяются две взаимосвязанные задачи.

1. Разработка эффективного алгоритма построения непрерывно дифференцируемой кривой, проходящей возле (на некотором среднем расстоянии δ) заданных пространственных точек.

2. Определение допустимых отклонений входных данных δ в зависимости от средней ошибки измерения ε входных точек и точности определения геометрических характеристик кривой.

Настоящая работа посвящена решению узкой технической задачи – определению непрерывной пространственной линии оси трубопровода по дискретным точкам замеров, обычно получаемым с помощью геодезического внутритрубного снаряда. Геометрические характеристики линии (кривизна, вращение) определяются второй и третьей производной от радиуса вектора линии и, как известно, пропорциональны изгибающему и крутящему моментам соответственно. Это позволяет судить о нагруженности трубопровода, вызванной, в частности, такими непредсказуемыми факторами, как сдвиги земли. Известные работы [4–6] основаны на прямом использовании смысла производной как разницы приращения функции (координаты положения точки), деленной на приращение аргумента (длина трубопровода), с возможным применением формального сглаживания посредством, например, рядов Фурье [4], методом статистического усреднения [5] или методом наименьших квадратов с помощью кубических сплайнов [6]. Проблема оценки точности результатов и влияния ошибок входных данных не решена в этих работах.

Вместе с тем в литературных источниках наряду с геометрическими методами (сплайнами) применяются так называемые “пружинные” (spring) сплайны [7], в которых используются хорошо развитые методы строительной механики, позволяющие вычислять перемещения балки (трубопровода) при любом нагружении. Решая обратную задачу, т.е. задавая перемещения в некоторых точках приложения сил, можно вычислить эти силы и получить непрерывные дифференцируемые кривые третьего порядка. Отклонения δ достигаются путем введения в точках приложения сил пружин некоторой податливости C . Чем податливее пружина, тем больше отклонение δ и большее “сглаживание” кривой. Этот метод, названный “энергетическим методом”, впервые был предложен в 1969 г. [8]. По-видимому, такое название объясняется тем, что методы сопротивления материалов и строительной механики широко используют энергетический подход Мора–Максвелла для решения статически неопределимых балок [9].

На первый взгляд вызывает удивление то, что при описании геометрии трубопроводов не используются указанные методы, хотя они являются очень распространенными и именно на их основе выполняются расчеты трубопроводов на прочность и устойчивость. Однако при практическом их применении возникают большие трудности.

Методы развиты для наперед заданной геометрии при малом отклонении перемещений от начального положения, каковым является прямая линия. Учет геометрической нелинейности – наибольшая проблема решения задач строительной механики.

Неясно, насколько точно аппроксимационная кривая должна проходить возле заданных дискретных точек. Поэтому необходимо обосновать меру точности и в соответствии с ней вычислить требуемую податливость опор.

Численное решение задачи требует построения эффективного алгоритма, обеспечивающего сходимость результатов, поскольку балка на упругом основании имеет собственные решения вида $e^{-x/\lambda}$ и $e^{x/\lambda}$, где x – линейная координата; λ – собственное число решения (условная длина волны). С одной стороны, значение длины балки должно быть в сотни раз больше λ , чтобы граничные условия (они часто не могут быть правильно сформулированы) не влияли на решение, с другой – при расчете балки может иметь место расхождение в численном решении.

В отличие от других задач математики, физики и т.д., трубопровод имеет изначально криволинейные участки (гибы труб), кривизна которых не связана с действующими на трубу силовыми факторами.

Решению данной задачи предшествовал определенный опыт решения задач деформирования прямых и криволинейных балок на основе метода начальных параметров [10–12]. Новизна предлагаемой работы состоит, прежде всего, в начальном задании геометрии и обосновании требуемой и достигаемой точности решения.

1. Используемые понятия и результаты.

1.1. *Понятие о натуральном базисе для пространственной линии.* Из курса дифференциальной геометрии известно, что геометрия оси линии характеризуется подвижным криволинейным (натуральным) базисом единичных векторов $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$, $\vec{k}(s)$, где \vec{t} – касательный вектор; \vec{n} – вектор нормали; \vec{k} – вектор бинормали, $\vec{k} = \vec{t} \times \vec{n}$; s – параметр длины дуги. Другими важными геометрическими характеристиками оси являются радиусы кривизны R и B в разных направлениях. Известно, что производные от этих векторов по s выражаются через эти же векторы [13]:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{k}}{B} - \frac{\vec{t}}{R}; \quad \frac{d\vec{k}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{B}. \quad (1)$$

Уравнения (1) для базисных векторов называются уравнениями Френе–Серре.

1.2. *Прямолинейная балка на упругом основании.* Последовательно запишем основные уравнения для балки, а именно: геометрическое и физическое уравнения, уравнения равновесия сил и моментов, а также уравнение для реакции упругой основы [9]:

$$dw(x)/dx = \theta(x); \quad (2a)$$

$$d\psi/dx = M(x)/(EJ); \quad (2б)$$

$$dM(x)/dx = Q(x); \quad (2в)$$

$$dQ/dx = q(x); \quad (2г)$$

$$q(x) = -\alpha w(x). \quad (2д)$$

Здесь w – перемещение точек трубопровода; ψ – угол поворота оси; M – изгибающий момент; EJ – жесткость сечения балки, зависящая от модуля упругости материала E и момента инерции J ; Q – поперечная сила; q – распределенная внешняя сила; α – коэффициент упругой основы.

Последовательно дифференцируя уравнение (2а) четыре раза, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{4}{l^4} w(x) = 0, \quad (3а)$$

где введено обозначение:

$$l^4 = 4EJ/\alpha. \quad (3б)$$

Общее решение уравнения (3а) имеет четыре независимые функции, две из которых будут расходящимися на бесконечности. В нашем случае необходимо сходящееся решение. Приложим в точке $x_0 = 0$ внешнюю силу S_0 . Тогда ввиду симметрии в непосредственной близости к этой точке справа действует внутренняя сила $Q_0 = S_0/2$. Другим условием симметрии является равенство нулю угла поворота $\theta_0 = 0$. Общее решение для правой части имеет вид [9]

$$w(x) = \frac{l^3}{4EJ} Q_0 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi); \quad \psi(x) = -\frac{l^2}{2EJ} Q_0 e^{-\xi} \sin \xi; \quad (4а)$$

$$M(x) = Q_0 l e^{-\xi} (-\cos \xi + \sin \xi)/2; \quad Q(x) = Q_0 e^{-\xi} \cos \xi, \quad (4б)$$

где $\xi = x/l$. Очевидно, что l представляет собой характерную длину, определяющую скорость затухания решения. Уравнения (4а) и (4б) будут использованы ниже для обоснования точности моделирования пространственной кривой и ее производных. В частности, отметим формулу

$$w_0 = \frac{l^3}{4EJ} Q_0 = \frac{1}{\alpha l} Q_0, \quad (4в)$$

связывающую начальные значения перерезывающей силы с перемещениями трубопровода w_0 .

1.3. Сведения по теории вероятностей. Считаем, что положение входных точек определяется с некоторой ошибкой δ . Пусть вероятностная величина δ распределена по нормальному закону, который характеризуется сред-

ним значением $\bar{\delta}$, равным нулю, и стандартом случайной величины ρ , т.е. плотность вероятности $\varphi(\delta)$ описывается законом Гаусса:

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{\rho\sqrt{2\pi}} e^{-\delta^2/2\rho^2}. \quad (5a)$$

Отметим, что именно величина ρ есть главной количественной характеристикой ошибки измерения положения точки. В соответствии с известной теоремой теории вероятности сумма вероятностных величин

$$\eta = \sum_i a_i \delta_i, \quad (5b)$$

где a_i – набор констант, описывается вероятностной величиной, которая характеризуется средним значением $\bar{\eta}$ и стандартом $\hat{\eta}$:

$$\hat{\eta} = \rho \sqrt{\sum_i a_i^2}. \quad (5b)$$

2. Анализ ошибок в модели балки на упругом основании.

2.1. **Обоснование корректности модели балки.** Балка на упругом основании имеет четко выраженный физический прототип, например балка в упругом грунте. Впервые эта модель была предложена С. П. Тимошенко в 1916 году для моделирования деформирования железнодорожных рельс на дискретно расположенных шпалах. Возникает вопрос о границах применения континуальной модели для дискретных упругих опор в зависимости от расстояния между опорами d и податливости опоры C . Итак, пусть уравнение опоры имеет вид

$$w_{sup} = \mu \frac{l^3}{4EJ} S_0 = CS_0, \quad (6)$$

где μ – безразмерная податливость.

Дискретную модель заменяем континуальной следующим образом. Полагаем, что перемещение балки на расстоянии d является константой. Проинтегрируем уравнение (2д) по x от $0 \leq x \leq d$ и получим

$$C = (\alpha d)^{-1}, \quad (7a)$$

т.е. из этого уравнения определяется эквивалентная жесткость упругого основания. Сравнивая α из (7) с учетом представления для C (6) с таковым из (3б), получаем выражение для характеристической длины l в зависимости от безразмерной податливости опоры и расстояния d :

$$l = \mu d. \quad (7b)$$

Очевидно, что перемещения балки в пределах расстояния между опорами можно приблизительно считать константой, если это расстояние не больше длины l . Поэтому, если $l \geq d$, то данную модель можно полагать приемлемой. Другими словами, условие $\mu \geq 1$ обеспечивает применимость континуальной модели. Несколько более жесткое требование приведено в работе [14], где $l \geq 4d/\pi$. Проверим обоснованность таких требований на примере рассмотренной выше задачи для бесконечной балки, к которой приложена сила S_0 (рис. 1).

В табл. 1 представлены безразмерные значения перемещений $w(d/l)$ и моментов $M(d/l)$ в точке $x = 0$ для балки с дискретными опорами, пронормированные к соответствующим значениям для балки на упругом основании, т.е. $w_0 = Q_0 l^3 / 4EJ$ и $M_0 = Q_0 l / 2$. Исследуем их численно с помощью программы “PipeMaster” [15]. Очевидно, что $\mu = 1$ обеспечивает точность моделирования порядка 10%, при $\mu = 2$ ошибка не превышает 2%.

Т а б л и ц а 1

Результаты влияния расстояния между опорами на значения моментов и перемещений в точке приложения сосредоточенной силы

| μ | M / M_0 | w/w_0 |
|-------|-----------|---------|
| 0,4 | 0,562 | 0,514 |
| 0,6 | 0,769 | 0,847 |
| 0,8 | 0,870 | 0,988 |
| 1,0 | 0,909 | 1,019 |
| 2,0 | 0,980 | 1,037 |
| 3,0 | 0,993 | 1,038 |
| 5,0 | 1,000 | 1,030 |
| 6,0 | 1,000 | 1,000 |
| 8,0 | 0,999 | 1,000 |

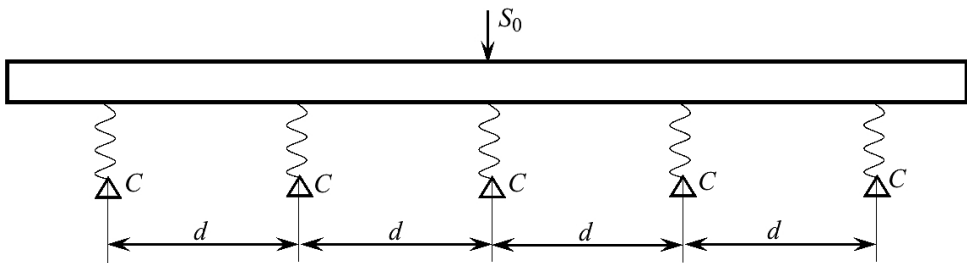


Рис. 1. Балка на упругом основании.

2.2. **Анализ влияния ошибки замера положения точек.** Входные точки замера их положения однозначно связываем с точками опор. Пусть положение точки определено с ошибкой δ . Определим понятие погрешности выходной информации и оценим эту величину. Одна из основных целей анализа – найти напряжения изгиба в трубопроводе, которые пропорциональны второй

производной от перемещений. Очевидно, что в этом случае может использоваться максимально допустимая величина отклонения напряжений $[\sigma]$.

Пусть ошибка замера положения точки равна δ . Тогда суммарное перемещение точки оси трубы w_0 и перемещение самой опоры w_{sup} равно ошибке измерения положения δ :

$$w_{sup} + w_0 = \delta. \tag{8}$$

Подставим в уравнение (8) выражения (6) и (5), что позволит найти значение силы Q_0 :

$$Q_0 = \delta \frac{4EJ}{l^3(2\mu + 1)}. \tag{9}$$

В соответствии с формулой (4б) определим величину изгибающего момента в каждой точке:

$$M(x) = \delta z e^{-\xi} (-\cos \xi + \sin \xi), \tag{10a}$$

где

$$z = (2EJ)/(l^2(2\mu + 1)). \tag{10б}$$

Последовательно пронумеруем точки опор $-\infty < i < \infty$ (рис. 1). Для простоты рассмотрим значение момента в точке начала координат. Проанализируем величину изгибающего момента с учетом того, что, во-первых, δ является вероятностной величиной, среднее значение которой равно нулю, а стандарт равен ρ , во-вторых, на напряжения (момент) в точке i влияют отклонения в произвольной точке j . Очевидно, что значение момента в точке начала координат \bar{M}_0 от возмущений в каждой точке j (неточностей замера положения δ_j) определяется по формуле

$$\bar{M}_0 = z \sum_{j \geq 1} (\delta_j + \delta_{-j}) M_{j,0}, \tag{11a}$$

где $M_{j,0}$ – значения момента в точке j при приложении возмущения в точке начала координат, $M_{j,0} = e^{-j/\mu} (-\cos j/\mu + \sin j/\mu)$. При большом μ значения \bar{M}_0 представляются следующей формулой:

$$\bar{M}_0 = z \sum_{j \geq 1} (\delta_j + \delta_{-j}) e^{-j/\mu} (-\cos j/\mu + \sin j/\mu). \tag{11б}$$

Понятно, что среднее значение случайной величины \bar{M}_0 равно нулю. Оценим дисперсию (ее стандарт). Согласно формуле (5) имеем

$$\hat{M}_0 = \rho z \sqrt{2 \sum_{j \geq 1} (M_{j,0})^2}. \tag{12}$$

Рассчитанные с помощью программы “PipeMaster” [15] значения \widehat{M}_0 , нормированные к $M_0 = Q_0 l / 2$, приведены в табл. 2. Там же представлено безразмерное значение \widehat{m}_0 , приведенное к величине $\sqrt{\mu}$. Выбор такого нормирующего множителя легко объясняется. Поскольку \widehat{M}_0 имеет значения, сопоставимые с M_0 приблизительно на длине l , фактически учитывается только μ точек.

Т а б л и ц а 2

Стандарт отклонения момента, вызванного случайными неточностями величин измерения положения линии

| μ | \overline{M}_0 / M_0 | $\widehat{m}_0 = \frac{\overline{M}_0 / M_0}{\sqrt{\mu}}$ |
|-------|------------------------|---|
| 0,6 | 0,497 | 0,641 |
| 0,8 | 0,330 | 0,368 |
| 1,0 | 0,408 | 0,408 |
| 2,0 | 0,877 | 0,620 |
| 3,0 | 1,160 | 0,668 |
| 4,0 | 1,370 | 0,685 |
| 6,0 | 1,710 | 0,697 |
| 8,0 | 1,980 | 0,714 |

Оценим уровень напряжений, вызываемых моментами \widehat{M}_0 . Для случайной величины, среднее значение которой равно нулю, отклонение определяет стандарт отклонения. Для трубы напряжения связаны с изгибающим моментом:

$$\sigma = M / (\pi R^2 t). \quad (13a)$$

Стандарт отклонения напряжений будет

$$\widehat{\sigma} = \widehat{M}_0 / (\pi R^2 t) = \rho \frac{2\widehat{m}_0 E R \sqrt{\mu}}{l^2 (2\mu + 1)}. \quad (13b)$$

Ограничим величину $\widehat{\sigma} < [\sigma]$, где $[\sigma]$ – максимально допустимое значение стандарта отклонения напряжений. Допустимую величину $[\sigma]$ удобно принять как часть от модуля упругости: $\varepsilon = [\sigma] / E$ (например, полагая $[\sigma] = 20$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, получаем $\varepsilon = 10^{-4}$). Тогда имеем

$$l^2 (2\mu + 1) \varepsilon \geq \rho \widehat{m}_0 2R \sqrt{\mu} \quad (14a)$$

или с учетом (7б):

$$d^2 \geq \rho \sqrt{\mu} \widehat{m}_0 2R / (\mu^2 \varepsilon (2\mu + 1)). \quad (14b)$$

С помощью формулы (14б) можно найти μ :

$$\mu^{5/2} \geq (\rho R \hat{m}_0) / (d^2 \varepsilon), \quad (14в)$$

что позволяет определить требования к этой величине. Очевидно, что чем больше μ , тем меньше начальные ошибки в измерении влияют на расчетные значения напряжений.

2.3. Анализ потери полезной информации. Сглаживание случайных ошибок может привести к потере полезной информации. Пусть закон реального положения трубы описывается синусоидой

$$w_{pipe}(x) = A \sin(\kappa x / l). \quad (15)$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение для этой задачи таково:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{4}{l^4} (w(x) - w_{pipe}(x)) = 0, \quad (16а)$$

где $w(x)$ – искомое расчетное положение трубы. Решение (16а) достаточно тривиально, его можно записать так:

$$w(x) = w_{pipe}(x) \frac{4}{4 + \kappa^4}. \quad (16б)$$

Очевидно, что по коэффициенту $(1 + \kappa^4 / 4)^{-1}$ расчетное положение трубы можно отличить от реального. Ограничивая допустимую ошибку 10%, получаем

$$\kappa \leq 0,80. \quad (16в)$$

Закон (15) предполагает, что на длине $L = \pi l / \kappa \geq 4l$ перемещения (напряжения) имеют один знак. Поэтому, если напряжения меняют знак чаще, то такие результаты недостоверны (заниженные).

Еще один источник ошибок – то, что абсолютно ненагруженная труба не является прямой. При сварке труб имеется некоторая несоосность как по углу, так и по расположению (скачки углов и перемещений). По-видимому, в расчетах это должно приводить к возникновению локальных сил и моментов (см. уравнения (4)), которые не меняют знак на длине $L_1 = \pi l$.

2.4. Выводы относительно требований к точности.

1. Очевидно, чем меньше расстояние d между точками замера, тем лучше.

2. По формуле (14в) с учетом известной точности замеров ρ устанавливается значение $\mu \geq 0,8$, определяющее длину волны аналитического решения l .

3. Значения l , а значит, и μ должны быть минимальными, поскольку наличие напряжений одного знака на длине $L \geq 4l$ определяет достоверность результатов.

2.5. Задача определения необходимости проведения сглаживания ошибок. Найдем выражение, с помощью которого можно оценить величину дополнительных изгибающих моментов, вызванных погрешностью измерительного прибора. Уравнение, связывающее перемещения трубопровода w_0 с перерезывающей силой Q_0 , представим в виде

$$w_0 = \frac{Q_0 d^3}{kEJ}, \quad (17)$$

где k – неизвестный коэффициент.

Учитывая, что в рассматриваемой задаче трубопровод должен проходить через замеренные точки, нормирующее значение момента аналогично п. 2.2 можно представить в виде $M_0 = Q_0 d/2$. Тогда из (17) получим

$$M_0 = \frac{kEJ}{2d^2} w_0 \quad (18)$$

или

$$\sigma = \frac{M_0}{\pi R^2 t} = \frac{kER}{2d^2} w_0. \quad (19)$$

Для определения k рассмотрим прямолинейный трубопровод (радиус $R = 0,71$ м и модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа), точки осевой линии которого замерены с погрешностью, распределенной по нормальному закону со стандартом $[w_0] = \rho = 0,001248$ м; интервал между точками замера $d = 5$ м. В результате расчета напряженного состояния трубопровода с помощью разработанной численной процедуры с учетом $\mu = 0$ получим, что стандарт распределения напряжений $[\sigma] = 39,56$ МПа. Тогда из (19) имеем

$$k = \frac{2[\sigma]d^2}{ER[w_0]} = 11,16. \quad (20)$$

Найденное значение k с использованием (19) позволяет оценить величину ошибочных напряжений, связанную с погрешностью измерительного прибора, и ответить на главный вопрос: необходимо ли проводить сглаживание погрешностей измерения.

Отметим, что формула (13б) позволяет найти аналогичный коэффициент k_μ для оценки уровня ошибочных напряжений при введении некоторой податливости μ в замеренных точках трубопровода:

$$k_\mu = \frac{4\hat{m}_0 \sqrt{\mu}}{\mu^2 (2\mu + 1)}. \quad (21)$$

Значения коэффициента k_μ , рассчитанные для величин безразмерной податливости $\mu = 0,6$ и 1 , составляют $2,5$ и $0,54$ соответственно. Это означает, что

при введении в расчет таких значений податливости ошибочные напряжения будут уменьшены в 4,5 и 20,67 раза соответственно.

3. Идея и алгоритм решения.

3.1. *Плоская задача для изначально прямой балки.* Основная проблема построения эффективного алгоритма заключается в геометрической нелинейности задачи, что исключает возможность применения решений методом начальных параметров относительно начального недеформированного состояния. Нелинейность проявляется только в том, что углы поворота достаточно большие и сопоставимы с единицей. В соответствии с классификацией, приведенной в работе [16], это третий уровень сложности из четырех, требующий определенного мастерства в построении алгоритма даже для многоитерационных процедур. Ниже предлагается оригинальный алгоритм, позволяющий найти решение без итераций.

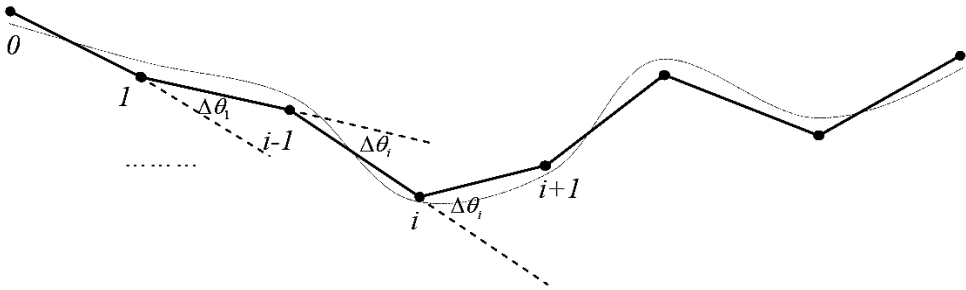


Рис. 2. Геометрия линии, замеренной с погрешностью.

Пусть искомая расчетная непрерывная линия, проходящая возле заданных точек измерения, имеет вид, показанный на рис. 2. Соединим отрезками начальные точки измерения. Для каждого i -го элементарного участка (отрезка), соединяющего точки $i, i+1$, введем локальную систему координат (x, y) , где локальный касательный вектор \vec{t}_i совпадает с направлением отрезка, а длина каждого элементарного отрезка будет $ds \approx dx$. Введем в рассмотрение базовый угол между двумя соседними отрезками $(i-1, i)$ и $(i, i+1)$, равный $\sin \Delta\theta_i^b = \vec{t}_{i-1} \times \vec{t}_i$, если углы $\Delta\theta_i^b$ малы, то $\Delta\theta_i^b = \vec{t}_{i-1} \times \vec{t}_i$. Таким образом, обязательное условие возможности решения задачи – достаточная близость между точками измерения положения, гарантирующая малость углов между двумя соседними участками. Величина

$$\theta_i^b = \theta_0^b + \sum_{j=1}^i (\Delta\theta_j^b), \quad (22)$$

где θ_0^b – принимаемый начальный базовый угол в точке 1 (рис. 2) характеризует базовое значение угла для каждого отрезка и является постоянной величиной на этом отрезке.

Итак, введено некоторое базовое (начальное) положение искомой линии, характеризующейся базовыми углами и базовыми положениями точек оси, которые проходят через входные точки замера положения. Уравнения метода

начальных параметров для каждого элементарного участка балки запишем в упрощенном виде (почти как для прямой балки) с учетом принятой базовой геометрии [11]:

$$Q_i(x) = Q_{i,0}; \quad (23a)$$

$$M_i(x) = M_{i,0} + Q_{i,0}x; \quad (23б)$$

$$\psi_i(x) = (\psi_{i,0} - \Delta\theta_i^b) + x(M_{i,0} + Q_{i,0}x/2)/(EJ); \quad (23в)$$

$$W_i(x) = W_{i,0} + (\psi_{i,0} - \Delta\theta_i^b)x + x^2(M_{i,0} + Q_{i,0}x/3)/(2EJ). \quad (23г)$$

Для решения задачи уравнения дополняются условиями сопряжения на границах участка, а именно: перемещения, моменты и углы равны между собой. Что касается сил, то на границе участка происходит их скачок, определяемый условием (6). Заметим, что отсчет угла поворота оси ψ происходит от базового угла θ_i^b , отсчет перемещений – также в локальной (базовой) системе координат. Суть уравнений (23) состоит в том, что при отсутствии внешних сил (пружинных опор) исследуемая балка примет положение идеальной прямой линии. Как будет показано ниже, уравнения (23) способны описать любую медленно искривляющуюся линию. Под последней будем понимать условие малости угла между двумя соседними отрезками:

$$\Delta\theta_i^b \ll 1. \quad (24)$$

Очевидно, что условие (24) является дополнительным требованием к близости расположения входных точек. Иногда необходимо “делать прореживание” между ними.

Уравнения (23) необходимо дополнить граничными условиями. Для их получения рассматривают общие решения (3) для полубесконечной балки, что дает следующие связи между значениями искомым переменных на границах [12, 17]:

$$M_0 = l^2 EI(l\theta_0 - 2w_0); \quad Q_0 = 2l^3 EI(l\theta_0 - 2w_0). \quad (25)$$

3.2. Плоская задача для балки с участками начальной большой кривизны. Восстановление геометрии для трубопроводов по дискретным точкам обусловлено некоторыми особенностями по сравнению с аналогичными задачами для других приложений. При строительстве трубопроводов по сильно пересеченной местности часто используют изначально кривые секции труб, называемые коленами или гибами. В этом случае необходимо разделять начальную собственную кривизну и дополнительную, вызванную деформированием трубопровода. При использовании описанного выше алгоритма возникают проблемы. Во-первых, невозможно обеспечить выполнение условия (25), поскольку углы меняются достаточно быстро, во-вторых, условия

точности и требуемые податливости, установленные в разд. 2, здесь не применимы. Достаточно отметить, что собственные кривизны в десятки раз могут быть больше, приобретенных при фактическом деформировании. Это значит, что силы на пружинах, изгибающие моменты будут в десятки раз превышать таковые на изначально прямолинейных участках. Естественно, что алгоритм для этого случая следует уточнить.

Учитывается дополнительная информация о фактических геометрических параметрахгиба (координата точки начала, радиус, угол его дуги). Поскольку эти сведения могут отличаться от реальных, входные данные о параметрахгиба могут служить источником дополнительных ошибок. Цель настоящего уточнения заключается в минимизации таких ошибок. Для короткихгибов нет смысла рассматривать их как состоящие из нескольких участков. Их удобно считать поворотными и очень жесткими (недеформируемыми) элементами.

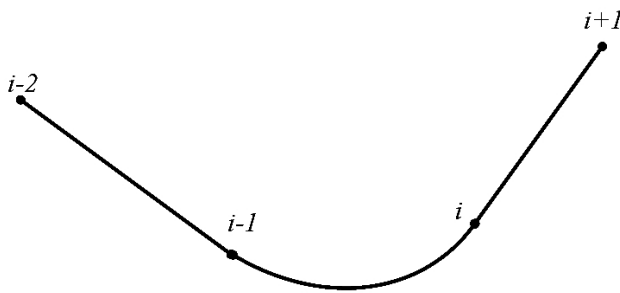


Рис. 3. Часть трубопровода, содержащая гиб.

Итак, пусть гиб характеризуется радиусом кривизны B и углом поворота ϕ . Рассмотрим часть трубопровода, содержащую гиб (рис. 3). Допустим, что угол между двумя отрезками $(i-2, i-1)$ и $(i, i+1)$, между которыми находится гиб, равен θ_b . Разница между фактическим углом поворота θ_b и ϕ

$$2\theta_{b,d} = \theta_b - \phi \tag{26}$$

определяет дополнительный угол деформирования за счет изгибающего момента.

Очевидно, что величина $\theta_{b,d}$, отнесенная к длинегиба, должна быть соизмерима с соответствующими величинами $\Delta\theta_i^b$ для прямых участков. В ином случае следует принять, что уголгиба соответствует наблюдаемой величине, т.е. $\phi = \theta_b$. Будем считать, что угол между касательной кгибу в точке $i-1$ и отрезком $(i-2, i-1)$ равен $\Delta\theta_{i-1}^b = \theta_{b,d}$, точно также угол между отрезком $(i, i+1)$ и касательной кгибу в точке i будет $\Delta\theta_i^b = \theta_{b,d}$ (рис. 3). Необходимо получить уравнения, аналогичные (23), связывающие параметры начала участка $(i-1, i)$ с его концом. Из рис. 3, учитывая, что величина Q – векторная, т.е. направлена перпендикулярно к касательной оси линии, следует

$$Q_i(x) = Q_{i,0} \cos \phi; \tag{27a}$$

$$M_i(x) = M_{i,0} + Q_{i,0} B \sin \phi. \quad (276)$$

Что касается деформирования гiba, то допущение о том, что элемент жесткий, не является принципиальным. Точные уравнения метода начальных параметров для гiba широко представлены в литературных источниках, в том числе и в работах авторов [12, 18]. Однако это допущение очень упрощает решение, которое в любом случае для гiba не совсем точное из-за дополнительных ошибок входных данных:

$$\psi_i(x) = (\psi_{i,0} - \Delta\theta_i^b); \quad (27в)$$

$$W_i(x) = W_{i,0} \cos \phi + (\psi_{i,0} - \Delta\theta_i^b) B \sin \phi. \quad (27г)$$

4. Апробация и примеры расчетной процедуры.

4.1. *Восстановление геометрии прямолинейного трубопровода.* Рассмотрим прямолинейный трубопровод (радиус $R = 0,71$ м, толщина стенки $t = 0,0157$ м, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа). Предположим, что точки осевой линии трубопровода замерены с шагом 5 м и с некоторой вероятностной погрешностью, распределенной по нормальному закону со стандартом $[w_0] = \rho = 0,001248$ м. В табл. 3 представлены максимально допустимые значения стандарта отклонения напряжений $[\sigma]$ для разных величин безразмерной податливости μ , найденные по алгоритму, описанному в п. 2.2, и расчетные значения стандарта отклонения напряжений, полученные с помощью разработанной численной процедуры. Как видно, результаты достаточно хорошо согласуются между собой.

Т а б л и ц а 3

Теоретические и численные значения стандарта отклонений напряжений

| μ | $[\sigma]_r$ | $[\sigma]_p$ |
|-------|--------------|--------------|
| 2 | 0,780 | 0,920 |
| 3 | 0,300 | 0,310 |
| 4 | 0,150 | 0,150 |
| 6 | 0,056 | 0,059 |
| 8 | 0,028 | 0,029 |

4.2. Определение характеристик кривой линии известной геометрии.

Пусть правильная (истинная) геометрия трубопровода определяется следующим выражением:

$$w(x) = A \cos\left(\frac{\pi}{100} x\right), \quad (28)$$

где A – амплитуда, в данном случае равна 1 м; x – осевая координата; $w(x)$ – высотная отметка трубопровода.

Тогда напряжения от изгибающих моментов определяются соотношением

$$\sigma = -\frac{\pi}{100^2} \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right) \frac{EI}{R^2 t}. \quad (29)$$

Согласно (29) максимальные значения напряжений действуют в точках $x = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для трубопровода диаметром 1420 мм и толщиной стенки 15,7 мм они равны приблизительно 135 МПа.

Предположим, что с помощью геодезического поршня измерения положения точек трубопровода выполняются с интервалом $d = 5$ м, при этом измерения идеальны, т.е. не содержат погрешностей. Значения напряжений, рассчитанные для трубопровода данной геометрии по предложенной численной процедуре, аналогичны полученным по выражению (29).

Тем не менее известно, что в действительности измерения положения точек трубопровода проводятся с некоторой погрешностью. Пусть погрешность измерения положения точек трубопровода геометрии (28) является случайной и распределена по нормальному закону со стандартом $\rho = 0,005$ м, что значительно меньше величины $A = 1$ м, которая задает максимальное отклонение оси трубопровода от прямой линии. Оценка по формуле (19) показывает, что в таком случае ошибка в определении напряжений примерно будет $\Delta\sigma_e = 160$ МПа.



Рис. 4. Напряжения в трубопроводе, геометрия которого замерена со случайной погрешностью, распределенной по нормальному закону.

Проведем расчет напряженного состояния трубопровода с использованием разработанной численной процедуры, полагая, что его нить обязательно должна проходить через каждую из измеренных точек. Напряжения, рассчитанные для такого случая, представлены на рис. 4. Значения стандарта отклонения напряжений от теоретических (29) составляют 175 МПа, что неплохо согласуется с прогнозным $\Delta\sigma_e$. Полученные результаты свидетельствуют о том, что неучет погрешности геодезического поршня при расчете напряженного состояния трубопровода приводит к значительному их искажению. Предположим, что необходимо сгладить ошибки геодезического поршня с точностью до $[\sigma]_T = 0,5$ МПа. Тогда согласно выражению (14в) значение

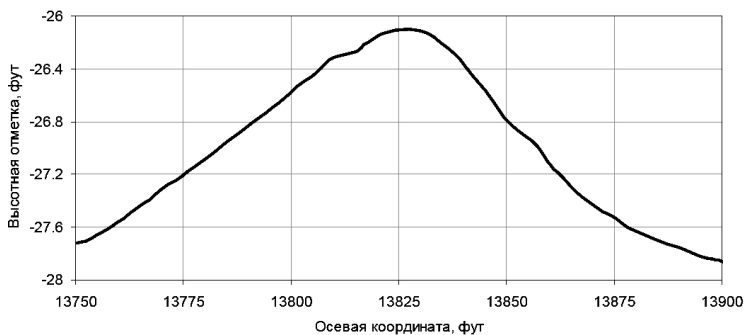
безразмерной податливости будет $\mu = 4,25$. Это значение используем для расчета напряженного состояния трубопровода. В результате получим напряжения, распределение которых представлено на рис. 4. Видно, что значения максимальных напряжений в точках $x = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ близки к теоретическим (135 МПа), и стандарт отклонения напряжений от теоретических составляет $[\sigma]_p = 1,77$ МПа. Расхождение между полученным стандартом отклонения и изначально заданным обусловлено тем, что вместе со сглаживанием погрешностей геодезического прибора “теряется” реальное напряженное состояние трубопровода. Максимальная величина “потерь” может быть оценена величиной $k^4/4$ (166). В нашем примере имеем $k^4/4 = 0,05$. Это означает, что максимальная потеря реальных напряжений может составлять $0,05 \cdot 135 \text{ МПа} = 6,75 \text{ МПа}$. Следовательно, полученное значение $[\sigma]_p = 1,77$ МПа укладывается в эти рамки.

Другим критерием корректности проведенных расчетов могут служить стандарт отклонения полученных перемещений от реальных $\rho_p = 0,007$ м и стандарт отклонения напряжений $[\sigma]_T^p = 0,7$ МПа, полученный по формуле (14в). Видно, что ρ_p и $[\sigma]_T^p$ хорошо согласуются с начальными $\rho = 0,005$ м и $[\sigma]_T = 0,5$ МПа.

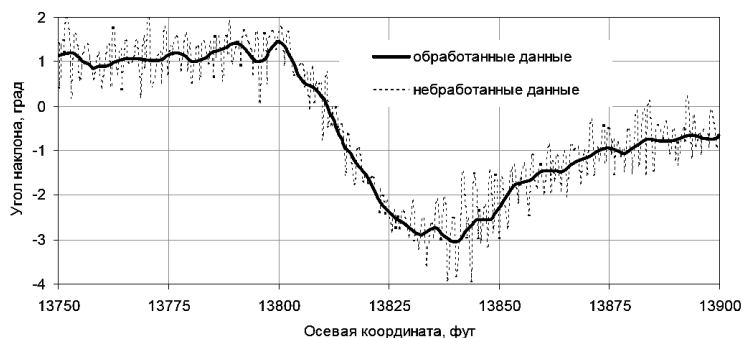
Однако на практике реальная (правильная) геометрия трубопровода неизвестна. В этом случае критерием корректности может служить величина $\Delta\rho$, которая является стандартом отклонения рассчитанных перемещений от заданных ошибочных. Правильность такого критерия подтверждается тем, что в нашем примере имеем $\Delta\rho \approx 0,005$ м, что хорошо согласуется с величинами ρ и ρ_p .

4.3. Определение характеристик линии произвольной геометрии. Корректность расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) трубопровода по результатам дискретных замеров точек его профиля, выполненных с использованием предложенной численной процедуры, проверяли путем сравнения с результатами, полученными на программном комплексе “PIPLIN” [4]. В работе [4] решается задача восстановления НДС трубопровода по замеренным дискретным точкам с использованием разложения Фурье с большим количеством членов. Рис. 5,а иллюстрирует пример профиля трубопровода, построенного по измерениям прибора без обработки данных. На рис. 5,б показаны значения углов, полученные по этим данным в результате численного дифференцирования. Применив разложение в ряд Фурье, в [4] получили более гладкую кривую углов (гладкая линия). Аналогично восстанавливаются кривизна и деформация трубопровода (рис. 5,в). С помощью разработанной численной процедуры были выполнены аналогичные расчеты по заданным дискретным замерам профиля (рис. 5,а). Результаты такого моделирования представлены на рис. 6. Видно, что они довольно неплохо согласуются между собой, однако кривая получена из физических соображений.

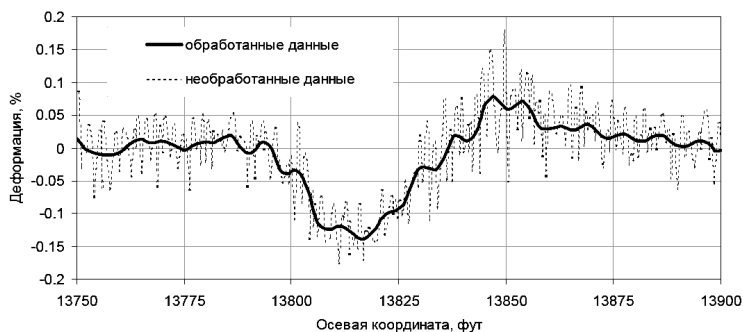
4.4. Расчет напряженного состояния газопровода “Уренгой–Помары–Ужгород”. С использованием разработанной численной процедуры выполнен расчет НДС газопровода на участке 25 км после выхода с КС-36–Ильинцы. Геометрические параметры газопровода следующие: диаметр 1420 мм; толщина стенки трубы 15,7 мм. Измерения оси трубопровода проводили с помо-



a



б



в

Рис. 5. Восстановление кривизны трубопровода по реальным данным замеров его профиля: *a* – профиль трубопровода; *б* – угол наклона трубопровода; *в* – деформация.

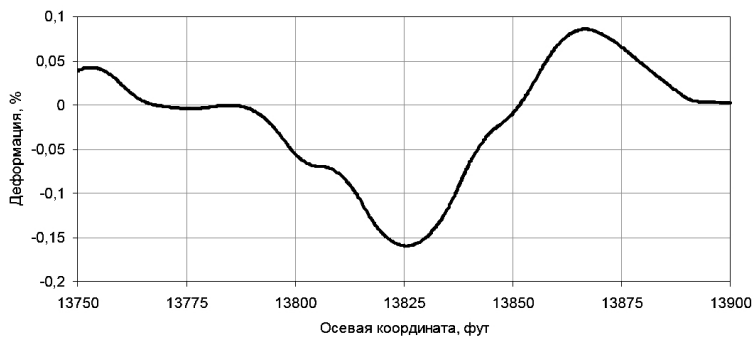


Рис. 6. Результаты расчета задачи [4] с использованием разработанной численной процедуры.

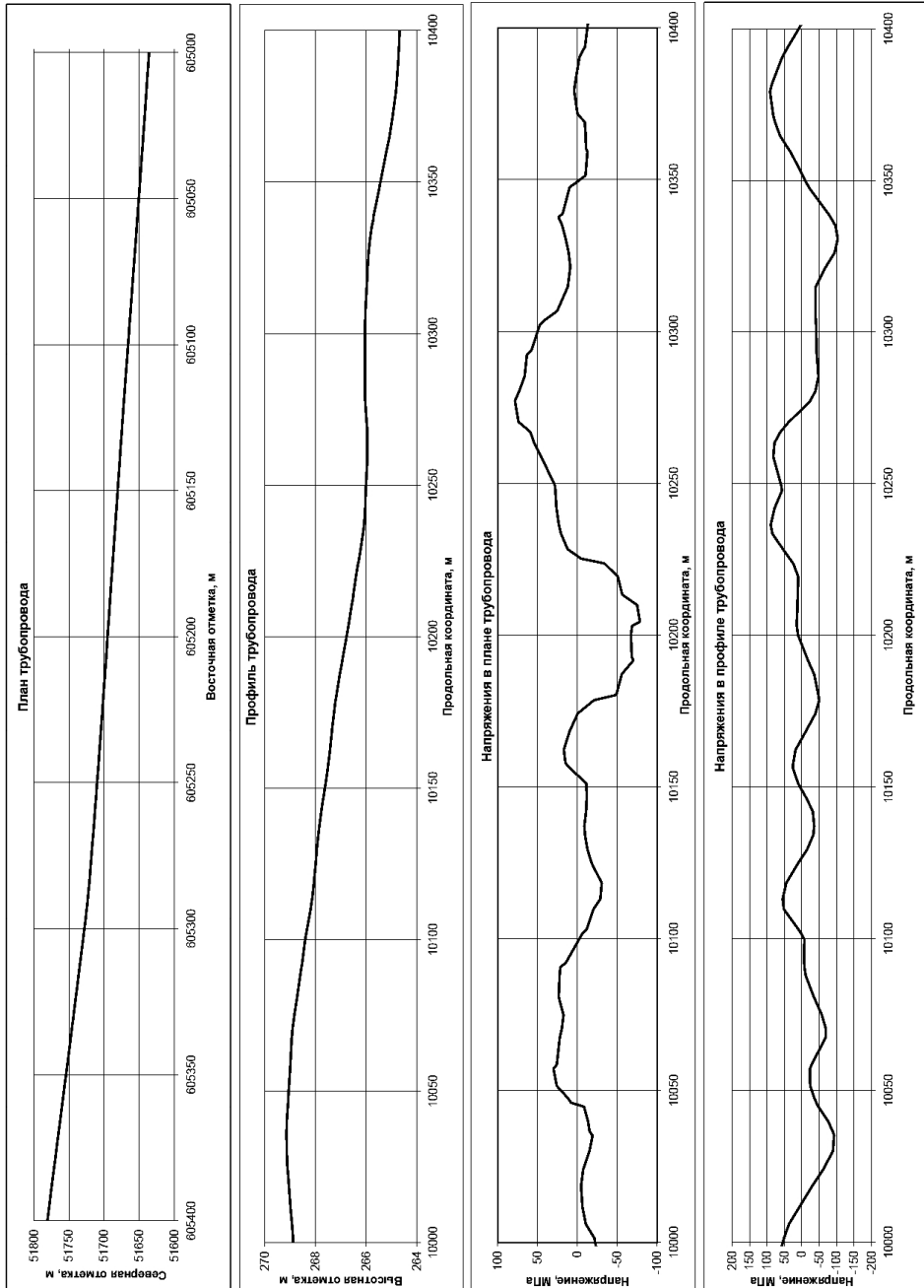


Рис. 7. Напряжения в газопроводе по результатам дискретных измерений положения точек его осевой линии.

щью внутритрубного снаряда с погрешностью, распределенной по нормальному закону со стандартом $\rho = 0,005$ м. Ошибка в расчете напряжений согласно оценке по формуле (32) может составить $\Delta\sigma_e = 160$ МПа, что подтверждает необходимость выполнения расчета по разработанной численной процедуре. Расчет выполнялся с точностью до 1 МПа, что соответствует значению безразмерной податливости $\mu = 3,23$. На рис. 7 в качестве примера представлены зависимости напряжений в профиле и в плане газопровода от кривизны, а также профиль и план участка длиной 400 м.

Результаты расчета свидетельствуют, что разработанная компьютерная программа довольно точно определяет напряженное состояние трубы. Так, для прямолинейных участков газопровода номинальный уровень напряжений составляет 30...40 МПа. В целом газопровод является довольно криволинейным и нагруженным (в отдельных случаях значения напряжений превышают 200 МПа).



Рис. 8. Разность высотных отметок по результатам двух проходов геодезического поршня.

4.5. Расчет изменения напряженного состояния газопровода “Уренгой–Помары–Ужгород” по результатам двух измерений положения точек его осевой линии. С помощью разработанной численной процедуры проведен расчет изменения напряженного состояния газопровода “Уренгой–Помары–Ужгород” по результатам двух проходов геодезического поршня, выполненных в октябре 2004 г. и в августе 2007 г. На рис. 8 представлена разность высотных отметок газопровода по данным двух проходов для участка длиной 304 м. Геометрические параметры газопровода следующие: диаметр 1420 мм; толщина стенки 15,7 мм. Стандарт распределения погрешности геодезического поршня для одного прохода составляет $\rho_0 = 0,005$ м. При анализе напряженного состояния по разности двух проходов имеем дело с суммой вероятностных величин погрешностей каждого из проходов. Поэтому стандарт распределения погрешностей разности высотных отметок газопровода будет $\rho = \sqrt{2}\rho_0 = 0,007$ м. Результаты расчета изменения напряженного состояния газопровода по разности высотных отметок представлены на рис. 9. При этом принимали значение податливости $C = 10^{-6}$ м/Н. С использованием алгоритма, предложенного в п. 2.2, несложно получить, что максимально допустимое значение стандарта отклонения напряжений $[\sigma] \approx 1,8$ МПа. Следовательно, изменение напряженного состояния, составляющее 20...30 МПа (рис. 9), не является случайной величиной, связанной с погрешностью геодезического поршня, а реально существует в газопроводе и может быть

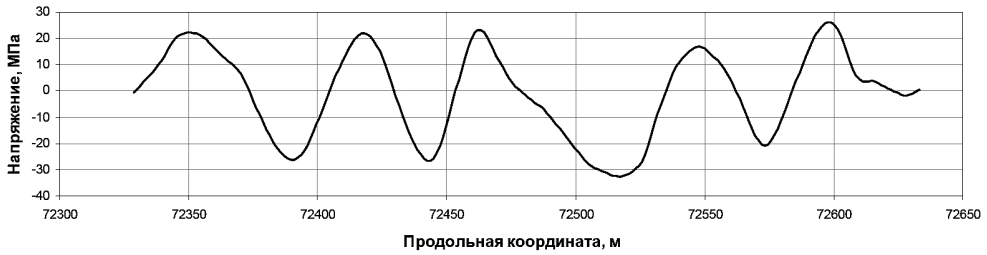


Рис. 9. Изменение напряженного состояния газопровода в зависимости от двух проходов геодезического поршня.

обусловлено несколькими факторами: разное время года, когда выполнялись проходы геодезического поршня; дополнительный вес поршня, который составляет около 7 т; угловая и осевая несоосности сварных соединений трубопровода.

Заключение. Разработана эффективная численная процедура для расчета напряженного состояния трубопровода по результатам дискретных замеров точек его осевой линии. Процедура рассматривает каждую измеренную точку трубопровода как податливую опору, базируется на методе начальных параметров и использует понятие “угла несоответствия” между его соседними измеренными участками. Кроме того, с использованием методов теории вероятностей проведен анализ, что позволяет оценить возможность проведения восстановления геометрии трубопровода по полученным данным измерений с погрешностью, рассчитать необходимую податливость опор для осуществления процедуры восстановления, а также оценить точность и корректность конечной информации о линии трубопровода.

Проверку расчетного алгоритма осуществляли с помощью известных численных и теоретических решений: восстановление геометрии прямолинейного трубопровода, положение осевой линии которого измерено с некоторой погрешностью; восстановление положения точек криволинейного трубопровода с реальной геометрией в виде косинусоиды; восстановление положения трубопровода произвольной геометрии. Результаты тестирования показали точность и эффективность разработанной численной процедуры.

Резюме

Розв’язується задача відновлення положення неперервної просторової лінії трубопроводу за дискретними точками, вимірними з певною похибкою. Для розв’язку задачі запропоновано безітераційний чисельний алгоритм, згідно з яким кожна виміряна точка трубопроводу розглядається як піддатлива опора. Алгоритм ґрунтується на методі початкових параметрів і враховує поняття “кута несумісності” між двома сусідніми вимірними ділянками осі трубопроводу. Із використанням методів теорії ймовірностей проведено аналіз, який дозволяє оцінити точність відновленого положення трубопроводу і отриманих значень напружень. Правильність розрахунків, виконаних за допомогою розробленого алгоритму, перевіряли шляхом порівняння з результатами, отриманими аналітичними методами.

1. *Dima M.* Analytical and numerical flash-algorithms for track fits // *J. Phys. G27.* – 2001. – P. 1481 – 1492.
2. *Christopher J. A., Swanson R., and Baldwin T. O.* Algorithm for finding the axis of a helix: fast rotational and parametric least-squares methods // *Comput. Chem.* – 1996. – **20.** – P. 339 – 345.
3. *Clarke A. and Eberhardt C.* The representation of reinforcing fibres in composites as 3D space curves // *Compos. Sci. Technol.* – 1999. – **59.** – P. 1227 – 1237.
4. *Hart D., Zulfiqar N., Moore H., and Swank R.* “Digital pigging” as a basis for improved pipeline structural integrity evaluations // *Proc. of IPC 2006 Int. Pipeline Conf. (Sept. 25–29, 2006, Calgary).* – 2006.
5. *Aue H., Paeper S., Brown B., et al.* High-quality geometry module data for pipeline strain analyses // *Pigging Products Services Association. – PPSA Seminar Paper.* – 2008.
6. *Chyz J. A. and Adams J. R.* Computation of pipeline-bending strains based on Geopig measurements // *Pipeline Pigging and Integrity Monitoring Conference (February, 14–17, 1994, Houston).*
7. *Wagner P. H., Luo X., and Stelson K. A.* Smoothing curvature and torsion with spring splines // *Computer-Aided Design.* – 1995. – **27,** No. 8. – P. 615 – 626.
8. *Hosaka M.* Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM. – New York: Springer-Verlag Inc., 1992. – 350 p.
9. *Писаренко Г. С., Азарев В. А., Квитка А. Л. и др.* Сопротивление материалов. 4 изд. – Киев: Вища шк., 1979. – 696 с.
10. *Оруняк И. В., Богдан А. В., and Vasylyuk V. M.* Simulation of the process of drawing a pipe through the pipeline with a larger diameter // *Proc. of IPC 2006 Int. Pipeline Conf. (Sept. 25–29, 2006, Calgary).* – 2006. – P. 931 – 942.
11. *Орыняк И. В., Богдан А. В.* Проблема больших перемещений подземных трубопроводов. Сообщ. 1. Разработка численной процедуры // *Пробл. прочности.* – 2007. – № 3. – С. 51 – 74.
12. *Оруняк И. В. and Yakovleva Ye. S.* Application of the crack compliance method to long axial cracks in pipes with allowance for geometrical nonlinearity and shape imperfections (dents) // *Eng. Fract. Mech.* – 2008. – **75,** No. 14. – P. 4012 – 4026.
13. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. – 224 с.
14. *Ugural A. C. and Fenster S. K.* Advanced Strength and Applied Elasticity. – Elsevier, 1987. – 471 p.
15. *Орыняк И. В., Радченко С. А., Батура А. С.* Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщ. 1. Анализ колебаний пространственной стержневой системы // *Пробл. прочности.* – 2007. – № 1. – С. 79 – 93.

16. *Перельмутер А. В., Сливкер В. И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Сталь, 2002. – 600 с.
17. *Айнбиндер А. Б., Камерштейн А. Г.* Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. – М.: Недра, 1982. – 341 с.
18. *Орыняк И. В., Радченко С. А.* Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 3. Расчет перемещений осигиба методом начальных параметров // Пробл. прочности. – 2004. – № 5. – С. 23 – 35.

Поступила 07. 07. 2010