УДК 517.5

О. В. Котова, Р. М. Тригуб

Аппроксимативные свойства методов суммирования интегралов Фурье

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Определены точные порядки приближения индивидуальных функций $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ классическими методами суммирования интегралов Фурье: Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса и Марцинкевича–Рисса.

2π–периодические функции приближают на периоде $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ тригонометрическими полиномами, которые являются обычно линейными средними рядов Фурье. В случае непериодических функций на $\mathbb{R}$ С. Н. Бернштейн предложил вместо полиномов использовать целые функции экспоненциального типа не выше σ (Ц. Ф. Э. Т. $\leqslant \sigma$) при $\sigma \to \infty$.

Давно известны прямые и обратные теоремы для таких приближений и их применение к теоремам вложения (см. [1] и, особенно, [2]). Периодические функции — это частный случай.

Еще в начале 1960-х гг. Р. М. Тригуб нашел точные порядки приближения индивидуальных функций, а не классов, классическими методами суммирования рядов Фурье [3, 4]. При этом, особенно в случае функций любого числа переменных [5] (см. также [6]), пришлось ввести специальные модули гладкости и K-функционалы. В настоящее время такие результаты называют “strong converse inequality” (см. [7] и приведенный там список литературы).

В настоящей работе некоторые из теорем монографии [6] для периодических функций обобщены на любые функции из L_p, $p \geqslant 1$, на евклидовом пространстве. Вместо рядов Фурье — интегралы Фурье. Для определения точного порядка приближения имеются два метода (см. [6, с. 362]). Первый из них основан на экстремальных свойствах полиномов (Ц. Ф. Э. Т. $\leqslant \sigma$), а второй — на принципе сравнения мультипликаторов Фурье [4, 8].

Отметим еще, что иногда даже точные неравенства для класса функций можно получить предельным переходом из периодического случая (см. [6, 5.5.9–5.5.10]).

Преобразование Фурье функции $g \in L_1(\mathbb{R})$ равно для $y \in \mathbb{R}$

$$\widehat{g}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixy} dx.$$

Для мультипликаторов Фурье (см. [9]) важно определить принадлежность функции — множителя пространству

$$A(\mathbb{R}) = \left\{ f \colon f(x) = \widehat{g}(x), \|f\|_A = \|g\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bigl|g(x)\bigr| dx < \infty \right\}.$$

Свойства этой винеровской банаховой алгебры приведены в [10].

Через $W_{p,\sigma} = W_{p,\sigma}(\mathbb{R})(W_{\infty,\sigma} = B_\sigma)$ обозначим множество Ц. Ф. Э. Т. $\leqslant \sigma$, сужение которых на $\mathbb{R}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. По теореме Винера–Пэли преобразование Фурье функций из $W_{2,\sigma}$ равно нулю почти всюду вне $[-\sigma, \sigma]$ на $\mathbb{R}$ (см. [11]).

И наконец,

$$\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h), \qquad \dot{\Delta}_h f(x) = f(x+h) - f(x-h),$$

а модуль гладкости в L_p порядка r и шага $h > 0$

$$\omega_r(f,h)_p = \sup_{0<\delta\leqslant h} \|\Delta_\delta^r f(\cdot)\|_p.$$

$c(\ldots)$ — положительная величина, зависящая только от аргументов, стоящих в скобках.

Теперь сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть G_σ — линейный непрерывный оператор $L_p(\mathbb{R}) \to W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$. Для того чтобы при некотором $r \in \mathbb{N}$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$ было*

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \leqslant c_1(r)\omega_r\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

необходимо и достаточно

$$\sup_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p\to L_p} < \infty, \qquad \|g - G_\sigma(g)\|_p \leqslant c_2(r)\frac{1}{\sigma^r}\|g^{(r)}\|_p$$

для любой функции $g \in W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$.

Теорема 2. *Пусть G_σ — линейный непрерывный оператор $L_p(\mathbb{R}) \to W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$. Для того чтобы при некотором $r \in \mathbb{N}$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$ было*

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \geqslant c_3(r)\omega_r\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

необходимо, а если $\sup\limits_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p\to L_p} < \infty$, то и достаточно

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \geqslant c_4(r)\frac{1}{\sigma^r}\|g^{(r)}\|_p$$

для любой функции $g \in W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$.

Пример 1. При $p \in [1, 2]$ положим

$$S_\sigma(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(y)e^{ixy}dy,$$

а

$$G_\sigma(f) = S_\sigma(f) + \mu\Delta^r_{\frac{\alpha}{\sigma}} S_\sigma(f).$$

Тогда при $\alpha \in (0, \pi)$ и $\mu \neq 0$ для всех $g \in W_{p,\sigma}$ и $\sigma > 0$

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \asymp \frac{1}{\sigma^r}\|g^{(r)}\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от r, α и μ).

При $p \in (1,2]$, $\alpha \in (0,\pi)$ и $\mu \neq 0$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \asymp \omega_r\left(f; \frac{\alpha}{\sigma}\right)_p,$$

а при $p = 1$ оценка приближения сверху и снизу не имеет место уже при $\mu = 1$ и любом α (см. также [6, 8.5.1]).

Теорема 3. *Для того чтобы для данной функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ при некотором $r \in \mathbb{N}$ и $\sigma \to \infty$*

$$A_\sigma(f)_p = \inf_{g \in W_{p,\sigma}} \|f - g\|_p \asymp \omega_r\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

необходимо и достаточно, чтобы при $h \to +0$

$$\omega_r(f,h)_p = O(\omega_{r+1}(f,h)_p).$$

Для периодических функций эта теорема доказана, по сути, в [12].

Рассмотрим теперь удобный для применения принципа сравнения линеаризованный модуль гладкости, введенный для периодических функций еще в [4] (см. также [6, с. 362]).

Для $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $h > 0$

$$\widetilde{\omega}_r(f,h)_p = \left\| \frac{1}{h} \int_0^h \Delta_\delta^r f(\cdot)\, d\delta \right\|_p$$

(точная верхняя грань по $\delta \in (0,h]$ заменена интегральным средним).

Теорема 4. *Для любого $r \in \mathbb{N}$ и $p \geqslant 1$ существует такое положительное число $c(r)$, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $h \in (0,1]$*

$$c(r)\omega_r(f,h)_p \leqslant \widetilde{\omega}_r(f,h)_p \leqslant \omega_r(f,h)_p.$$

Переходим к приближению функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ линейными методами суммирования интегралов Фурье.

Когда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, при $\varepsilon \to +0$

$$\Phi_\varepsilon(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \varepsilon t)\widehat{\varphi}(t)\, dt \to f(x)?$$

Предполагаем здесь и далее, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi \in C \bigcap L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\Phi_\varepsilon \in$ $\in C_0(\mathbb{R}) \bigcap L_p(\mathbb{R})$, а если $\operatorname{supp} \varphi \subset [-1,1]$, то $\Phi_\varepsilon \in W_{p,\frac{1}{\varepsilon}}(\mathbb{R})$.

При $f \in L_1(\mathbb{R})$

$$\Phi_\varepsilon(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon t)\widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

Сравним аппроксимативные свойства разных методов суммирования.

Теорема 5. *Если после устранения особенностей по непрерывности*

$$\frac{1-\varphi}{1-\psi}-1\in A(\mathbb{R}),$$

то при любом $p\geqslant 1$ *для любой функции* $f\in L_p(\mathbb{R})$ *при* $\varepsilon\in(0,1]$

$$\|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p\leqslant\left(1+\left\|\frac{\psi-\varphi}{1-\varphi}\right\|_A\right)\|f-\Psi_\varepsilon(f)\|_p.$$

Переходим к определению скорости сходимости через модули гладкости и K-функционалы (иногда специальные).

Теорема 6 (ускорение сходимости). *Пусть дополнительно* $\operatorname{supp}\varphi\subset[-1,1]$.

Если для всех $f\in L_p(\mathbb{R})$, $p\geqslant 1$, *и* $\varepsilon\in(0,1]$

$$\|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p\leqslant K_1\omega_r(f;\varepsilon)_p,$$

то при любом $m\in\mathbb{N}$ *для всех* $f\in L_p(\mathbb{R})$ *и* $\varepsilon\in(0,1]$

$$\|f-\Psi_\varepsilon(f)\|_p\leqslant K_1^m\omega_{rm}(f;\varepsilon)_p,$$

где $\psi=1-(1-\varphi)^m$.

Пример 2 (стандартный пример для сравнения). Определим φ при четном и нечетном r, соответственно:

$$\varphi(x)=(1-|x|^r)_+,\qquad \varphi(x)=(1-|x|^{r+1})_++i(1-|x|)_+|x|^r\operatorname{sign}x.$$

Тогда для любой функции $f\in L_p(\mathbb{R})$ и $\varepsilon\in(0,1]$

$$\|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p\asymp\omega_r(f;\varepsilon)_p.$$

Определим теперь точный порядок приближения классическими методами суммирования Рисса–Марцинкевича, Гаусса–Вейерштрасса и Бохнера–Рисса.

Но сначала рассмотрим итегральный оператор $L_p\to W_{p,\sigma}$.

$$B_{r,\varepsilon}(f,x)=\gamma\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-\Delta_{\varepsilon t}^r f(x))\left(\frac{\sin\dfrac{t}{r+2}}{t}\right)^{r+2}dt,\qquad B_{r,\varepsilon}(1,x)\equiv1.$$

В [13] введены более общие средние, а общая оценка приближения средними $B_{r,\varepsilon}$ через ω_r доказана в [14] (см. также [1]).

Особенность $B_{r,\varepsilon}$, как оказалось, в том, что $\varphi=\varphi_\varepsilon$ (зависит от ε) и $\varphi_\varepsilon(x)=1$ не только при $x=0$. Поэтому в [15] для определения точного порядка приближения введен специальный модуль гладкости, так как ω_r не подходит.

Положим при $t\neq2m\pi$ $(m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

$$\Delta_{h,t}f(x)=\int_0^1\left[f(x)-\frac{it}{e^{it}-1}f(x+hu)\right]du.$$

Теорема 7. *Пусть* $r \geqslant 6$, $2 \leqslant s \leqslant r-2$ *и* $s_1 = 2[(s+1)/2]$ *(целая часть), а* $\{x_{k,\varepsilon}\}_{k=1}^{q}$ *— все положительные корни уравнения* $\varphi_\varepsilon(x) - 1 = 0$. *Тогда существует* $\delta(r) > 0$ *такое, что при* $\varepsilon < \delta(r)$ *число* q *постоянное,* $q \leqslant s_1$ *и для всех* $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$,

$$\|f - B_{r,\varepsilon}(f)\|_p \asymp \|\Delta_{\varepsilon,0}^{s_1} \circ \prod_{k=1}^{q} \Delta_{\varepsilon,x_{k,\varepsilon}} \circ \Delta_{\varepsilon,-x_{k,\varepsilon}} f(\cdot)\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f *и* ε*).*

При доказательстве теорем 4–7, как и следующих, используются принцип сравнения и некоторые леммы из доказательства аналогичных теорем для периодических функций.

Хорошо известно, что принцип сравнения мультипликаторов применим и в случае функций d переменных ($d \geqslant 2$).

В пространстве $\mathbb{R}^d$ $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k y_k$, $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Рассмотрим следующие средние двойных интегралов Фурье ($\alpha > 0$):

$$M_{\varepsilon,\alpha}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \qquad \varphi(x_1, x_2) = (1 - \max\{|x_1|, |x_2|\})_+^\alpha.$$

При $\alpha = 1$ этот метод суммирования двойных рядов Фурье изучал Марцинкевич (это средние арифметические квадратных частных сумм), а точный порядок приближения найден О. И. Кузнецовой (см. [6, 8.5.13]).

Теорема 8. *При любом* $\alpha > 0$ *для любой* $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p \geqslant 1$, $\varepsilon \in (0,1]$

$$\|f - M_{\varepsilon,\alpha}(f)\|_p \asymp \left\| \int_1^\infty \frac{1}{u^2} (\dot{\Delta}^2_{\varepsilon(e_1^\circ + e_2^\circ)} + \dot{\Delta}^2_{\varepsilon(e_1^\circ - e_2^\circ)}) f(\cdot)\, du \right\|_p.$$

Здесь $\dot{\Delta}_h f(x) = f(x+h) - f(x-h)$, e_1° *и* e_2° *— орты осей в* $\mathbb{R}^2$.

Теперь рассмотрим метод типа Гаусса–Вейерштрасса ($d \geqslant 1$, $\alpha > 0$)

$$G_{\varepsilon,\alpha}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \qquad \varphi(x) = e^{-|x|^\alpha}.$$

Вопросы сходимости при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ изучены в [9, гл. I].

Найдем точный порядок приближения.

Теорема 9. *При любом* $\alpha > 0$ *и натуральном* $r > (d + \alpha - 1)/2$ *для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *и* $\varepsilon \in (0,1]$

$$\|f - G_{\varepsilon,\alpha}(f)\|_p \asymp \left\| \int\limits_{|u| \geqslant 1} \frac{1}{|u|^{r+\alpha}} \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \cdot u} f(\cdot)\, du \right\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от α *и* r*).*

И наконец, рассмотрим в том же смысле метод Бохнера–Рисса ($r \in \mathbb{N}$, $\delta > (d-1)/2$, $\varepsilon \in (0,1]$)

$$R_{\varepsilon,r,\delta}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \qquad \varphi(x) = (1 - |x|^{2r})_+^\delta.$$

Теорема 10. *1. При $p \in (1, +\infty)$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и $\varepsilon \in (0, 1]$*

$$\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\|_p \asymp \sup_{|u|\leqslant 1} \|\dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot)\|_p.$$

2. Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ или $C(\mathbb{R}^d)$ (Δ — оператор Лапласа)

$$\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\| \asymp \left\| \int\limits_{|u|\leqslant 1} \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot)\, du \right\| \asymp \inf_{g\in C^{2r}} (\|f - g\| + \varepsilon^{2r}\|\Delta^r g\|)$$

(двусторонние неравенства с положительными константами, не зависящими от ε и f).

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – Москва: Физматгиз, 1960. – 624 с.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1977. – 456 с.
3. *Тригуб Р. М.* Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 3. – С. 615–630.
4. *Тригуб Р. М.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье // Там же. – 1968. – **32**, № 1. – С. 24–49.
5. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Там же. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378–1409.
6. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Dordrecht: Kluwer, 2004. – 585 p.
7. *Draganov B. R.* Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators // J. Approxim. Theory. – 2010. – **162**. – P. 952–979.
8. *Shapiro H. S.* Some Tauberian theorem with applications to approximation theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, No 3. – P. 500–504.
9. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – Москва: Мир, 1974. – 332 с.
10. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview // Analysis and Math. Physics. – 2012. – **2**, No 1. – P. 1–68.
11. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions // Transl. Math. Monogr. Vol. 150. – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1996. – 248 p.
12. *Rathore R. K. S.* The problem of A. F. Timan on the precise order of decrease of the best approximation // J. Approxim. Theory. – 1994. – **77**. – P. 153–166.
13. *Бернштейн С. Н.* О свойствах однородных функциональных классов // Докл. АН СССР. – 1947. – **57**, № 2. – С. 111–114.
14. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219–242.
15. *Тригуб Р. М.* Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина // Матем. сб. – 2013. – **204**, № 12. – С. 127–146.

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка
Донецкий национальный университет
Сумской государственный университет

Поступило в редакцию 16.09.2014

О. В. Котова, Р. М. Тригуб

Апроксимативні властивості методів підсумовування інтегралів Фур'є

Визначено точні порядки наближення індивідуальних функцій $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ класичними методами підсумовування інтегралів Фур'є: Гаусса–Вейєрштрасса, Бохнера–Рісса та Марцинкевича–Рісса.

O. V. Kotova, R. M. Trigub

Approximate properties of methods of summability of Fourier integrals

The exact orders of approximation of individual functions $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ by the classical methods of summability of Fourier integrals (Gauss–Weierstrass, Bochner–Riesz, Marcinkiewicz–Riesz) are determined.