

Расчет деформирования тканей типа саржи 2/2

Н. К. Кучер, Е. Л. Данильчук

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Исследуются процессы двухосного растяжения тканей типа саржи 2/2. Расчеты выполнены на основе теории двухосного деформирования тканых материалов с учетом их геометрии и механических характеристик нитей основы и утка. Предложены численные процедуры решения разрешающей системы уравнений, которая учитывает сжимаемость нитей в трансверсальных направлениях. Эффективность численных алгоритмов показана при сравнении прогнозируемых деформаций с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: двухосное растяжение, численное моделирование, плетеная ткань, саржа 2/2, сжимаемость нитей.

Введение. Тканый материал представляет собой систему переплетающихся нитей, расположенных под определенным углом (чаще всего 90°). Совокупность нитей, расположенных вдоль ткани, называют основой, поперек ткани – утком.

Тип тканой структуры определяется порядком взаимного перекрытия продольными нитями основы поперечных нитей утка. Это влияет на образование ткани с характерной для данного переплетения структурой, внешним видом и механическими свойствами. Повторяющийся элемент ткани называется раппортом. Раппорт саржевого переплетения обозначают дробью, в которой над чертой приведено количество перекрытий нитей основы, под чертой – нитей утка. В настоящей работе исследуются процессы деформирования тканей типа саржи 2/2 (рис. 1).

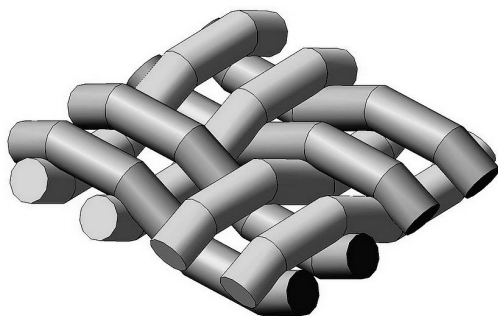


Рис. 1. Схема представления ткани саржевой структуры 2/2.

Широкое использование волокнистых материалов, изготовленных методами текстильной промышленности, во многих областях народного хозяйства обусловлено в первую очередь их уникальными физико-механическими свойствами.

Плетеные ткани обладают достаточной стабильностью размеров в направлениях укладки волокон и низкой жесткостью при сдвиге, что обеспе-

чивает им хорошую способность к облеганию и формообразованию. Это свойство, в частности, особенно важно при создании пространственных структур, когда ткани используются в качестве армирующего материала. К недостаткам следует отнести снижение эффективности реализации прочностных свойств волокон в ткани, что вызвано непрямолинейностью нитей основы и утка, обусловленной процессом ткачества. Однако этот недостаток можно минимизировать, применяя специальные высокомолекулярные материалы.

Несмотря на продолжительную историю использования тканей, современное применение их в качестве армирующей фазы композитных материалов предъявляет все большие требования к изучению процессов деформирования и разрушения тканых структур. При этом возникает необходимость в разработке моделей деформирования, которые основываются на геометрии строения тканого материала и учитывают особенности механического поведения используемых нитей.

Исследованием структуры комплексных нитей и разработкой методов расчета их предельных параметров ученые занимаются уже много лет. Результаты первых исследований были опубликованы в конце XIX и начале XX столетий. Значительный вклад в решение этой проблемы внесли М. Н. Белицин, Г. Н. Кукин, К. Е. Перепелкин, А. V. Matukonis, J. W. S. Hearle, W. E. Morton, M. Platt и др. [1, 2]. Благодаря усилиям многих исследователей накоплена большая база экспериментальных данных по физико-механическим свойствам и диаграммам растяжения различных волокон и нитей.

Однако большинство соотношений для определения разрушающих усилий и предельных деформаций нитей было получено расчетно-эмпирическим путем или выведено теоретически на основе ряда принятых гипотез. Влияние некоторых факторов на их предельное состояние можно было определить лишь на основе экспериментов, методики проведения которых часто не приводились. Кроме того, для корреляции расчетных и фактических величин вводились поправочные коэффициенты. Поэтому практическое использование этих соотношений возможно лишь для ограниченного класса материалов.

Для изучения связи между напряжениями и деформациями волокнистых материалов широкое распространение получили механические модели, которые предлагаются в виде разнообразных комбинаций идеально упругих элементов, элементов вязкого течения и сухого трения. В частности, для описания процессов длительного деформирования полимерных нитей наиболее качественные результаты дает применение соотношений нелинейной теории вязкоупругости [3–5].

Двухмерные плетеные ткани по сравнению с однонаправленными волокнистыми материалами являются более сложными для изучения и прогнозирования их механического поведения. Это, прежде всего, связано с существенно нелинейной реакцией тканых материалов на действие приложенной нагрузки. Кроме того, при разработке моделей необходимо учитывать как постоянное преобразование структуры тканей в процессе деформирования, так и изменение геометрии нитей, которые формируют ткань.

По-видимому, первым, кто начал разрабатывать модели деформирования тканых материалов, можно считать Ф. Т. Peirce [6]. Он предложил исполь-

зовать в расчетах полотняных тканей представление структуры с идеально гибкими нитями круглого поперечного сечения. Эта идея получила дальнейшее развитие в работах В. Olofsson, G. A. V. Leaf, P. Grosberg, S. Kawabata и др.

Различные модели деформирования тканей разрабатывали также J. W. S. Hearle, P. Potluri и V. S. Thammandra [7], P. Xue, X. Peng и J. Cao [8], V. Carvelli [9], P. Boisse, B. Zouari, A. Gasser [10], M. J. King, P. Jearanaisilawong, S. Socrate [11].

Значительный вклад в изучение строения тканых материалов и их механических свойств внесли исследования В. П. Склянникова, Г. Н. Кукина, А. Н. Соловьева, А. И. Коблякова, К. И. Корицкого и др. Однако их работы, цель которых, скорее, состояла в оптимизации строения и улучшении процессов производства тканых структур, а не в комплексном исследовании процессов деформирования и разрушения, в основном базировались на эмпирических подходах.

Наибольшее распространение в инженерной практике получила теория двухосного деформирования, разработанная S. Kawabata, M. Niwa и H. Kawai для тканей полотняного переплетения [12]. В ее основе лежит структурная модель [6]. При этом нити основы и утка считаются идеально гибкими и сжимаемыми прямолинейными элементами, перегибаемыми лишь в точках соприкосновения. В исходном состоянии поперечное сечение нитей круглое. В предлагаемом методе расчета учитывается сжимаемость нитей, которая обусловлена их общим взаимодействием и растягивающими усилиями.

Модель теории двухосного деформирования позволяет получить достаточно точные результаты. При этом изгибными свойствами нити, которые возникают в результате ее возможного закручивания, можно пренебречь. На основании данной модели разработаны численные алгоритмы для прогнозирования механического поведения полотняных тканей при различных видах двухосного растяжения и показана их эффективность на ряде материалов [13].

Аналогичные подходы S. Kawabata и M. Niwa использовали при построении математической модели саржевой структуры [14]. Однако сложность разрешающей системы уравнений не позволяет в этом случае получить аналитическое решение такой задачи. Для расчета деформирования тканей типа саржи предполагалось использовать графические методики по определению усилий в точках контакта нитей основы и утка.

Можно отметить также более сложные конечноэлементные модели деформирования для полотна и саржи [10, 11], в которых используются уточненное представление геометрии структуры и распределение усилий в точках контакта. Однако применение этих моделей требует проведения ряда базовых опытов для конкретизации уравнений состояния, и в их разрешающие соотношения входит значительное количество параметров, подлежащих определению.

Теория двухосного растяжения саржевых тканей. Для тканей типа саржи $2/2$ характерно несимметричное изменение направления нитей основы и утка в зоне изгиба. Ввиду такой асимметрии деформационное поведение саржевых тканей является более сложным, чем полотняных.

В рамках рассматриваемой модели теории двухосного растяжения саржевых тканей [14] предполагается, что нити – идеально гибкие и упругие. Ткань типа саржи моделируется прямолинейными элементами, которые перегибаются в точках контакта. Однако при этом структурная модель не является симметричной. Она условно разделена на две части с наклонным и горизонтальным участками, для каждого из которых отдельно рассчитываются соответствующие структурные параметры. Система координат $X_1 X_2 X_3$ при этом привязывается к начальному положению элементов.

На рис. 2 показано начальное (штриховая линия) и деформированное (сплошная линия) положение структурной модели саржи 2/2 на примере нити основы. Там же приведены основные структурные параметры модели и распределение сил, которые возникают при нагружении ткани.

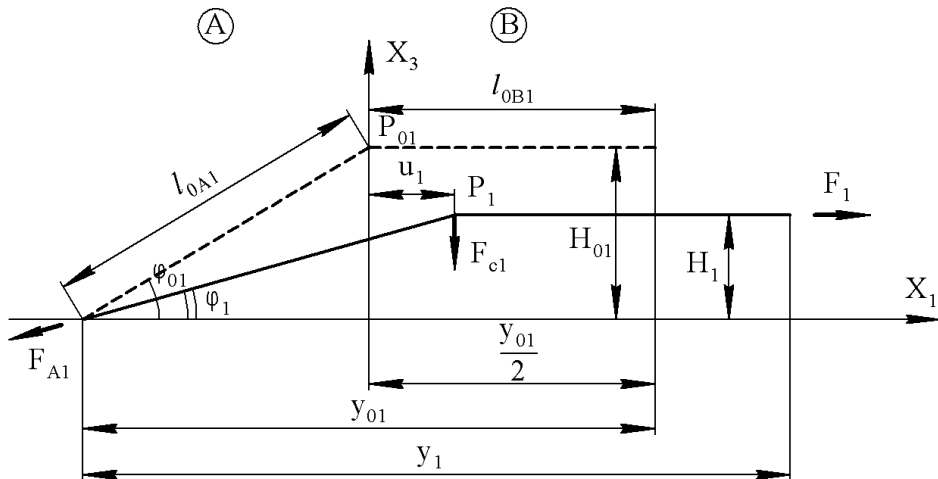


Рис. 2. Структурная модель ткани типа саржи 2/2.

В соответствии с избранной моделью ткани саржевого переплетения вводятся следующие структурные параметры, необходимые для дальнейших расчетов.

Шаг нитей:

$$y_{01} = \frac{1}{n_{02}}, \quad y_{02} = \frac{1}{n_{01}}, \quad (1)$$

где n_{01} и n_{02} – плотность нитей основы и утка в недеформированном состоянии. Здесь и далее индекс 1 относится к нити основы, индекс 2 – к нити утка, 0 перед соответствующими индексами обозначает начальное (недеформированное) состояние.

Усадка нитей, обусловленная процессом ткачества, будет

$$S_{0i} = \frac{l_{0i} - y_{0i}}{y_{0i}}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где l_{01} , l_{02} – длины нитей основы и утка в элементах структурной модели; y_{01} , y_{02} – длины проекций этих элементов на оси X_1 и X_2 .

Угол между осью нити и нейтральной линией структуры таков:

$$\varphi_{0i} = \arccos\left(\frac{y_{0i}}{2l_{0Ai}}\right), \quad i=1, 2, \quad (3)$$

где l_{0Ai} – длина части A нити в структурном элементе (рис. 2),

$$l_{0A1} = \frac{2S_{01} + 1}{2n_{02}}; \quad l_{0A2} = \frac{2S_{02} + 1}{2n_{01}}. \quad (4)$$

Длина части B нити в структурном элементе будет (рис. 2)

$$l_{0Bi} = \frac{y_{0i}}{2}, \quad i=1, 2. \quad (5)$$

Расстояние между нейтральной линией структуры и осью нити вдоль оси X_3 определяется соотношением

$$H_{0i} = \sqrt{l_{0Ai}^2 + l_{0Bi}^2}, \quad i=1, 2. \quad (6)$$

В качестве меры деформации, как принято в теории двухосного деформирования тканей, используется кратность удлинения λ_i :

$$\lambda_i = \frac{l_i}{l_0} = 1 + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \quad (7)$$

где λ_1, λ_2 – кратность удлинения ткани в направлениях основы и утка; ε_i – соответствующие деформации для этих направлений; λ_{y1} и λ_{y2} – кратность удлинения нитей основы и утка.

Материалы для исследований. Опробование эффективности модели деформирования проводилось на основе экспериментальных данных для тканей из шерсти и углеволокна [10, 14, 15], основные структурные характеристики которых приведены в таблице.

Основные структурные характеристики исследуемых тканей саржевого переплетения

Материал	$n_{01}, \text{см}^{-1}$	$n_{02}, \text{см}^{-1}$	S_{01}	S_{02}
Шерсть	31,5	29,4	0,0910	0,1230
Углеволокно	3,5	3,5	0,0035	0,0035

В качестве входных параметров модели используются экспериментально полученные нелинейные зависимости между растягивающей силой F_y и кратностью удлинения λ_y нитей (рис. 3).

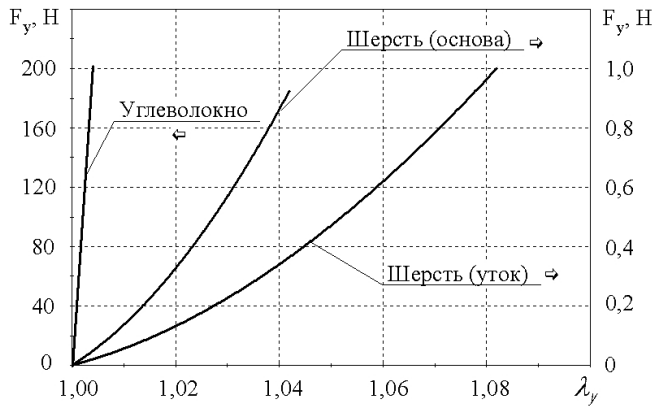


Рис. 3. Диаграммы деформирования нитей для исследуемых тканей саржевого переплетения.

Отметим, что в случае ткани из шерсти нити для испытаний использовали непосредственно из исследуемого тканого материала. Вследствие разной усадки в ткани диаграммы растяжения шерстяных нитей основы и утка различаются.

При изучении поведения тканых материалов в условиях растяжения важным фактором является реакция нитей, которые находятся в зацеплении, на действие сжимающих усилий. Известно много методов для исследования поведения нитей в трансверсальном направлении. Можно выделить метод “двух пластин” [16], когда нить подвергается сжатию двумя параллельными пластинами, и метод “канала” [17], согласно которому нить при сжатии имеет ограничение в двух поперечных направлениях.

Однако наиболее применяемым является метод огибания проволоки [15], суть которого заключается в том, что исследуемая нить огибает стальную проволоку под определенным углом наклона. Сила натяжения нити создается подвешиванием груза. Таким образом имитируется поведение нити при растяжении тканого материала. С помощью датчика, касающегося поверхности нити в точке перегибания, измеряется ее диаметр, который уменьшается с увеличением груза. Другой вариацией этого метода является использование проволоки с V-подобным изгибом.

Сравнение методов определения сжимаемости нитей в зонах контакта показывает, что получаемые результаты значительно различаются (до 10 раз). Также следует отметить разброс данных из-за нестабильного деформационного поведения нитей в точках соприкосновения. Поэтому вопрос исследования реакции нити на суммарное действие растягивающих и сжимающих усилий при переплетении в ткани остается актуальным.

В данной работе для учета сжимаемости нитей в трансверсальном направлении использовали экспоненциальные функции $\delta_D(F_c)$, описывающие уменьшение их диаметров в процессе нагружения в зависимости от величины сжимающего усилия F_c :

$$\delta_D = a(1 - e^{bF_c}), \quad (8)$$

где a и b – постоянные величины, определяемые путем аппроксимации экспериментальных результатов.

Численное моделирование процессов двухосного растяжения. Основная сложность использования данной модели состоит в определении перемещения u_i точки контакта P_i нитей основы и утка в процессе деформирования ткани (рис. 2).

Алгоритм расчета данной модели заключается в решении системы уравнений, которые связывают между собой величины перемещения точек контакта нитей и смещение оси нити к нейтральной линии структуры в процессе деформирования ткани, а также учитывают усилия в точках сцепления и соответствующие уравнения равновесия между ними.

Кроме структурных параметров, которые описывают геометрию переплетения ткани, входными величинами для данной модели есть диаграммы растяжения нитей $F_y = g_i(\lambda_y)$ и функции $\delta_D(F_c)$, определяющие их поведение в трансверсальном направлении при сжатии. Также необходимо использовать обратные функции, определяющие кратность удлинения нитей в зависимости от действующих усилий $\lambda_y = G_i(F_y)$.

Отметим, что понятие “обратная функция” справедливо только по отношению к однозначным функциям, что накладывает определенные ограничения на выбор функций g_i , описывающих диаграммы деформирования нитей.

Для численного определения перемещения u_i точки контакта нитей основы и утка необходимо решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2u_i}{y_{0i}} + G_i(F_i) \right]; \\ F_i = g_i(\lambda_{Ai}) \frac{\cos \varphi_{0i}}{\lambda_{Ai}} \left(1 + \frac{2u_i}{y_{0i}} \right), \quad i=1, 2; \\ \lambda_{Ai} = \cos \varphi_{0i} \sqrt{\left(1 + \frac{2u_i}{y_{0i}} \right)^2 + \left(\frac{2H_i}{y_{0i}} \right)^2}, \end{cases} \quad (9)$$

где λ_i – удлинение ткани в направлении основы (утка); F_i – растягивающая сила, которая действует на конце отдельной нити; λ_{Ai} – удлинение нитей основы (утка) в части A структурного элемента.

Дополняет систему соотношений (9) уравнение равновесия, которое следует из равенства сжимающих усилий F_{ci} в точке контакта:

$$g_1(\lambda_{A1}) \frac{2H_1}{y_{01}} \cos \varphi_{01} \lambda_{A2} - g_2(\lambda_{A2}) \frac{2H_2}{y_{02}} \cos \varphi_{02} \lambda_{A1} = 0. \quad (10)$$

При этом необходимо учитывать также соотношения, связывающие начальные H_{0i} и текущие H_i расстояния между нейтральными линиями структуры и осями нитей:

$$H_{01} + H_{02} = H_1 + H_2 + 0,5(\delta_{D1} + \delta_{D2}), \quad (11)$$

где δ_{Di} – уменьшение диаметра нити при деформации ткани ($i=1$ – нить основы и $i=2$ – нить утка).

Величина δ_{Di} является функцией усилия натяжения нити F_y и сжимающей силы F_c . Чтобы избежать сложностей при нахождении параметров δ_{Di} , используется экспериментальная процедура [15], называемая “методом огибания проволоки”, которая позволяет определить изменение диаметра нити для типичных текстильных материалов только от сжимающего усилия F_c . Тогда в качестве первого приближения можно считать, что

$$\delta_{D1} = \delta_{D1}(F_c), \quad \delta_{D2} = \delta_{D2}(F_c). \quad (12)$$

Такие зависимости в нашем случае достаточно хорошо аппроксимируются соотношениями (8). При этом для нитей из шерсти: $a = 0,0041$ см, $b = 28 \text{ Н}^{-1}$, для нитей из углеродного волокна: $a = 0,007$ см, $b = 3 \text{ Н}^{-1}$.

Разрешающая система модели описывается семью нелинейными уравнениями после определения величины H_2 из соотношения (11) и подстановки ее в (9) и (10). При известных параметрах кратности удлинений λ_i и H_i путем численного решения можно легко определить значения перемещений u_i . Введем обозначения:

$$1 + \frac{2u_i}{y_{0i}} = \Phi_i(\lambda_i; H_i), \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

При этом в качестве начального приближения u_i можно принять $u_i^{(0)} = 0$ или изменение искомой величины в диапазоне $0 \leq u_i \leq u_i^{\max}$, где $u_i^{\max} = l_{0Ai}(\lambda_{1,\max} - \cos \varphi_{0i})$, $\lambda_{1,\max}$ – максимальное значение кратности удлинений, определенное из диаграммы деформирования. Подставив (13) в соотношение (10), определим действующие усилия в точках контакта. Тогда уравнение для вычисления текущего значения H_1 будет

$$\Omega(\lambda_1, \lambda_2, H_1) = 0. \quad (14)$$

Таким образом, для расчета деформирования тканей саржевой структуры 2/2 предлагается следующий численный алгоритм.

1. Для заданного постоянного коэффициента соотношения деформаций $k_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$, который определяет вид двухосного деформирования тканого материала, вычисляем текущие значения параметров λ_1 и λ_2 .

2. Путем численного решения уравнения (14) определяем значение параметра H_1 . Это легко сделать, если учитывать изменение этой величины в диапазоне $0 \leq H_1 \leq H_{01}$. Искомое решение H_1 является единственным и определяется с необходимой точностью любым численным методом [18].

3. Для случая $i=1$ с использованием второго соотношения (9) вычисляем действующее усилие в направлении основы F_1 , которое соответствует параметру λ_1 .

4. Определяем сжимающее усилие F_c в точке контакта, изменение диаметров нитей δ_{D1} , δ_{D2} и с помощью формулы (11) – параметр H_2 .

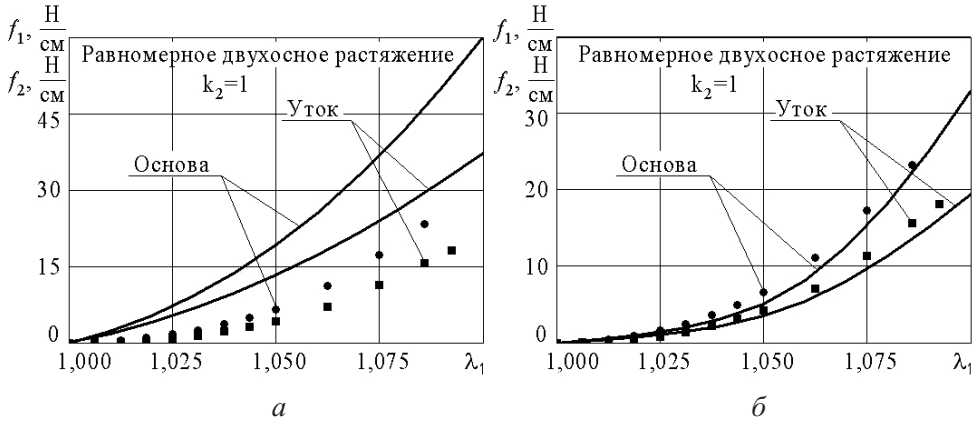


Рис. 4. Расчет деформирования шерстяной ткани типа саржи 2/2 в предположении несжимаемости (а) и сжимаемости (б) нитей. (Здесь и на рис. 4, 5: точки – экспериментальные данные, сплошные линии – результаты численного расчета.)

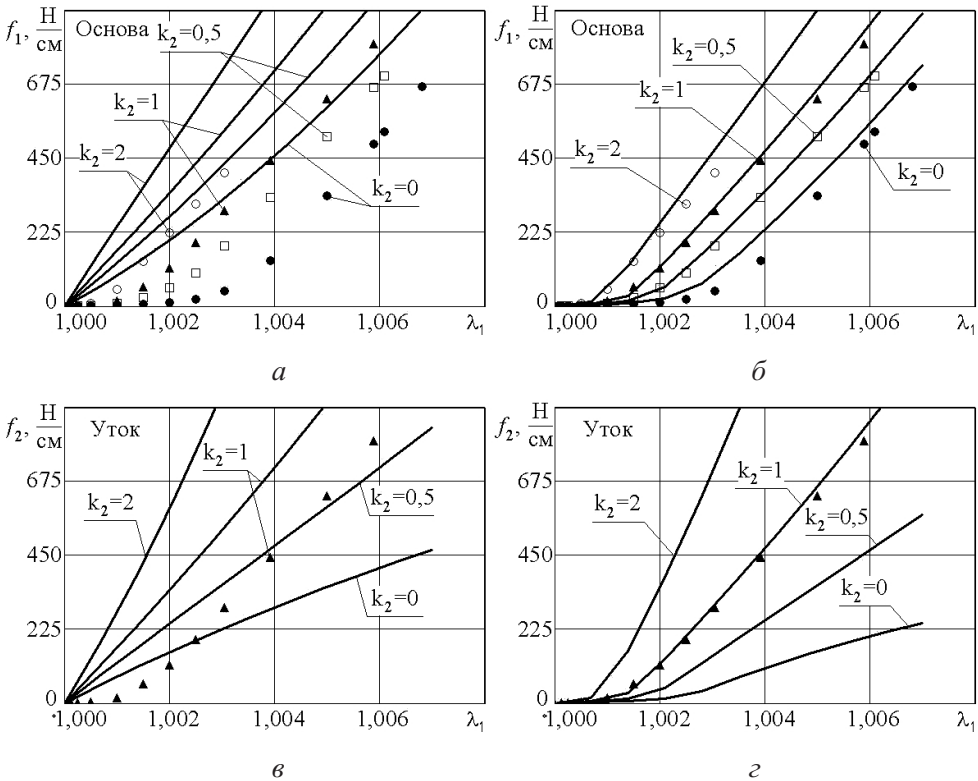


Рис. 5. Расчет деформирования саржи 2/2 из углеволокна в направлении основы (а, б) и утка (в, г) в предположении несжимаемости (а, в) и сжимаемости (б, г) нитей.

5. Для случая $i = 2$ с использованием второго соотношения (9) вычисляем величину действующего усилия F_2 в направлении утка.

Как принято в механике тканей, действующие усилия в направлениях основы и утка пересчитываются затем в растягивающие усилия, которые действуют на единицу длины, т.е. $f_i = n_{0i} F_i$, $i = 1, 2$.

Эффективность такого подхода показана при расчете деформирования двух типов тканей из шерсти и углеволокна для различных видов плоского растяжения.

На рис. 4, 5 приведены зависимости растягивающих усилий, отнесенных к единице длины, от кратности удлинения λ_1 в направлении нитей основы. Для шерстяной саржевой ткани расчеты выполнены при равномерном двухосном растяжении ($k_2 = 1$), для ткани из углеволокна – при различных фиксированных соотношениях деформаций в ортогональных направлениях ($k_2 = 0; 0,5; 1; 2$).

Для иллюстрации важности учета сжимаемости нитей в трансверсальных направлениях на рис. 4, 5 представлены аналогичные результаты расчета для идеально гибких несжимаемых нитей. Видно, что учет сжатия нитей основы и утка в поперечном направлении при деформировании ткани существенно влияет на результаты моделирования. Пренебрежение этим эффектом приводит к более чем двукратному увеличению прогнозируемых растягивающих усилий в направлениях основы и утка и несоответствию результатов расчета с данными экспериментов. Результаты расчетов с учетом сжимаемости нитей удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Методика расчета при незначительных изменениях может быть использована для прогнозирования деформирования тканей других типов, например различных вариантов саржи, сатина, атласа.

Выводы

1. В рамках теории двухосного растяжения тканей предложен эффективный численный алгоритм для расчета деформирования плетеных структур типа саржи 2/2 с учетом геометрии и механических свойств нитей основы и утка.

2. Показано, что учет сжимаемости нитей существенно влияет на точность прогнозирования процессов деформирования тканых структур. Пренебрежение этим эффектом приводит к неточности определения действующих усилий более чем в два раза как для полотна, так и для саржи 2/2.

Резюме

Досліджуються процеси двовісного розтягу тканин типу саржі 2/2. Розрахунки виконано на основі теорії двовісного деформування тканих матеріалів з урахуванням геометрії та механічних характеристик ниток основи і утка. Запропоновано чисельні процедури для вирішення розв'язувальної системи рівнянь, що враховує стискуваність ниток у трансверсальних напрямках. Ефективність чисельних алгоритмів показана при порівнянні прогнозованих деформацій з відомими експериментальними даними.

1. *Белицин М. Н.* Синтетические нити (структура, свойства, методы расчета). – М.: Легкая индустрия, 1970. – 192 с.
2. *Перепелкин К. Е.* Структура и свойства волокон. – М.: Химия, 1985. – 208 с.

3. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1976. – 277 с.
4. Kucher N. K., Zemtsov M. P., and Danil'chuk E. L. Short-term creep and strength of fibrous polypropylene structures // *Strength Mater.* – 2007. – **39**, No. 6. – P. 620 – 629.
5. Kucher N. K. and Danil'chuk E. L. Nonlinear viscoelastic deformation of polypropylene threads under finite strains // *Ibid.* – 2009. – **41**, No. 2. – P. 223 – 233.
6. Peirce F. T. The geometry of cloth structure // *J. Text. Inst.* – 1937. – **28**, Issue 3. – P. 45 – 96.
7. Hearle J. W. S., Potluri P., and Thammandra V. S. Modelling fabric mechanics // *Ibid.* – 2001. – **92**, Issue 3. – P. 53 – 69.
8. Xue P., Peng X., and Cao J. A non-orthogonal constitutive model for characterizing woven composites // *Composites: Pt. A, Appl. Sci. Manufact.* – 2003. – **34**, Issue 2. – P. 183 – 193.
9. Carvelli V. Monofilament technical textiles: An analytical model for the prediction of the mechanical behaviour // *Mech. Res. Communications.* – 2009. – **36**, Issue 5. – P. 573 – 580.
10. Boisse P., Zouari B., and Gasser A. A mesoscopic approach for the simulation of woven fibre composite forming // *Compos. Sci. Tech.* – 2005. – **65**, No. 3-4. – P. 429 – 436.
11. King M. J., Jearanaisilawong P., and Socrate S. A continuum constitutive model for the mechanical behavior of woven fabrics // *Int. J. Sol. Struct.* – 2005. – **42**, Issue 13. – P. 3867 – 3896.
12. Kawabata S., Niwa M., and Kawai H. The finite-deformation theory of plain-weave fabrics. Pt. I: The biaxial-deformation theory // *J. Text. Inst.* – 1973. – **64**, Issue 1. – P. 21 – 46.
13. Кучер М. К., Данильчук Е. Л. Чисельні алгоритми розрахунків задач про двовісний розтяг тканин полотняного типу // *Надійність і довговічність машин і споруд.* – 2010. – Вип. **33**. – С. 174 – 182.
14. Kawabata S. and Niwa M. A finite-deformation theory of the 2/2-twill weave under biaxial extension // *J. Text. Inst.* – 1979. – **70**, Issue 10. – P. 417 – 426.
15. Kawabata S., Niwa M., and Matsudaira M. Measurement of yarn thickness change caused by tension and lateral pressure by wire method // *J. Text. Machin. Soc. Japan.* – 1985. – **31**, No. 1. – P. 7 – 14.
16. Sasai T. and Kawabata S. Biaxial tensile properties of textured yarn fabrics // *Ibid.* – No. 2. – P. 29 – 34.
17. Kawabata S., Niwa M., and Kawai Y. Study on the compressional deformation of woven fabrics. Pt. 1: Measurement of the compressional property of yarns // *Ibid.* – 1978. – **31**, No. 5. – P. T74 – T79.
18. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. – М.: Наука, 1975. – 632 с.

Поступила 15. 12. 2010