

Н. П. Семенюк

УСТОЙЧИВОСТЬ ГОФРИРОВАННЫХ АРОК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: compos@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique is proposed for analysis of stability and post-critical behaviour of the goffered arches. It is based on solving the nonlinear system of the first order ordinary differential equations with using the method of incremental loadings. The boundary problem in increments is solved by the method of discrete orthogonalization. The solutions of particular problems of stability for the goffered arches showed that behaviour such structures differs essentially from behaviour of the circular arches.

Key words: goffered arch, stability, post-buckling behaviour, boundary-value problem, method of incremental loadings, method of discrete orthogonalization, external pressure.

Введение.

Длинные цилиндрические оболочки, замкнутые и незамкнутые, широко используются при строительстве объектов различного назначения, применяются в конструкциях машин и приборов. Исследование устойчивости таких оболочек является одной из важнейших задач механики тонкостенных конструкций. В первых работах по устойчивости труб при внешнем давлении и устойчивости круговых колец и арок [1, 8, 11 – 14] было отмечено, что как по постановке, так и по методам решения, эти задачи весьма подобны между собой. Оказалось, что длинные панели ведут себя так же, как арки единичной ширины. Это дает возможность использовать результаты по устойчивости арок и длинных оболочек как дополняющие друг друга. В работах [6, 9] рассмотрена устойчивость при внешнем давлении цилиндрических оболочек, поперечное сечение которых имеет волнообразный характер. В случае, когда профиль волн образован дугами окружностей, возможно повышение критического значения интенсивности внешнего давления по сравнению с круговыми оболочками. Этот факт был обнаружен при расчете коротких оболочек. Устойчивость длинных оболочек или гофрированных арок до настоящего времени не изучалась. В работе [17] рассмотрено деформирование арок, состоящих из сегментов прямых стержней. Данная работа посвящена решению задачи устойчивости и закритического поведения волнообразных арок.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Пусть гофрированная арка, имеющая единичную ширину и толщину t , нагружена равномерным внешним давлением интенсивностью q . Для исследования нелинейного деформирования и устойчивости арки воспользуемся вариантом уравнений теории оболочек, предложенном в работе [10]. Так как рассматривается плоская деформация арки, то в [10] учитываются только перемещения v и w , деформации растяжения ε_{22} и изменения кривизны κ_{22} , усилия T_{22} , T_{23} и момент M_{22} . Деформации выражаются через перемещения формулами

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \theta_2^2; \quad \kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (1)$$

$$\left(\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_2}; \theta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R_2}; \psi = -\theta_2 \right).$$

Соотношения закона Гука имеют вид

$$T_{22} = C_{22}^* \varepsilon_{22} + B_{22}^* \kappa_{22}; \quad M_{22} = B_{22}^* \varepsilon_{22} + D_{22} \kappa_{22}, \quad (2)$$

где для обобщенных жесткостей принятые в [10] обозначения имеют в данном варианте теории оболочек такой смысл:

$$C_{22}^* = C_{22} + \frac{1}{R_2^2} D_{22}; \quad B_{22}^* = \frac{1}{R_2} D_{22}; \quad C_{22} = \frac{Et}{1-\nu^2}; \quad D_{22} = \frac{t^2}{12} C_{22}. \quad (3)$$

Соотношения (1), (2) можно записать также в виде

$$T_{22} = C_{22} \varepsilon_{22} + \frac{1}{R_2} D_{22} \left(\kappa_{22} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_{22} \right); \quad M_{22} = D_{22} \left(\kappa_{22} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_{22} \right). \quad (4)$$

Для длинных цилиндрических оболочек запись приращения кривизны в виде суммы $\kappa_{22} + \varepsilon_{22}/R_2$ имеет, как известно, большое значение. Поэтому уточненные выражения (1), (2) могут применяться к оболочкам произвольной длины и, следовательно, к расчету арок.

Дифференциальные уравнения равновесия запишем в проекциях на направления осей недеформированного криволинейного стержня

$$\frac{1}{A_2} \frac{dT_{22}}{d\varphi} - \frac{1}{R_2} T_{23}^* = 0; \quad \frac{1}{A_2} \frac{dT_{23}^*}{d\varphi} + \frac{1}{R_2} T_{22} + q = 0; \quad \frac{1}{A_2} \frac{dM_{22}}{d\varphi} - T_{23} = 0 \quad (5)$$

$$(T_{23}^* = T_{23} + T_{22} \theta_2).$$

Для задания геометрических параметров арки воспользуемся полярной системой координат R, φ . Осевую линию арки представим в виде кривой

$$R = R_0 \rho(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_N), \quad (6)$$

где R_0 – радиус исходной окружности, которой придается волнистость в виде, описываемом периодической функцией $\rho(\varphi)$, заданной на всем интервале $(0, \varphi_N)$ одним выражением или только на интервале $\varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i$, повторяющемся N раз. При этом периодичность можно обеспечить с помощью рядов Фурье, следуя работам [6, 9] или же путем соответствующего алгоритма при численном решении задач [9].

Полагаем, что на отрезке $[0, \varphi_1]$ функция $\rho(\varphi)$ состоит из двух дуг $r\gamma_0/2$ выпуклой окружности, сопряженных дугой $r_1\beta_0$ вогнутой окружности (рис. 1). Сопря-

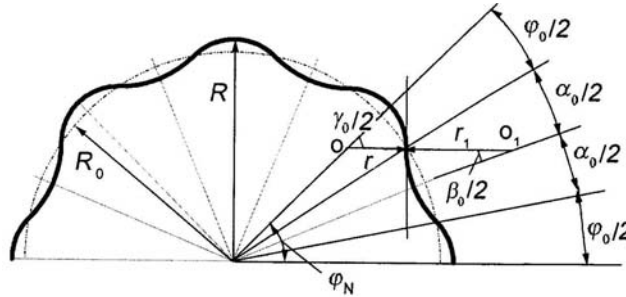


Рис. 1

жение выполняется так, что производная $\rho'(\varphi)$ является непрерывной функцией. Вследствие этого радиусы малых окружностей r и r_1 в точке сопряжения лежат на одной прямой.

На участке $(0, \varphi_0/2)$ функция имеет вид

$$\rho(\varphi) = \omega_1 \cos \varphi + E_2(\varphi) \quad (7)$$

$$(\omega_1 = \cos(\varphi_0/2) - p \cos(\gamma_0/2); E_2(\varphi) = \sqrt{p^2 - \omega^2 \sin^2 \varphi}; p = r/R_0).$$

Уравнение вогнутой дуги при $\varphi \in (\varphi_0/2, \varphi_0/2 + \alpha_0)$ задаем в виде

$$\rho(\varphi) = \omega_2 \cos \varphi_1 - E_2(\varphi_1), \quad (8)$$

где $\omega_2 = \cos \alpha_0/2 + p \cos \beta_0/2$; $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0/2 - \alpha_0/2$; $p_1 = r_1/R_0$.

На участке $\varphi \in (\varphi_0/2 + \alpha_0, \varphi_0 + \alpha_0)$ уравнение кривой $\rho(\varphi)$ совпадает с уравнением (7), но вместо φ следует принять $\varphi_2 = \varphi - \varphi_0 - \alpha_0$. При заданных углах φ_0, γ_0 радиус окружности r вычисляем согласно формуле

$$r = R_0 \frac{\sin \varphi_0/2}{\sin \gamma_0/2}. \quad (9)$$

Аналогично, при известных α_0 и β_0 имеем

$$r_1 = R_0 \frac{\sin \alpha_0/2}{\sin \beta_0/2}. \quad (10)$$

Между углами $\varphi_0, \gamma_0, \alpha_0, \beta_0$ существует зависимость (рис. 1)

$$\gamma_0 = \varphi_0 + \alpha_0 + \beta_0. \quad (11)$$

При задании угла γ_0 следует учитывать, что

$$\varphi_0 + \alpha_0 < \gamma_0 < \pi. \quad (12)$$

Параметр Ляме A_2 и радиус кривизны R_2 кривой (6) определим, воспользовавшись формулами

$$R_2 = R_0 \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho\rho'' - \rho\rho''}; \quad A_2 = R_0 (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} \quad (13)$$

или $R_2 = R_0 \rho_2$, $A_2 = R_0 a_2$.

Для первого и третьего участков получим равенства $\rho_2 = p$; $a_2 = p_1 \rho(\varphi)/E_2(\varphi)$,

а для второго участка имеем: $\rho_2 = -p_1$; $a_2 = p_1 \rho(\varphi_1)/E_2(\varphi)$.

Так как функции ρ и ρ' непрерывны, то параметр A_2 – также непрерывная функция. Радиус кривизны в точках сопряжения меняет знак и величину, если $r \neq r_1$.

Представленные зависимости позволяют получить разрешающую систему нелинейных уравнений в таком виде:

$$\frac{1}{A_2} \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{R_2} w - \frac{1}{2} \theta_2^2 + \frac{1}{C_{22}} T_{22} - \frac{1}{R_2 C_{22}} M_{22};$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{dw}{d\varphi} = -\frac{v}{R_2} - \psi; \quad \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{R_2 C_{22}} T_{22} + \frac{1}{D_{22}} \left(1 + \frac{t_2}{12R_2^2} \right) M_{22};$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{dT_{22}}{d\varphi} = \frac{1}{R_2} T_{23}^*; \quad \frac{1}{A_2} \frac{dT_{23}^*}{d\varphi} = -\frac{1}{R_2} T_{22} - q; \quad \frac{1}{A_2} \frac{dM_{22}}{d\varphi} = T_{23}. \quad (14)$$

К этим уравнениям следует присоединить граничные условия, которые формулируются относительно трех величин, принятых для одной из таких пар (при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_N$):

$$(v, T_{22}), (w, T_{23}^*), (\psi, M_{22}). \quad (15)$$

Решение системы уравнений (14) при соответствующих граничных условиях позволяет исследовать докритическое состояние арки, определить критические точки и дать приближенное представление о характере закритического поведения.

2. Методика решения задачи.

Приведем систему уравнений (14) к безразмерному виду, используя при этом такие обозначения разрешающих функций:

$$y_1 = \frac{T_{22} R_0^2}{C_{22} t^2}; \quad y_2 = \frac{T_{23}^* R_0^2}{C_{22} t^2}; \quad y_3 = \frac{M_{22} R_0^2}{C_{22} t^3}; \quad y_4 = \frac{v R_0}{t^2}; \quad y_5 = \frac{w}{t}; \quad y_6 = \frac{R}{t} \psi.$$

В результате получим систему

$$\frac{1}{a_2} \frac{dy_1}{d\varphi} = \frac{1}{\rho_2} y_2; \quad \frac{1}{a_2} \frac{dy_2}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho_2} y_1 - m_q; \quad \frac{1}{a_2} \frac{dy_3}{d\varphi} = \frac{1}{h} y_2 + y_1 y_6;$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{dy_4}{d\varphi} = \frac{1}{h \rho_2} y_5 - \frac{1}{2} y_6^2 + y_1 - \frac{h}{\rho_2} y; \quad \frac{1}{a_2} \frac{dy_5}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho_2} y_4 - y_6; \quad (16)$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{dy_6}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho_2} y_1 + (12 + h^2) y_3 \quad (h = t/R_0, \quad m_q = q R_0^3 / C_{22} t^2).$$

Граничные условия также формулируем относительно функций y_i . Их удобно записать в матричном виде. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_N$, соответственно, имеем

$$A_1 Y = 0 \quad \text{и} \quad A_2 Y = 0, \quad (17)$$

где матрицы A_1 и A_2 имеют размеры 3×6 с компонентами a_{ij} , равными единице на тех местах, которые умножаются на компоненты вектора $Y(y_1, \dots, y_6)$ y_j или y_{j+3} последовательно ($j = 1, 2, 3$) при $i = 1, 2, 3$.

Для решения задачи (16), (17) на всей траектории деформирования используем метод непрерывного продолжения по параметру [3, 15]. Продифференцируем уравнения (16) по параметру λ , который представляет собой длину дуги множества решений нелинейной системы. Так как в системе (16) четыре уравнения – линейны, то при дифференцировании они сохраняют свой вид, но вместо функций y_i следует подставить производные $\dot{y}_i = (dy_i)/(d\lambda)$, $\dot{m}_q = (dm_q)/(d\lambda)$. Два уравнения (третье и четвертое) приобретут, соответственно, такой вид:

$$\frac{1}{a_2} \frac{d\dot{y}_3}{d\varphi} = \frac{1}{h} \dot{y}_2 + \dot{y}_1 y_6 + y_1 \dot{y}_6;$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{d\dot{y}_4}{d\varphi} = \frac{1}{h\rho_2} \dot{y}_5 - \dot{y}_6 y_6 + \dot{y}_1 - \frac{h}{\rho_2} \dot{y}_3. \quad (18)$$

Граничные условия (17) также запишем относительно производных

$$A_1 \dot{Y} = 0; \quad A_2 \dot{Y} = 0 \quad (\varphi = 0 \text{ и } \varphi = \varphi_N). \quad (19)$$

Полученная система уравнений, кроме производных \dot{y}_i , содержит производную от нагрузки \dot{m}_q , которая также подлежит определению. Дополнительное уравнение, позволяющее решить задачу,

$$\sum_{i=1}^6 (\dot{y}_i)^2 + (\dot{m}_q)^2 = 1 \quad (20)$$

обеспечивает движение по кривой равновесных состояний [3, 15]. Оно соответствует требованию, чтобы полученное решение обладало единичной нормой.

Если получено решение задачи (18) – (20), то для определения функций y_i и нагрузки m_q формулируем задачу Коши по параметру λ . Методика и алгоритм решения задачи в такой постановке изложены в [3].

Одним из методов решения задачи Коши является метод Эйлера. При использовании этого метода несколько видоизменим алгоритм решения, перейдя непосредственно к методу последовательных нагружений, модифицированному таким образом, чтобы он был применим не только в регулярных, но и в особых точках траектории нагружения [7, 16]. Домножим уравнения (18), (19) на $d\lambda$ и заменим дифференциалы функций конечными приращениями. Приращение нагрузки представим как

$$\Delta m_q = \dot{m}_q \Delta \lambda. \quad (21)$$

Уравнение (20) заменяем приближенным равенством

$$\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta \lambda} \right)^2 + (\dot{m}_q)^2 = 1. \quad (22)$$

Разрешающая система уравнений в приращениях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\varphi} &= \frac{a_2}{\rho_2} z_2; & \frac{dz_2}{d\varphi} &= -\frac{a_2}{\rho_2} z_1 - a_2 z_7 \Delta \lambda; & \frac{dz_3}{d\varphi} &= \frac{a_2}{h} z_2 + a_2 y_6 z_1 + a_2 y_1 z_6; \\ \frac{dz_4}{d\varphi} &= \frac{a_2}{h\rho_2} z_5 - a_2 y_6 z_6 + a_2 z_1 - h \frac{a_2}{\rho_2} z_3; & & & & \\ \frac{dz_5}{d\varphi} &= -h \frac{a_2}{\rho_2} z_4 - a_2 z_6; & \frac{dz_6}{d\varphi} &= -h \frac{a_2}{\rho_2} z_7 + a_2 (12 + h^2) z_3, & & \end{aligned} \quad (23)$$

где $z_i = \Delta y_i$, $i = 1, \dots, 6$; $z_7 = \dot{m}_q$.

Граничные условия представим в таком виде: $A_1 z_i = 0$; $A_2 z_i = 0$.

Задавая приращения параметра λ , находим значения функций z_i , $i = 1, \dots, 7$. При начальном значении параметра λ решаем линейную систему (16), поэтому коэффициенты y_1 , y_6 в системе (23) на следующем шаге нагружения известны.

Решение системы (23) находим методом дискретной ортогонализации Годунова [2], успешно применяемым при решении задач теории оболочек [4]. Весь интервал $0 \leq \varphi \leq \varphi_N$ делим на k участков. На j -ом участке полное решение записываем в виде

$$z^{(j)} = \bar{z}^{(j)} C^{(j)}, \quad (24)$$

где $\bar{z}^{(j)}$ – матрица, состоящая из четырех векторов-решений этой системы. Решение удовлетворяет граничным условиям при $\varphi = 0$ независимо от значения констант $C^{(j)}$. Для определения этих констант используем граничные условия при $\varphi = \varphi_N$. Подставив (24) в уравнения $A_2 z_i = 0$, получим

$$A_2 \bar{z}^{(k)} C^{(k)} = 0. \quad (25)$$

Эта система состоит из трех уравнений относительно четырех неизвестных. Дополнительное уравнение получим из условия нормирования (22). В данной задаче этому условию соответствует требование, чтобы вектор $C^{(k)}$ был единичным, т.е.

$$\sum_{i=1}^4 C_i^2 = 1. \quad (26)$$

Так как система (25) имеет небольшой порядок, то ее решение при условии (26) можно представить в явном виде

$$C_i^{(k)} = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta}} \quad (i = 1, 2, 3); \quad C_4^{(k)} = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta}}, \quad (27)$$

где Δ – определитель матрицы коэффициентов при неизвестных $C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, C_3^{(k)}$; Δ_i – определители, которые образуются из основного определителя Δ путем замены i -го столбца столбцом коэффициентов при неизвестном $C_4^{(k)}$ с обратным знаком. Если ранг расширенной матрицы равен трем, то решение в виде (27) существует независимо от того, равен определитель Δ нулю или нет. При критической нагрузке $\Delta = 0$, поэтому имеем

$$C_i^{(k)} = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta}}; \quad C_4^{(k)} = 0. \quad (28)$$

Является ли эта точка на траектории нагружения предельной или точкой бифуркации можно судить по моде выпучивания. Если эта мода ортогональна к исходной форме деформирования, то имеем точку бифуркации. При вырождении расширенной матрицы системы (25) необходимо использовать другую процедуру продолжения решения [3].

Изложенная методика решения нелинейной краевой задачи использована при исследовании нелинейного деформирования торосферических оболочек [16]. Полученные при этом результаты совпадают с данными других авторов, полученными более сложным путем [5].

3. Числовые результаты и их анализ.

Для проверки эффективности разработанной методики рассмотрим нелинейное деформирование с прохождением особых точек круговых изотропных длинных цилиндрических панелей (арок) при внешнем давлении. Эта задача рассмотрена многими авторами [3, 15] (в настоящее время она может быть использована как тестовая).

При действии на арку внешнего давления интенсивностью q в работах [3, 18] получена формула для критического значения этой нагрузки

$$q_{kp} = \frac{D_{22}^2}{R_0^3} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right), \quad (29)$$

где D_{22} – принятое выше обозначение окружной изгибной жесткости; φ_N – центральный угол арки.

Безразмерное значение $m_{q, kp} = (q_{kp} R_0^3) / (C_{22} t^2)$ при подстановке значения (29) будет

$$m_{q, kp} = \frac{D_{22}^2}{C_{22} t^2} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right). \quad (30)$$

Формула (30) справедлива для шарнирно-опертых арок. В случае жесткого защемления арок в [8] получено приближенное решение, которое также можно использовать для оценки достоверности результатов, получаемых с помощью предложенной методики. Так как для однослойной арки $D_{22} = C_{22}t^2/12$, то

$$m_{q,kr} = \frac{1}{12} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right). \quad (31)$$

Эта величина не зависит от механических и геометрических параметров арки, кроме угла φ_N . Однако на закритическое состояние арки влияет параметр t/R_0 . Поэтому ниже при получении числовых результатов в большинстве рассматриваемых примеров принято отношение $t/R_0 = 0,01$.

В таблице приведены числовые данные о критических нагрузках для арок с различными углами φ_N при шарнирном (вариант I) и жестком (вариант II) закреплениях концов арки, полученные как по представленной выше методике (M1), так и по формулам С.П.Тимошенко [8] (M2). Критические нагрузки в каждом случае отнесены к q_{kr} , определяемому по формуле (31) при $\varphi_N = \pi$.

Вариант	Методика	φ_N					
		$\pi/3$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2π
I	M2 [8]	11,67	2,67	1,00	0,42	0,15	0
	M1	11,95	2,90	1,09	0,328	0,042	0
II	M2 [8]	24,44	6,04	2,67	1,53	1,09	1
	M1	24,81	6,25	3,0	1,54	0,661	0,24

Сравнение показывает, что при $\varphi_N \leq 4\pi/3$ результаты расчета по обеим методикам хорошо согласуются как при шарнирном, так и при жестком закреплениях. Если же $\varphi_N = 2\pi$, то расчет по [8] дает завышенное значение критической нагрузки при

жестком закреплении. Форма потери устойчивости, которая предполагается в решении [8], весьма далека от той, что дает решение по предлагаемой методике.

На рис. 2 показана диаграмма деформирования (а) и форма потери устойчивости (б) круговой арки при $\varphi_N = \pi$ с шарнирным опиранием концов. Такие же арки рассмотрены в [3]. Критические нагрузки, полученные в [3] и по методике, изложенной выше, совпадают. Формы потери устойчивости при $\varphi_N = \pi$ также совпадают, но различаются при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = \pi/2$. Согласно [3] они не симметричны относительно середины дуги, а в данной работе – симметричны. Диаграммы деформирования, полученные авторами [3] и по предлагаемой методике, хорошо согласуются при $\varphi_N = \pi$ и не совпадают при $\varphi_N = \pi/2$ и $\varphi_N = \pi/4$. Объясняется это тем, что в работе [3] для пе-

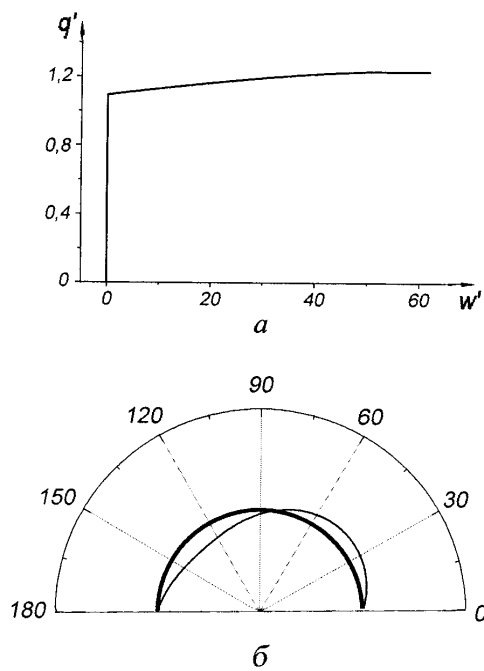
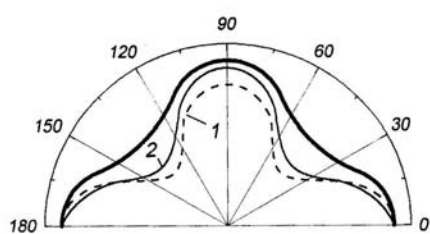
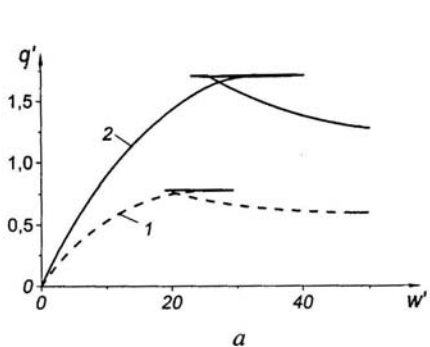


Рис. 2

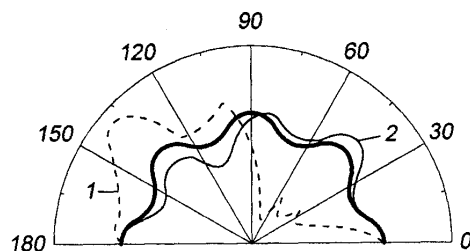
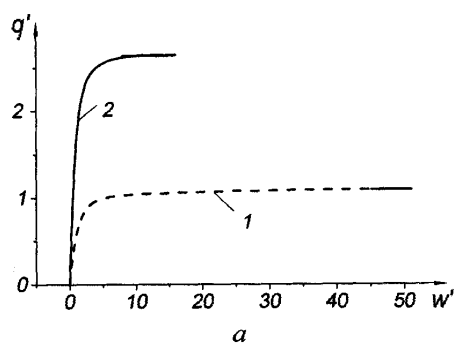
рехода на закритическую траекторию было задано возмущение нагрузки, вид которого предопределял направление этой траектории. В данном варианте расчета такая процедура не используется. При этом перемещение точки $\varphi = \varphi_N/2$ в окрестности критической точки может изменять направление вследствие перестройки докритической формы деформирования в ортогональную ей закритическую.

На диаграммах деформирования по оси абсцисс отложены значения отношения прогиба к толщине ($w' = w/t$), по оси ординат – (q') – отношение критического давления, определяемого в настоящей работе, к значению q_{kp} , вычисленному по формуле (31).

Аналогичные оси использованы при построении диаграммы деформирования гофрированных арок на рис. 3 – 6. Круговой арке с углом раствора $\varphi_N = \pi$ придана волнистость описанного выше типа с количеством волн N по периметру, равным 2, 4, 8, 16. На рис. 3, *a* показаны диаграммы деформирования с двумя волнами по периметру ($N = 2$). Кривая 1 получена для арки с шарнирным опиранием концов, кривая 2 – с жестким при $\varphi = 60^\circ$. На этих кривых имеются предельные точки: (20; 0,78) на кривой 1 и (25; 1,71) – на кривой 2. При прогибах, больших 20 толщин, равновесие арки будет возможным при нагрузке, меньшей предельного значения. Как следует из вида кривых 1 и 2 на рис. 3, *б*, где представлены формы деформирования арок в закритическом состоянии при тех же граничных условиях, определяющую роль в распределении прогибов имеет исходная геометрия арки. Если судить по значению предельных нагрузок и величин прогибов, арки, имеющие форму, показанную на рис. 3, *б* жирной кривой, имеют существенно меньшую жесткость, чем круговые. Увеличение количества волн по периметру исходной арки приводит к изменению ее жесткостных параметров в целом и в пределах каждой волны. Результаты расчета деформирования арок с $N = 4, 8, 16$ представлены на рис. 4 – 6 (*a*), а соответствующие исходные арки и их вид в закритическом состоянии – на рис. 4 – 6 (*б*). Нумерация кривых цифрами 1 и 2 имеет тот же смысл, что и на рис. 3. Нагрузки, после достижения которых начинается бурное развитие прогибов, равны 1,09 ($N = 4$), 1,12 ($N = 8$), 1,20 ($N = 16$) при шарнирном опирании концов и 2,65 ($N = 4$), 2,81 ($N = 8$), 3,17 ($N = 16$) – при жестком за-



б
Рис. 3



б
Рис. 4

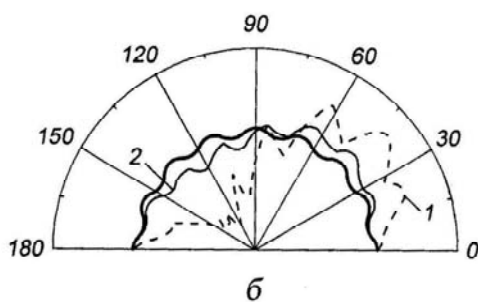
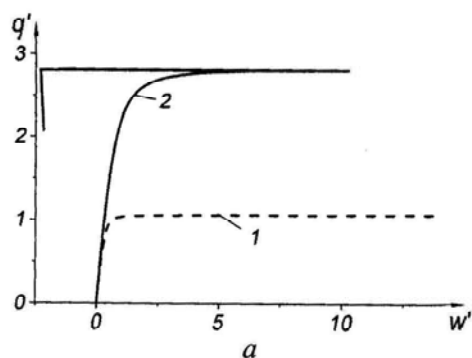


Рис. 5

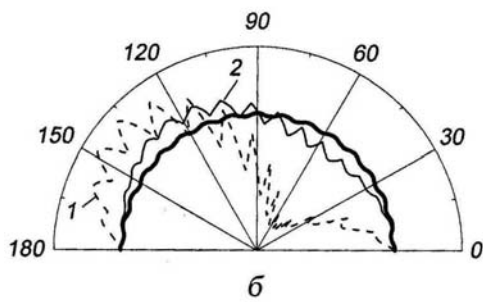
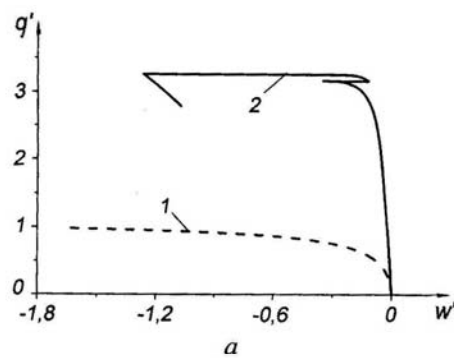


Рис. 6

шемлении. Как видно, при $N \geq 4$ критические нагрузки гофрированных арок близки к тем значениям, которые имеют круговые арки. Формы потери устойчивости также не симметричны относительно середины арки, но их вид существенно различается в зависимости от количества волн и граничных условий. Выпучивание сопровождается локальным деформированием дуг малых окружностей. Шарнирно опертые арки испытывают в закритическом состоянии значительно больший поворот относительно центральной оси, чем жестко опертые.

Отметим, что для гофрированных арок в предложенной методике среди исходных данных должны быть известны углы $\varphi_0, \alpha_0, \gamma_0$. В рассмотренных примерах принято:

$$\alpha_0 = \varphi_0 = \varphi_N / 2N; \quad \gamma_0 = \alpha_0 + \varphi_0 + \pi/4.$$

Выводы.

1. Предложена методика расчета устойчивости и закритического поведения гофрированных арок, основанная на решении нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода последовательных нагружений при решении алгебраических уравнений. При этом обеспечивается прохождение особых точек на траектории деформирования. Краевая задача в приращениях решена методом дискретной ортогонализации. Методики расчета обладают возможностями, позволяющими проводить многочисленные исследования.

2. Решение конкретных задач по устойчивости гофрированных арок показало, что формирование профиля арок с помощью выпуклых и вогнутых дуг окружностей позволяет создавать конструкции, поведение которых при нагружении существенно отличается от поведения круговых арок. При этом критические нагрузки гофрированных арок могут быть как значительно меньшими, так и близкими к критическим нагрузкам идеальных круговых арок.

3. Так как устойчивость арок единичной ширины определяется с помощью таких же уравнений, что и длинных цилиндрических оболочек, то полученные в работе данные показывают, что, в отличие от коротких оболочек [6], длинные продольно гофрированные оболочки не обладают большей жесткостью, чем круговые цилиндрические оболочки.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику розрахунку стійкості та закритичної поведінки гофрованих арок, що будується на розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку з використанням методу послідовних навантажень. Крайову задачу у приростах розв'язано методом дискретної ортогоналізації. Розв'язок конкретних задач стійкості для гофрованих арок показав, що поведінка таких конструкцій при навантаженні суттєво відрізняється від поведінки кругових арок.

1. Динник А.Н. Устойчивость арок. – М.; Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1946. – 128 с.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171 – 174.
3. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
4. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
5. Гуляев В.М., Баженов В.А., Гоцуляк Б.А. Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 255 с.
6. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б., Остапчук В.В. Устойчивость волнообразных некруговых цилиндрических оболочек из композитов при внешнем давлении // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 12. – С. 91 – 102.
7. Семенюк Н.П., Трач В.М., Жукова Н.Б. Об исследовании нелинейного поведения тонких оболочек шаговым методом // Прикл. механика. – 2007. – **44**, № 9. – С.85 –93.
8. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 567 с.
9. Babich I.Yu, Zhukova N.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of Circumferentially Corrugated Shells under Hydrostatic Pressure // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 9. – P. 1001 – 1009.
10. Boriseiko A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Canonical Equations in the Geometrically Nonlinear Theory of Thin Anisotropic Shells. // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 165 – 174.
11. Bresse M. Cours de mecanique. P.1. – Paris, Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire du Bureau des Longitudes, 1859. 150 p.
12. Bryan G.H. Application of the energy test to the collapse of a thin long pipe under external pressure // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1888. – **6**. – P. 287 – 292.
13. Hurlbrink E. Festigkeits-Berechnung von röhrenartigen Körpern, die unter äusserem Drucke stehen. – Schiffbau, 1907/1908 – **9**, N 14. – S. 517 – 523.
14. Levy M. Memoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications // J. Math.pures et appliquées (Lionville Journal), Séries 3, Paris – 1884. – **10**. – P. 5 – 42.
15. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // Int. J. Solids and Struct. – 1979. – **15**, N 7. – P. 529 – 551.
16. Semenyuk N.P., Trach V.M. Ostapchuk V.V. Nonlinear Axisymmetric Deformation of Anisotropic Spherical Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1101 – 1111.
17. Wang C.J. Buckling and postbuckling of segmented tubes under external pressure // Int. J. Non-Linear Mech. – 2005. – N 3. – P. 551 – 556.

Поступила 18.11.2010

Утверждена в печать 26.06.2012