

А.Е. Закржевский¹, В.Ф.Ткаченко², В.С.Хорошилов³

**СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ И ЧАСТОТЫ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ
ЗАКРЕПЛЕННОГО УПРУГОГО КОЛЬЦА**

^{1,2}*Ин-т механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;*

³*Государственное конструкторское бюро "Южное",
ул. Криворожская, 3, 490008, Днепропетровск, Украина;
e-mail: ¹ alex.zakr@mail.ru; ² vftkach08@mail.ru; ³ skh@ukr.net*

Abstract. The modes and frequencies of natural vibrations of elastic ring are determined numerically within the framework of the boundary problem for corresponding differential operator of the 6th order. The ring is fixed at one point and models a large ring antenna, which slowly increases in sizes in conditions of weightlessness. The bending vibrations in the ring plane are considered. The numerical results are given.

Key words: eigen frequency; eigen mode; flexible ring; vibrations; differential operator.

Введение.

Задача определения частот и форм собственных колебаний кругового кольца возникла в связи с исследованием динамики космического аппарата (КА), имеющего в своем составе несомое тело переменной геометрии, определяемой медленным разворачиванием по заданной программе компактно смотанной упругой ленты в кольцевой элемент типа антенны. Предполагая заранее, что длительность процесса разворачивания значительно превышает период колебаний кольца по первой форме, можно не учитывать возмущения собственных форм кольца, вызываемые переменностью его радиуса во времени.

Конструкции, подобные круговой антенне, могут быть схематизированы как тонкие криволинейные стержни. При малом удлинении ответ о границах применимости схемы криволинейного стержня может быть получен только из решения соответствующей задачи теории упругости. При этом в рамках самой схемы необходимо выяснить, какое влияние на колебания оказывают те или иные возмущающие факторы. Свободные и вынужденные колебания криволинейных стержней в линейной постановке рассматриваются в предположении о малости смещений и углов поворотов. В этом случае для тонких криволинейных стержней достаточно хорошо выполняется гипотеза плоских сечений и уравнения колебаний описываются системой дифференциальных уравнений относительно векторов перемещений и угловых скоростей поворотов [1, 3, 7]. Решения получены лишь в случае, когда уравнения колебаний сводятся к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Таких случаев известно три [3]: прямой стержень, круговое кольцо, винтовая линия, причем первые два являются частными случаями третьего. Для постоянства коэффициентов уравнений движения необходимо, в частности, постоянство поперечного сечения стержня. В случае замкнутого кругового кольца векторная система распадается на две

скалярные подсистемы, описывающие колебания в плоскости и колебания по нормали к плоскости кольца. Для замкнутого кольца известны приближенные решения Р.Хоппе для собственных частот изгибных колебаний в плоскости кольца [7] и такие же решения Дж. Мичелла для колебаний по нормали к его плоскости [7]. В случае крутильных колебаний имеются еще два осесимметричных приближенных решения Р.Хоппе [7] для колебаний в плоскости кольца и К.Бессета [7] для колебаний по нормали к его плоскости.

Аналитическое решение задачи о незамкнутом кольце оказывается настолько сложным, что большинство авторов, занимавшихся этой задачей, для определения собственных частот и форм колебаний предпочитали приближенные аналитические и численные методы [5].

Хотя задача исследования собственных форм и частот кругового кольца рассматривалась примерно сто лет назад, возможности современной вычислительной техники позволяют подойти к ней на качественно другом уровне. На данный момент в литературе имеются некоторые числовые данные о нескольких первых собственных частотах и формах колебаний замкнутых круговых колец как в плоскости кольца, так и в плоскости, перпендикулярной плоскости кольца, при некоторых граничных условиях. Эти данные были получены, в основном, на основе использования упрощенных методов, вследствие чего точность их невысока [2, 3, 10]. Случай упругого кольца с одной закрепленной точкой авторам не удалось найти среди известных работ.

В данной работе приведены результаты определения форм и частот колебаний кругового кольца, закрепленного в одной точке, полученные при решении соответствующей краевой задачи для дифференциального оператора 6-го порядка прямыми численными методами, реализация которых не вызывает проблем при использовании современных компьютеров. Подобные исследования проведены в работах [11 – 14].

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим задачу определения форм и частот парциальных изгибных колебаний в плоскости кольца, жестко защемленного в одной точке. Не нарушая общности, полагаем, что кольцо закреплено в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, которые совпадают, где φ – угловая координата кольца.

В случае изгибных колебаний в плоскости кольца перемещение центра тяжести поперечного сечения кольца, определяемого угловой координатой φ , можно разложить на радиальную u и окружную v компоненты. Поскольку в разных источниках используются различные обозначения, приведем здесь кратко вывод уравнений свободных колебаний кольца в плоскости, используя вариационный подход.

Относительное удлинение осевой линии кольца, вызванное этими перемещениями, равно

$$e = -\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi}, \quad (1)$$

где r – радиус кольца.

В случае чисто изгибных колебаний кольца –

$$e = 0 \quad \text{и} \quad u = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Угол поворота поперечного сечения кольца в процессе движения определяется зависимостью

$$\vartheta = \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

а изменение кривизны равно производной от ϑ по дуге –

$$\kappa = \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{1}{r^2} \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \quad (4)$$

Изгибающий момент в произвольном поперечном сечении кольца [9, 10]

$$M = -EJ\kappa = -\frac{EJ}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u \right), \quad (5)$$

где EJ – изгибная жесткость кольца.

Кинетическая энергия кругового кольца равна

$$T = \frac{1}{2} \mu \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) r d\varphi, \quad (6)$$

где μ – погонная масса ленты, из которой формируется кольцо.

Потенциальная энергия может быть записана в виде

$$\dot{I} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} M^2 r d\varphi = \frac{EJ}{2r^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u \right)^2 r d\varphi, \quad (7)$$

а кинетический потенциал –

$$L = T - \dot{I} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \mu - \frac{EJ}{r^4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u \right)^2 \right] r d\varphi. \quad (8)$$

Действие по Гамильтону [6] принимает вид

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{2\pi} \left[(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \mu - \frac{EJ}{r^4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u \right)^2 \right] r d\varphi dt. \quad (9)$$

Учитывая, что $u = -\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ и разделив (9) на μ , получим

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - \frac{EJ}{\mu r^4} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 \right] r d\varphi dt.$$

Из условия стационарности действия по Гамильтону $\delta S = 0$ получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$v^{VI} + 2v^{IV} + v^{II} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v^{II} - v) = 0, \quad (10)$$

где $a^2 = \frac{\mu r^4}{EJ}$, римские цифры в положении верхнего индекса обозначают порядок частной производной по угловой координате φ , и шесть краевых условий при $\varphi = 0, \varphi = 2\pi$:

$$(a^2 \ddot{v} + v^I + 2v^{III} + v^V) \delta v = 0; \quad (11)$$

$$(v^{IV} + v^{II}) \delta v^I = 0; \quad (12)$$

$$(v^{III} + v^I) \delta v^{II} = 0, \quad (13)$$

где точки над функцией обозначают дифференцирование по времени.

В рассматриваемом случае жесткого закрепления кольца в одной точке эти выражения сводятся к шести однородным условиям для v, v^I, v^{II} , что приводит к равенст-

нулю вариаций δv , δv^I , δv^{II} и к выполнению условия стационарности действия по Гамильтону.

2. Метод решения.

Для решения уравнения (10) применим метод разделения переменных. Представим решение уравнения движения в виде $v = \tilde{v}(\varphi) \cdot \psi(t)$. Подставляя это представление в уравнение изгибных колебаний и разделив на $(\tilde{v}^{II} - \tilde{v}) \psi(t) \frac{\mu r^4}{EJ}$, придем к тождеству

$$\frac{\tilde{v}^{VI} + 2\tilde{v}^{IV} + \tilde{v}^{II}}{\tilde{v}^{II} - \tilde{v}} \equiv \frac{\ddot{\psi}}{\psi} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – собственные числа соответствующей краевой задачи. В результате для каждого собственного значения λ_n^2 , при котором краевая задача для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^6 \tilde{v}}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 \tilde{v}}{d\varphi^4} + \frac{d^2 \tilde{v}}{d\varphi^2} - \tilde{a}^2 \left(\frac{d^2 \tilde{v}}{d\varphi^2} - \tilde{v} \right) = 0, \quad (14)$$

где $\tilde{a}^2 = \frac{\mu r^4 \lambda^2}{EJ}$, и краевых условиях слева и справа от точки закрепления имеет не-

тривиальные решения, построим собственные функции $\tilde{v}_n(\varphi)$, которые затем могут быть использованы для построения полного решения с учетом того, что $\psi_n = B_n \sin(\lambda_n t + \alpha_n)$, где λ_n – частоты собственных колебаний.

Краевые условия (11) – (13) после разделения переменных принимают вид

$$(-\tilde{a}^2 v + v^I + 2v^{III} + v^V) \delta v = 0; \quad (15)$$

$$(v^{IV} + v^{II}) \delta v^I = 0; \quad (16)$$

$$(v^{III} + v^I) \delta v^{II} = 0. \quad (17)$$

В общем случае, для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно найти фундаментальную систему решений, разыскивая решение уравнения в виде $\tilde{v} = e^{kx}$. Характеристическим многочленом дифференциального оператора, стоящего в левой части (14), является бикубический многочлен

$$k^6 + 2k^4 + k^2 - \tilde{a}^2 k^2 + \tilde{a}^2, \quad (18)$$

который тождественно обращается в нуль на решениях уравнения (14) [8]. Все решения вида $\tilde{v} = e^{k_i x}$, где k_i – любой из шести корней характеристического многочлена оператора $L[\tilde{v}]$, будут частным решением уравнения (14), так как при подстановке любого из этих корней в это уравнение оно тождественно обращается в нуль.

3. Численные результаты.

Программа Mathematica 5.0[®] позволяет получить строгие аналитические выражения для этих корней. Их можно представить в виде

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1, \quad x_{3,4} = \alpha_3 \pm i\beta_3, \quad x_{5,6} = \pm i\beta_5. \quad (19)$$

Вещественные и мнимые части корней (19) как функции величины \tilde{a} представлены на рис. 1 – 3.

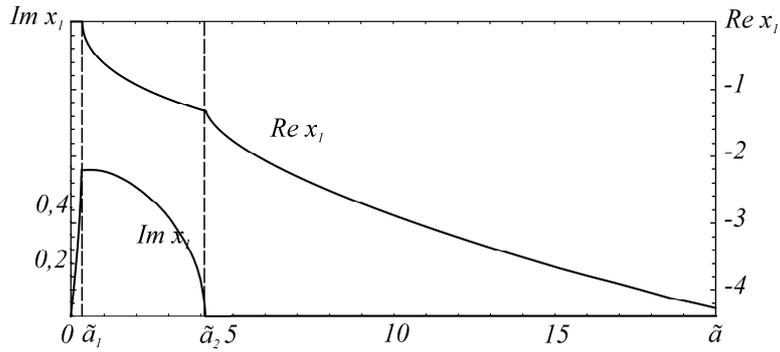


Рис. 1

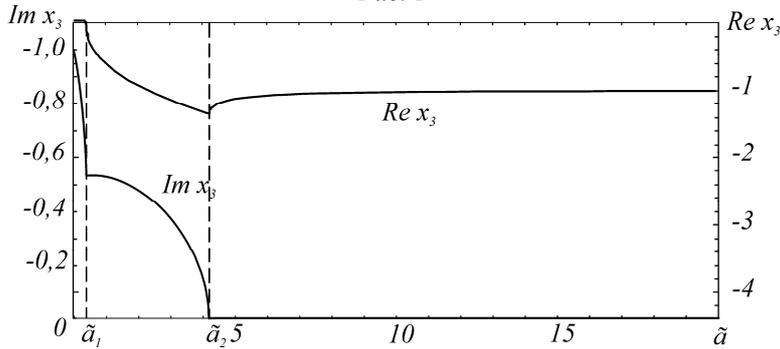


Рис. 2

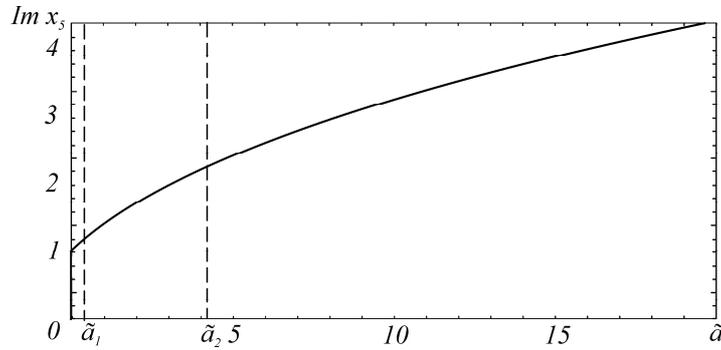


Рис. 3

На представленных графиках видно, что область значений \tilde{a} разделена на три интервала, границы которых определяются значениями $\tilde{a}_0 = 0$; $\tilde{a}_1 \approx 0,33675$; $\tilde{a}_2 \approx 4,19959$. Последний интервал справа не ограничен. Точки \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 обладают характерными свойствами: в точке \tilde{a}_0 характеристический многочлен (18) оператора $L[\tilde{v}]$ имеет два кратных нулевых корня и два кратных попарно сопряженных мнимых корня; в точке \tilde{a}_1 он имеет два кратных попарно сопряженных мнимых корня и еще два сопряженных мнимых корня; в точке \tilde{a}_2 – две пары кратных вещественных корней разного знака, равных по абсолютной величине, и еще два сопряженных мнимых корня.

Представим решение уравнения (14) в виде

$$\tilde{v}(\varphi) = \sum C_i e^{k_i \varphi}. \quad (20)$$

Такой вид решения возможен во всей области значений параметра \tilde{a} кроме трех упомянутых точек, хотя и как угодно близко к ним.

Поскольку рассматривается случай жесткого защемления кольца в точках $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$, которые физически совпадают, из (11) – (13) следуют шесть краевых условий

$$\begin{aligned} \tilde{v}(0) &= 0; \quad \tilde{v}'(0) = 0; \quad \tilde{v}''(0) = 0; \\ \tilde{v}(2\pi) &= 0; \quad \tilde{v}'(2\pi) = 0; \quad \tilde{v}''(2\pi) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом (20) они дают систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 c_j &= 0; \quad \sum_{j=1}^6 c_j k_j = 0; \quad \sum_{j=1}^6 c_j k_j^2 = 0; \\ \sum_{j=1}^6 c_j e^{k_j 2\pi} &= 0; \quad \sum_{j=1}^6 c_{ji} e^{k_j 2\pi} k_j = 0; \quad \sum_{j=1}^6 c_{ji} e^{k_j 2\pi} k_j^2 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Значения параметра \tilde{a} , при которых определитель системы (22) обращается в ноль, когда решение представлено в виде (20), показаны на рис. 4. Здесь по оси абсцисс отложены значения \tilde{a} , а по оси ординат – либо значение определителя в точке, если оно не превышает 10, либо 10 со знаком определителя.

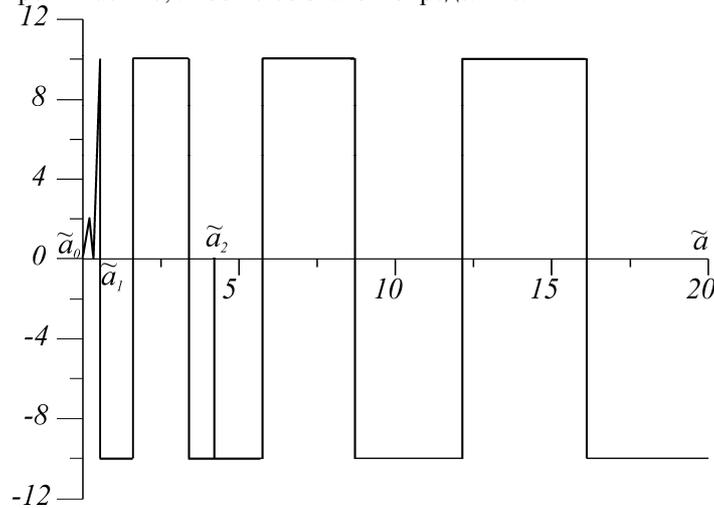


Рис. 4

Тот факт, что в точках \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 определитель системы уравнений (22) обращается в ноль на рис. 4, не свидетельствует о том, что система будет иметь в этих точках нетривиальные решения. Ввиду наличия в них кратных корней характеристического полинома дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (14), решение (20) не удовлетворяет уравнению (14) в этих точках. Из-за кратности корней здесь в матрице системы (22) появляются одинаковые столбцы и ее ранг уменьшается на количество кратных корней. Отсюда – и нулевые значения ее определителя. Однако такое объяснение не позволяет сразу исключить возможность обращения указанного определителя в ноль на решениях, удовлетворяющих (14) в этих точках. Поэтому указанные точки должны быть рассмотрены отдельно.

В точке \tilde{a}_0 характеристическое уравнение имеет кратный нулевой корень и две пары одинаковых сопряженных чисто мнимых корней. Фундаментальная система решений уравнения (14) в этой точке имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(\varphi) &= 1; & \tilde{v}_2(\varphi) &= \varphi; & \tilde{v}_3(\varphi) &= \cos \varphi; \\ \tilde{v}_4(\varphi) &= \sin \varphi; & \tilde{v}_5(\varphi) &= \varphi \cos \varphi; & \tilde{v}_6(\varphi) &= \varphi \sin \varphi.\end{aligned}$$

В результате несложных вычислений находим, что при такой фундаментальной системе искомым определитель отличен от нуля и равен $8\pi^3$, т.е. можно утверждать, что в этой точке отсутствует нетривиальное решение системы (22), а следовательно, для закрепленного кольца, как и следовало ожидать, отсутствует и нулевое собственное число, в отличие от случая свободного кругового кольца, где, как показал С.П.Тимошенко [9], есть нулевое собственное число, соответствующее перемещению свободного кольца как твердого тела.

Точка \tilde{a}_1 , так же, как и точка \tilde{a}_2 , более сложна для изучения, так как их положение можно вычислить лишь приближенно, в отличие от положения точки \tilde{a}_0 . Фундаментальную систему решений в точке \tilde{a}_1 можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(\varphi) &= \cos(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_2(\varphi) &= \sin(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_3(\varphi) &= \varphi \cos(\beta_1\varphi); \\ \tilde{v}_4(\varphi) &= \varphi \sin(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_5(\varphi) &= \cos(\beta_5\varphi); & \tilde{v}_6(\varphi) &= \sin(\beta_5\varphi).\end{aligned}\quad (23)$$

Она удовлетворяет уравнению (14) только в точке \tilde{a}_1 , положение которой точно не известно, но не в ее окрестности. Для исследования поведения значения определителя системы (22) в окрестностях точки \tilde{a}_1 целесообразно выбрать такую фундаментальную систему решений, которая удовлетворяет уравнению (14) как в самой точке, так и в ее окрестностях.

Если выбрать

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(\varphi) &= \cos(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_2(\varphi) &= \sin(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_3(\varphi) &= (\sin(\beta_3\varphi) - \sin(\beta_1\varphi)) / (\beta_3 - \beta_1); \\ \tilde{v}_4(\varphi) &= (\cos(\beta_3\varphi) - \cos(\beta_1\varphi)) / (\beta_1 - \beta_3); \\ \tilde{v}_5(\varphi) &= \cos(\beta_5\varphi); & \tilde{v}_6(\varphi) &= \sin(\beta_5\varphi),\end{aligned}\quad (24)$$

то используя правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $0/0$, можно убедиться, что при $\beta_3 \rightarrow \beta_1$ система решений (24) стремится к системе решений (23). Поскольку такая система решений не удовлетворяет уравнению (14) на интервале $\tilde{a} \in (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, здесь необходима уже другая фундаментальная система, которая соответствовала бы уравнению (14) как в самой точке \tilde{a}_1 , так и в ее правой окрестности. Нетрудно убедиться, что этому условию удовлетворяет система

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(\varphi) &= e^{\alpha_1\varphi} \cos(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_2(\varphi) &= e^{\alpha_1\varphi} \sin(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_3(\varphi) &= (e^{\alpha_1\varphi} - e^{-\alpha_1\varphi}) \cos(\beta_1\varphi) / (2\alpha_1); \\ \tilde{v}_4(\varphi) &= (e^{\alpha_1\varphi} - e^{-\alpha_1\varphi}) \sin(\beta_1\varphi) / (2\alpha_1); \\ \tilde{v}_5(\varphi) &= \cos(\beta_5\varphi); & \tilde{v}_6(\varphi) &= \sin(\beta_5\varphi),\end{aligned}\quad (25)$$

которая при $\alpha_1 \rightarrow 0$ стремится к фундаментальной системе решений (23).

На рис. 5. показано поведение значений определителя системы (22) слева и справа от точки \tilde{a}_1 . Ввиду того, что в знаменателях решений (24) и (25) содержатся величины, стремящиеся к нулю по мере приближения \tilde{a} к точке \tilde{a}_1 как слева, так и справа, из этих решений невозможно строго получить значение $Det(\tilde{a}_1)$, а можно только как угодно близко подойти численно к этой точке.

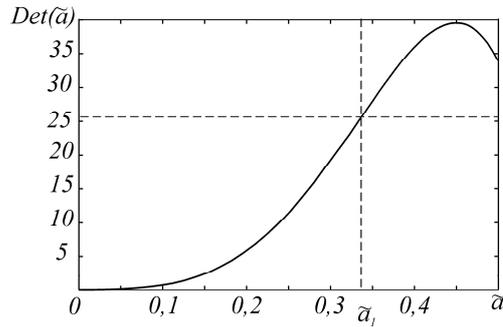


Рис. 5

Окончательно утверждать, что $Det(\tilde{a}_1) \neq 0$, можно, вычислив $Det(\tilde{a})$ на малом интервале вокруг точки \tilde{a}_1 с использованием фундаментальной системы решений (23), не имеющей особенностей в точке \tilde{a}_1 . Значения $Det(\tilde{a})$ на интервале

$$\tilde{a} \in [0,336747555; 0,336747556],$$

который включает точку \tilde{a}_1 , заполняют на графике область на перекрестке пунктирных линий, соединя левую и правую ветви кривой. Отсутствие нулевых значений среди вычисленных величин позволяет утверждать, что точка \tilde{a}_1 не добавляет к рассматриваемой краевой задаче дополнительных собственных значений.

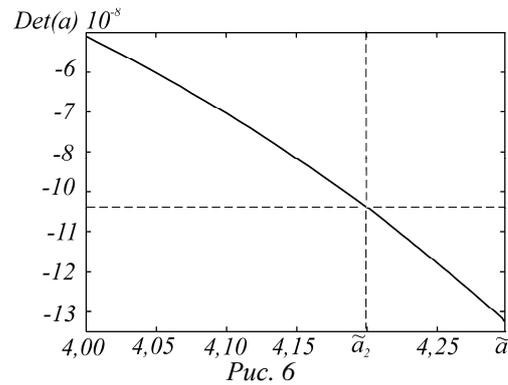


Рис. 6

Аналогично было исследовано поведение $Det(\tilde{a})$ в окрестности точки \tilde{a}_2 . Фундаментальная система решений в самой точке может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\varphi) &= e^{-\alpha_1\varphi}; & \tilde{v}_2(\varphi) &= \varphi e^{-\alpha_1\varphi}; & \tilde{v}_3(\varphi) &= e^{\alpha_1\varphi}; & \tilde{v}_4(\varphi) &= \varphi e^{\alpha_1\varphi}; \\ \tilde{v}_5(\varphi) &= \cos(\beta_5\varphi); & \tilde{v}_6(\varphi) &= \sin(\beta_5\varphi), \end{aligned} \quad (26)$$

для интервала $\tilde{a} \in (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2]$ – в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\varphi) &= e^{-\alpha_1\varphi} \cos(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_2(\varphi) &= e^{-\alpha_1\varphi} \sin(\beta_1\varphi) / \beta_1; \\ \tilde{v}_3(\varphi) &= e^{\alpha_1\varphi} \cos(\beta_1\varphi); & \tilde{v}_4(\varphi) &= e^{\alpha_1\varphi} \sin(\beta_1\varphi); \\ \tilde{v}_5(\varphi) &= \cos(\beta_5\varphi); & \tilde{v}_6(\varphi) &= \sin(\beta_5\varphi), \end{aligned} \quad (27)$$

а для интервала $\tilde{a} \in [\tilde{a}_2, \infty)$ – в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\varphi) &= e^{-\alpha_1\varphi}; & \tilde{v}_2(\varphi) &= (e^{-\alpha_1\varphi} - e^{-\alpha_3\varphi}) / (\alpha_3 - \alpha_1); \\ \tilde{v}_3(\varphi) &= e^{\alpha_1\varphi}; & \tilde{v}_4(\varphi) &= (e^{\alpha_1\varphi} - e^{-\alpha_3\varphi}) / (\alpha_1 - \alpha_3); \\ \tilde{v}_5(\varphi) &= \cos(\beta_5\varphi); & \tilde{v}_6(\varphi) &= \sin(\beta_5\varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Результаты численного исследования представлены на рис.6. Они могут быть прокомментированы по аналогии с результатами для точки \tilde{a}_1 .

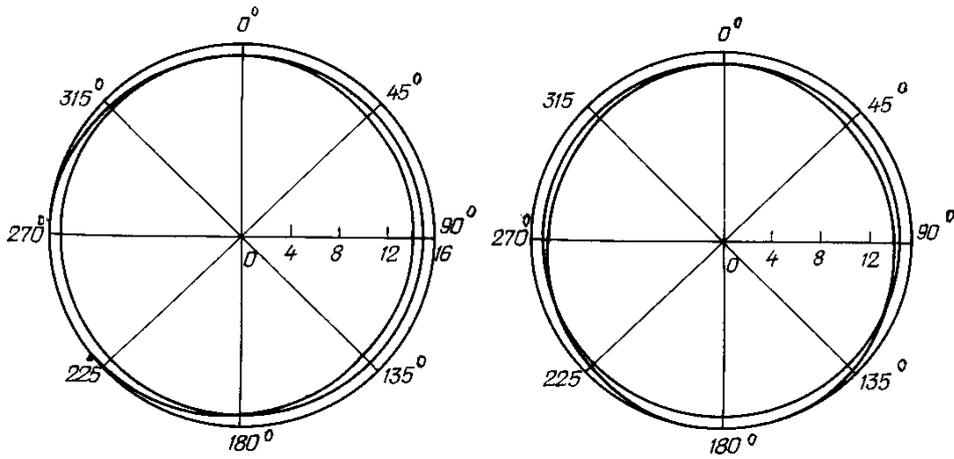


Рис. 7

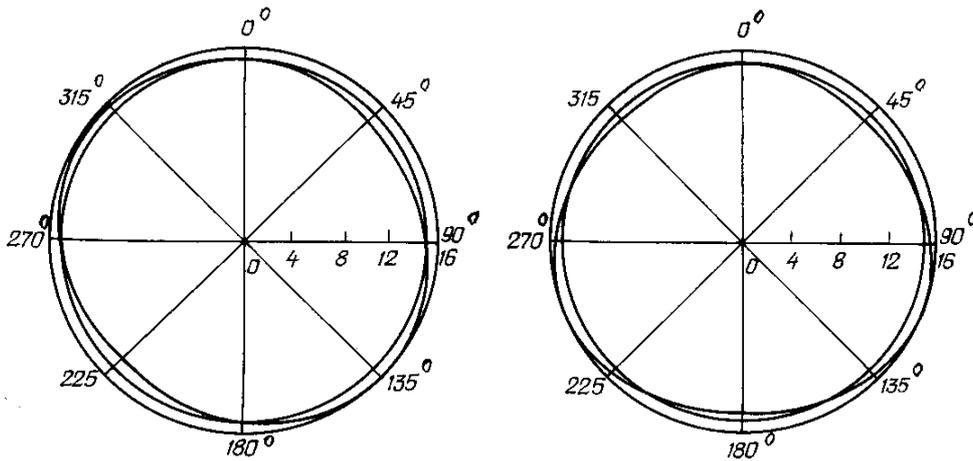


Рис. 8

К сожалению, авторам не удалось доказать строго аналитически, что точки \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 не добавляют новых собственных чисел в систему (для точки \tilde{a}_0 это сделать удалось), тем не менее представляется, что численные исследования достаточно убедительно это показали. Вычисления проведены с помощью FORTRAN программы и выполнены с двойной точностью.

Собственные формы задачи для первых четырех собственных чисел при радиусе кольца 15 м показаны на рис. 7, 8.

Вычисленные значения параметров \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 составляют: $\tilde{a}_1=0,336747555555558$; $\tilde{a}_2=4,19959644444441$. Эти значения не зависят от краевых условий.

№	Параметр \tilde{a}
1	0,566421286973558
2	1,59520327216156
3	3,38458553846141
4	5,75492472167226
5	8,68973107421024
6	12,1327525627694
7	16,1061285023346
8	20,5736260151381

Значения параметра \tilde{a} , соответствующие первым восьми собственным числам рассмотренной краевой задачи, приведены в таблице, где № – порядковый номер, \tilde{a} – параметр.

Заключение.

Таким образом, в данной статье рассмотрена краевая задача для дифференциального оператора 6-го порядка, соответствующего колебаниям упругого кругового кольца постоянного сечения, закрепленного в одной точке, в его плоскости. Решение проведено прямыми численными методами с вычислением определителя шестого порядка на каждом шаге. Разработанная методика и написанная программа вычислений может быть использована для произвольных краевых условий.

РЕЗЮМЕ. В рамках крайової задачі для відповідного диференційного оператора 6-го порядку чисельно визначено частоти та форми власних коливань пружного кільця, що закріплене в одній точці. Кільце моделює велику кільцеву антену, що повільно збільшує свій розмір у стані невагомості. Розглянуто згинні коливання в площині кільця. Наведено результати розрахунків.

1. Алешин А.Я. О собственных частотах колебаний пространственных криволинейных стержней произвольного сечения // Тр. ВНИИФТРИ. – 1971. – **8 (38)**. – С.55 – 66.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
3. *Вибрации в технике*: Справочник: В 6-ти т. / Ред. В.Н.Челомей (пред). Т.3. – Колебания машин, конструкций и их элементов / Под ред. Ф.М.Диментберга и К.С.Колесникова. – М.: Машиностроение, 1980. – 544 с
4. Грудев И.Д. О больших прогибах пространственных тонких стержней // Тр. ВНИИФТРИ. – 1971. – **8 (38)**. – С. 17 – 37.
5. Ден - Гартог Дж.П. Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960. – 580 с.
6. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
7. Ляв А.Э.Х. Математическая теория упругости. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1953. – 468 с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
10. Тимошенко С.П. Сопrotивление материалов. Т. I. – М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1960. – 379 с.
11. Abramovich H., Zarutskii V. A. Stability and vibrations of nonclosed circular cylindrical shells reinforced with discrete longitudinal ribs // Int. App. Mech. – 2008. – **44**, N 1. – P.16 – 22.
12. Avramov K. V. Using nonlinear normal modes to analyze forced vibrations // Int. App. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P.1405 – 1412.
13. Gavrilenko G. D., Matsner V. I., Kutenkova O. A. Free Vibrations of Ribbed Cylindrical Shells with Local Axisymmetric Deflections // Int. App. Mec. – 2008. – **44**, N 9. – P.1006 – 1014.
14. Grigorenko A. Ya., Mal'tsev S. A. Natural Vibrations of Thin Conical Panels of Variable Thickness // Int Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 11. – P. 1221 – 1231.

Поступила 29.01.2010

Утверждена в печать 21.10.2010