

Л. П. Хорошун, Д. В. Бабич

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ СЛОИСТОГО
КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ДЛИТЕЛЬНОЙ
ПОВРЕЖДАЕМОСТИ КОМПОНЕНТОВ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057. Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A statement is done and a solution is given for the problem on bifurcation stability of rectangular plates made of layered composite materials with allowance for the long-term damage of carrying layers.

Key words: layered composite; long-term damage of carrying layers; bifurcation stability; critical time; plate.

Введение.

Инженерная практика свидетельствует, что повреждаемость материалов может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте концентрации повреждений во времени после приложения нагрузки. Основы структурной теории длительной повреждаемости макрооднородных и композитных материалов изложены в работах [11, 13].

Процесс повреждаемости компонентов композитных материалов моделируется разрушением рассеянных микрообъемов компонентов материала и образованием на их месте расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной либо экспоненциально-степенной функциями долговечности, определяемых зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса. Задачи устойчивости для тонкостенных конструкций с учетом кратковременной повреждаемости материалов рассмотрены в [7 – 10, 12]. В настоящей работе осуществлена постановка и получено решение задачи о бифуркационной устойчивости прямоугольных пластин из слоистого композитного материала с учетом длительного микроразрушения отдельных слоев. Особенностью деформирования материалов при длительной повреждаемости является рост во времени макродеформаций при заданных постоянных значениях макронапряжений и снижение макронапряжений при заданных деформациях. Эти явления связаны с изменением во времени эффективных упругих характеристик повреждающегося материала. Аналогичные явления наблюдаются в случае ползучести материалов, описываемой теорией старения [1].

В силу формального сходства в описании процессов деформирования материалов при ползучести (вариант теории старения) и длительной повреждаемости в постановке и решении задач устойчивости тел во втором случае целесообразно использовать подходы и понятия, применяемые при исследовании устойчивости тонкостенных конструкций при ползучести [1, 2, 4, 5].

При ползучести материала понятие «критическое значение нагрузки (напряжения)» теряет определенность, поскольку практически при любом значении нагрузки

по истечении определенного времени («критического времени») возможна смена основной формы равновесия тонкостенной конструкции в силу самопроизвольного роста деформаций при постоянном значении нагрузки. Исследование устойчивости тонкостенных конструкций при ползучести, сводящееся к определению критического времени потери устойчивости, проводится с использованием различных вариантов критерия выпучивания [1, 2, 4, 5]. Наиболее предпочтительный из них связан с применением для определения критического времени формул критических напряжений, получаемых путем решения соответствующих задач устойчивости в нелинейно-упругой области с использованием касательно-модульной модели (концепция продолжающегося нагружения) [12]. Указанный критерий является разновидностью статического критерия устойчивости Эйлера, поскольку для определения критического времени используются выражения критических напряжений, получаемых с использованием бифуркационного подхода. Ниже показана процедура применения указанного статического критерия для определения критического времени выпучивания пластин из длительно повреждающихся слоистых композитных материалов.

Исследование устойчивости слоистых пластин с учетом длительной повреждаемости материалов проводится в два этапа. На первом этапе с использованием касательно-модульной модели определяются формулы для критических напряжений пластин с учетом мгновенной повреждаемости материала [7]. Затем для заданных напряжений, которые отождествляются с критическими напряжениями пластин при длительно повреждающемся материале, находятся соответствующие значения критического времени с использованием выражений баланса пористости для длительно повреждающегося слоистого композитного материала. Основанием для такого подхода служит то, что связь между макронапряжениями и макродеформациями в возмущенном состоянии конструкций для материалов при кратковременной и длительной повреждаемости по виду совпадает [7]. Отличие состоит в форме записи уравнений баланса пористости, в которых отражается особенность накопления поврежденности в слоях композитного материала с течением времени нагружения.

Построение уравнений устойчивости для пластин из изотропных повреждающихся материалов проведено [12] по аналогии со случаем упруго-пластических материалов [1] на основе идеи Эйлера о ветвлении решений с использованием обобщенного уравнения состояния, сформулированного в виде связи через модуль сдвига интенсивностей напряжений и деформаций. В случае анизотропных материалов в зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций входит несколько характеристик упругости, вследствие чего не представляется возможным воспользоваться указанным подходом для нахождения приращений напряжений в возмущенном состоянии при выводе уравнений устойчивости пластин из длительно повреждающихся анизотропных композитных материалов.

Ниже для достижения указанной цели используется прямое варьирование уравнений состояния, представляющих нелинейные зависимости между макронапряжениями и макродеформациями слоистого композита. Предлагаемый подход применим также и при выводе уравнений устойчивости тонкостенных конструкций из изотропных повреждающихся материалов.

В [12] показано, что подход к исследованию устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся материалов на основе концепции продолжающегося нагружения является более предпочтительным по сравнению с концепцией приведенно-модульной нагрузки как с точки зрения точности результатов, так и с точки зрения упрощения решения задач, поскольку в этом случае отпадает необходимость в определении зон разгрузки и догрузки. В связи с этим ниже рассматриваем устойчивость слоистых пластин на основе концепции продолжающегося нагружения.

§1. Уравнения состояния для слоистого материала с повреждающимися изотропными компонентами.

Рассмотрим слоистый материал, изотропные слои которого расположены в плоскости x_1x_2 . Уравнения состояния для слоистого N -компонентного материала с учетом накопления микроразрушений в слоях получены в работе [13]. Рассеянные микрповреждения в i -ом компоненте композитного материала моделируются системой

стохастически расположенных квазисферических микропор с объемным содержанием p_i , которое изменяется с течением времени при постоянной нагрузке. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига неразрушенной части i -го компонента K_i , μ_i , а объемные содержания пористого i -го компонента – c_i . Если заданы макродеформации композита ε_{ij} , то макронапряжения σ_{ij} с ними будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda_{11}^* \varepsilon_{11} + \lambda_{12}^* \varepsilon_{22} + \lambda_{13}^* \varepsilon_{33}; & \sigma_{22} &= \lambda_{12}^* \varepsilon_{11} + \lambda_{11}^* \varepsilon_{22} + \lambda_{13}^* \varepsilon_{33}; & \sigma_{12} &= 2\lambda_{66}^* \varepsilon_{12}; \\ \sigma_{33} &= \lambda_{13}^* \varepsilon_{11} + \lambda_{13}^* \varepsilon_{22} + \lambda_{33}^* \varepsilon_{33}; & \sigma_{13} &= 2\lambda_{44}^* \varepsilon_{13}; & \sigma_{23} &= 2\lambda_{44}^* \varepsilon_{23}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Эффективные упругие постоянные λ_{mn}^* в (1.1) определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu^* (\lambda^* + \mu^*)}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda^* \mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle; & \lambda_{66}^* &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) / 2; \\ \lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle; & \lambda_{33}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda^* + 2\mu^*} \right\rangle^{-1}; & \lambda_{44}^* &= \left\langle \frac{1}{\mu^*} \right\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &= K_i^* - \frac{2}{3} \mu_i^*; & \langle f^* \rangle &= \sum_{i=1}^N c_i f_i^*; & \sum_{i=1}^N c_i &= 1; & K_i^* &= \frac{4(1-p_i)^2 K_i \mu_i}{3p_i K_i + 4(1-p_i) \mu_i}; \\ \mu_i^* &= \frac{(1-p_i)^2 \mu_i (9K_i + 8\mu_i)}{3(3-p_i) K_i + 4(2+p_i) \mu_i}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В дальнейшем для вывода уравнений устойчивости пластин потребуются уравнения состояния при плоском напряженном состоянии. Если отнести пластину к системе координат $0x_1x_2x_3$, в которой оси $0x_1$ и $0x_2$ расположены в срединной плоскости пластины, а ось $0x_3$ направлена по нормали к ней, то плоское напряженное состояние будет реализоваться при $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. В этом случае связь между макронапряжениями и макродеформациями слоистого композита на основании (1.1) имеет вид

$$\sigma_{11} = a_{11} \varepsilon_{11} + a_{12} \varepsilon_{22}; \quad \sigma_{22} = a_{12} \varepsilon_{11} + a_{11} \varepsilon_{22}; \quad \sigma_{12} = 2a_{66} \varepsilon_{12} \quad (1.4)$$

или в другой форме

$$\varepsilon_{11} = \frac{a_{11} \sigma_{11} - a_{12} \sigma_{22}}{a_{11}^2 - a_{12}^2}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{a_{11} \sigma_{22} - a_{12} \sigma_{11}}{a_{11}^2 - a_{12}^2}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2a_{66}}. \quad (1.5)$$

Постоянные a_{ij} через параметры (1.2) определяются формулами

$$a_{11} = \lambda_{11}^* - \frac{\lambda_{13}^{*2}}{\lambda_{33}^*}; \quad a_{12} = \lambda_{12}^* - \frac{\lambda_{13}^{*2}}{\lambda_{33}^*}; \quad a_{66} = \lambda_{66}^*. \quad (1.6)$$

Необходимо отметить, что для постоянных a_{ij} являются нелинейные выражения относительно компонент тензора средних деформаций в слоистом композите ε_{ij} в силу зависимости параметров λ_{mn}^* от текущей пористости материала слоев p_i , которая зависит от продолжительности и уровня нагружения тела.

Процесс совместного деформирования и длительного объемного микроразрушения слоистого композита описывается согласно работе [13]. Объемное содержание микроповреждений в i -ом слое, характеризуемое пористостью p_i , находится из уравнения баланса пористости, которое при длительной повреждаемости для заданных макронапряжений σ_{ij} представляется в виде

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i}) F_i \left[I_{\bar{\sigma}}^i \psi_i(\bar{t}_i) \right], \quad (1.7)$$

где функция микродолговечности определяется соотношением

$$\psi_i(\bar{t}_i) = \frac{1 + \bar{t}_i^{1/n_i}}{1 + \gamma_i \bar{t}_i^{1/n_i}}. \quad (1.8)$$

В (1.7), (1.8) обозначено: p_{0i} – начальная пористость в i -ом компоненте слоистого композита; $I_{\bar{\sigma}}^i = I_{\sigma'}^i / (1 - p_i)$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ по неповрежденной части i -го слоя композита; $I_{\sigma'}^i$ – второй инвариант тензора средних напряжений σ'_{ij} в i -ом пористом слое; $\bar{t}_i = t / \tau_{0i}$, τ_{0i} – соответственно, безразмерное и некоторое характерное время; показатель n_i и коэффициент γ_i определяются из экспериментальных кривых долговечности материалов слоев композита.

Функции $F_i(k_i)$ предельного значения k_i ($k_i = I_{\bar{\sigma}}^i \psi_i(\bar{t}_i)$) для повреждающегося компонента можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ \left(\frac{k_i - k_{0i}}{k_{1i} - k_{0i}} \right)^{\alpha_i}, & k_{0i} \leq k_i \leq k_{1i}; \\ 1, & k_i > k_{1i} \end{cases}, \quad (1.9)$$

или распределением Вейбулла

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ 1 - \exp \left[-m_i (k_i - k_{0i})^{\alpha_i} \right], & k_i \geq k_{0i}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь k_{0i} – минимальная величина предельного значения k_i , с которого начинается разрушение в некоторых объемах i -ого слоя; k_{1i} , m_i , α_i – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в i -ом компоненте композита.

Средние по пористому i -му слою напряжения с соответствующими деформациями связаны формулой [3]

$$\sigma_{mn}^{\prime i} = \lambda_i^* \varepsilon_{mn}^{\prime i} \delta_{mn} + 2\mu_i^* \varepsilon_{mn}^{\prime i}. \quad (1.11)$$

Для определения концентрации повреждаемости материала в i -ом слое p_i необходимо выразить напряжения в скелете слоя $\bar{\sigma}_{mn}^i$ через макронапряжения пластины. Для этой цели понадобятся полученные в [3] выражения, связывающие средние деформации в пористом i -ом слое $\varepsilon_{mn}^{\prime i}$ с макродеформациями слоистого композита ε_{mn} , т.е.

$$\varepsilon_{mn}^{\prime i} = \varepsilon_{mn}; \quad \varepsilon_{m3}^{\prime i} = \frac{1}{\mu_i^*} \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \varepsilon_{m3} \quad (m, n = 1, 2); \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_{33}^i = \frac{1}{\lambda_i^* + 2\mu_i^*} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left[\left(\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \lambda_i^* \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{33} \right].$$

С учетом соотношений (1.10) – (1.6), (1.11), (1.12) средние микронапряжения в пористом i -ом слое через макронапряжения слоистого композита при плоском напряженном состоянии определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^i &= \frac{a_{11} [\lambda_i^* (1 + \bar{\lambda}) + 2\mu_i^*] - a_{12} \lambda_i^* (1 + \bar{\lambda})}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \sigma_{11} + \frac{-a_{12} [\lambda_i^* (1 + \bar{\lambda}) + 2\mu_i^*] + a_{11} \lambda_i^* (1 + \bar{\lambda})}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \sigma_{22}; \\ \sigma_{22}^i &= \frac{a_{11} [\lambda_i^* (1 + \bar{\lambda}) + 2\mu_i^*] - a_{12} \lambda_i^* (1 + \bar{\lambda})}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \sigma_{22} + \frac{-a_{12} [\lambda_i^* (1 + \bar{\lambda}) + 2\mu_i^*] + a_{11} \lambda_i^* (1 + \bar{\lambda})}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \sigma_{11}; \\ \sigma_{33}^i &= \frac{[\lambda_i^* (1 + \bar{\lambda}) + 2\bar{\lambda} \mu_i^*]}{a_{11} + a_{12}} (\sigma_{11} + \sigma_{22}); \quad \sigma_{12}^i = \frac{\mu_i^*}{a_{66}} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В (1.13) обозначено: $\bar{\lambda} = -\lambda_i^* / (\lambda_i^* + 2\mu_i^*)$.

Микронапряжения в неразрушенной части i -го слоя определяются формулой

$$\bar{\sigma}_{mn}^i = \frac{\sigma_{mn}^i}{1 - p_i}. \quad (1.14)$$

§2. Уравнения бифуркационной устойчивости для пластин из повреждающегося слоистого композита.

Рассмотрим пластину толщиной h из слоистого N -компонентного материала, набранного из слоев с толщинами, существенно меньшими толщины пластины. Предполагается, что с течением времени нагружения слой материала повреждается путем образования стохастически распределенных по их объему квазисферических пустых пор с плотностью p_i .

Смена основной формы равновесия пластины по истечении некоторого времени возможна при значениях задаваемых макронапряжений σ_{ij}^0 , меньших критического значения для пластины из сплошного (неповрежденного) слоистого композита. Поэтому в качестве характеристики, определяющей смену основной формы равновесия пластины, по аналогии с теорией устойчивости при ползучести, вводится понятие критического времени, измеряемого промежутком времени от момента начала нагружения до момента смены основной формы равновесия пластины. Уравнение нейтрального равновесия для пластины при длительной повреждаемости слоистого композитного материала при заданных напряжениях по виду совпадает с таковым для пластины при кратковременной повреждаемости материала. Различие состоит лишь в том, что при исследовании устойчивости пластины при длительной повреждаемости материала параметры основного напряженного состояния задаются, а при кратковременной повреждаемости – определяются. В случае длительной повреждаемости материала определению подлежит критическое время. Совпадение вида уравнений устойчивости пластин при кратковременной и длительной повреждаемости является следствием аналогии нелинейных уравнений состояния для рассматриваемых материалов в возмущенном состоянии (1.1).

С учетом вышеизложенного для исследования бифуркационной устойчивости однородного основного безмоментного напряженного состояния пластины при длительной повреждаемости слоистого композитного материала можно воспользоваться уравнением вида [7]

$$D_1 [a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] + T_{11}^0 w_{,11} + T_{22}^0 w_{,22} + 2T_{12}^0 w_{,12} = 0, \quad (2.1)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{\alpha}_{11}; \quad a_2 = \bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{21} + 2\bar{\alpha}_{33}; \quad a_3 = \bar{\alpha}_{22}; \quad a_4 = \bar{\alpha}_{13} + \bar{\alpha}_{31}; \quad a_5 = \bar{\alpha}_{23} + \bar{\alpha}_{32}; \\ \alpha_{11} &= a_{11} + \frac{\partial a_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} e_{11}^0 + \frac{\partial a_{12}}{\partial \varepsilon_{11}} e_{22}^0; \quad \alpha_{12} = a_{12} + \frac{\partial a_{11}}{\partial \varepsilon_{22}} e_{11}^0 + \frac{\partial a_{12}}{\partial \varepsilon_{22}} e_{22}^0; \\ \alpha_{13} &= \frac{\partial a_{11}}{\partial \varepsilon_{12}} e_{11}^0 + \frac{\partial a_{12}}{\partial \varepsilon_{12}} e_{22}^0; \quad \alpha_{21} = a_{12} + \frac{\partial a_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} e_{22}^0 + \frac{\partial a_{12}}{\partial \varepsilon_{11}} e_{11}^0; \\ \alpha_{22} &= a_{11} + \frac{\partial a_{11}}{\partial \varepsilon_{22}} e_{22}^0 + \frac{\partial a_{12}}{\partial \varepsilon_{22}} e_{11}^0; \quad \alpha_{23} = \frac{\partial a_{11}}{\partial \varepsilon_{12}} e_{22}^0 + \frac{\partial a_{12}}{\partial \varepsilon_{12}} e_{11}^0; \\ \alpha_{31} &= 2 \frac{\partial a_{66}}{\partial \varepsilon_{11}} e_{12}^0; \quad \alpha_{32} = 2 \frac{\partial a_{66}}{\partial \varepsilon_{22}} e_{12}^0; \quad \alpha_{33} = 2a_{66} + \frac{\partial a_{66}}{\partial \varepsilon_{12}} e_{12}^0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.1), (2.2) принято: $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} / E_1$; $D_1 = E_1 h^3 / 12$; E_1 – модуль упругости неповрежденного слоистого материала; $T_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 h$ – погонные тангенциальные усилия в докритическом напряженном состоянии пластины; σ_{ij}^0 – мембранные напряжения в основном напряженном состоянии; $\varepsilon_{ij} = e_{ij}^0 + x_3 \chi_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) – полные деформации в возмущенном состоянии пластины; $\chi_{11} = -w_{,11}$; $\chi_{12} = -w_{,12}$; $\chi_{22} = -w_{,22}$ – выражения для кривизн и кручения срединной поверхности пластины; $e_{11}^0 = u_{,1}$; $e_{22}^0 = v_{,2}$; $e_{12}^0 = 0,5(u_{,2} + v_{,1})$ – деформации пластины в основном мембранном деформированном состоянии; w – прогиб пластины.

К уравнению (2.1) необходимо присоединить краевые условия, отвечающие характеру закрепления торцов пластины.

Поскольку коэффициенты a_{ij} зависят от пористости слоев p_i , которая определяется макродеформациями в композите, производные в (2.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (2.3)$$

§3. Устойчивость слоистой пластины при одноосном сжатии.

В качестве примера рассмотрим задачу потери устойчивости при заданных напряжениях длинной пластины из двухкомпонентного слоистого материала. Предполагаем, что в процессе нагружения длительно повреждается материал несущих слоев ($i = 1$). Пластина подвергается одноосному сжатию вдоль короткой стороны в направлении оси $0x_1$ ($T_{11} \neq 0$). Уравнение (2.1) в этом случае принимает вид

$$D_1 a_1 w_{,1111} + T_{11}^0 w_{,11} = 0. \quad (3.1)$$

При шарнирном опирании длинных сторон пластины шириной a решение уравнения (3.1) имеет вид

$$w = A \sin \frac{n\pi x_1}{a}, \quad (3.2)$$

где n – количество полуволн формы потери устойчивости пластины в направлении сжатия. Критические напряжения, согласно (3.1), (3.2), определяются соотношением

$$\sigma_{11}^0 = \frac{\pi^2 h^2 a_1 E_1}{12a^2} \left(a_1 = \frac{\alpha_{11}}{E_1}; \alpha_{11} = a_{11} + \frac{\partial a_{11}}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon_{11}} e_{11}^0 + \frac{\partial a_{12}}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon_{11}} e_{22}^0 \right). \quad (3.3)$$

При заданном напряжении σ_{11}^0 , отождествляемом с критическим напряжением потери устойчивости пластины в момент времени \bar{t}_1 (критическое время), значение последнего определяется формулой (3.3). Соотношение (3.3) является нелинейным выражением относительно критического времени \bar{t}_1 в связи с зависимостью a_1 от p_1 , определяемой формулами (1.7), (1.8).

Выражение (3.3) требует расшифровки с учетом соотношений, приведенных выше. Выражения a_j определяются с использованием формул (1.2) – (1.6). При $p_{10} = 0$ на основании (1.7) имеем $p_1 = F_1(I_\sigma \psi(\bar{t}_1))$. Второй инвариант тензора напряжений в скелете несущих слоев через средние напряжения в пористом компоненте с учетом (1.14) определяется выражением

$$I_\sigma^1 = \frac{1}{1-p_1} \sqrt{\frac{1}{6} \sqrt{(\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1)^2 + (\sigma_{22}^1 - \sigma_{33}^1)^2 + (\sigma_{33}^1 - \sigma_{11}^1)^2}}. \quad (3.4)$$

Для решения нелинейного уравнения (3.3) второй инвариант тензора напряжений в скелете несущих слоев в рассматриваемом случае необходимо выразить через макронапряжение σ_{11}^0 . Для этого необходимо воспользоваться формулами (1.13) при $\sigma_{11} = \sigma_{11}^0$; $\sigma_{22}^0 = 0$.

В пренебрежении нормальной к срединной поверхности пластины деформацией ($\varepsilon_{33}^0 = 0$) соотношение (3.4) принимает вид

$$I_\sigma^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1-p_1} \frac{\mu_1^* \sigma_{11}^0 \psi_1(\bar{t}_1)}{a_{11} + a_{12}} \sqrt{D}. \quad (3.5)$$

Уравнение баланса пористости с учетом (1.9) при $\alpha_1 = 1$ и (3.5) определяется соотношением

$$p_1(1-p_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1-p_1} \frac{\mu_1^* \sigma_{11}^0 \psi_1(\bar{t}_1)}{k_{11}(a_{11} + a_{22})} \sqrt{D} \left(D = \frac{a_{11}^2 + a_{11}a_{12} + a_{12}^2}{(a_{11} - a_{12})^2} + \frac{\nu_1^*}{(1-\nu_1^*)^2} \right). \quad (3.6)$$

Для определения производной $\partial p_1 / \partial \varepsilon_{11}$, входящей в соотношение (3.3), используем уравнение (3.6). Тогда имеем

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon_{11}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{a_{11}}{k_{11}} \mu_1^* \psi_1(\bar{t}_1) A}{1-2p_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{11}^0 \psi_1(\bar{t}_1)}{k_{11}} \left\{ A \left(\frac{\partial \mu_1^*}{\partial p_1} - \frac{\mu_1^*}{a_{11}^2 - a_{12}^2} B \right) + \frac{3BC}{2} \right\}}, \quad (3.7)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{D}}{a_{11} + a_{12}}; \quad B = a_{11} \frac{\partial a_{12}}{\partial p_1} - a_{12} \frac{\partial a_{11}}{\partial p_1}; \quad C = \frac{\mu_1^*}{(a_{11} - a_{12})^3 \sqrt{D}}.$$

Мембранные макродеформации в основном напряженном состоянии пластины определяются формулами

$$e_{11}^0 = \frac{a_{11}\sigma_{11}^0}{a_{11}^2 - a_{12}^2}; \quad e_{22}^0 = -\frac{a_{12}\sigma_{11}^0}{a_{11}^2 - a_{12}^2}. \quad (3.8)$$

Выражения (3.3) – (3.8) зависят от компонент основного напряженно-деформированного состояния пластины в силу исчезающе малых, как это следует из постановки задачи о бифуркационной устойчивости, возмущений докритического напряженного состояния при переходе в бесконечно близкое равновесное состояние.

С учетом приведенных соотношений при заданных механических характеристиках компонентов длительно повреждающегося слоистого композита и геометрических характеристиках пластины критическое время потери устойчивости пластины при заданном напряжении σ_{11}^0 определяем в результате решения нелинейного уравнения (3.3) методом последовательных приближений либо посредством применения обратного метода.

§4. Числовой пример.

Процедура применения обратного способа решения уравнения (3.3) иллюстрируется на примере определения критического времени для пластины из двухкомпонентного слоистого композитного материала при длительной повреждаемости несущих слоев. Относительная толщина пластины h/R предполагается заданной. Зависимость значений критического времени от величины критических напряжений определяется с использованием соотношения (3.3), а также уравнения баланса пористости для несущих слоев композита (3.6) и функции долговечности (1.8).

Необходимо отметить, что потеря устойчивости пластины из длительно повреждающегося материала возможна не при всех значениях напряжений, меньших по величине верхнего критического значения для пластины из неповрежденного материала, определяемого формулой (3.3) при $p_1 = 0$. Способ определения границ диапазона изменения значений нагрузки в указанном смысле указан ниже.

Значения постоянных упругости неповрежденных компонентов слоистого композита принимаем равными: $E_1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = 0,2$; $E_2 = 0,3 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_2 = 0,35$.

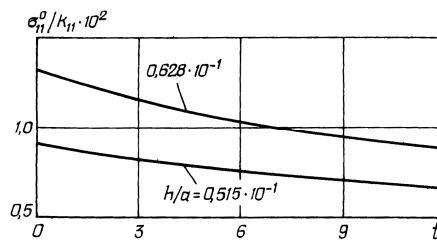
Для описания распределения микропрочности в несущих слоях композита используем степенной закон (1.9) с параметрами $k_{11} = 0,87682 \cdot 10^{10}$ Па; $k_{01} = 0$; $\alpha_1 = 1$.

Долговечность определяется с применением функции $\psi_1(\bar{t}_1)$ в виде (1.8) с параметрами $n_{11} = 1$, $\gamma_1 = 0,01$.

Зависимость критического времени от величины задаваемых напряжений определяется следующим способом. Задаем последовательность значений пористости несущих слоев p_{1i} ($i = 1, 2, 3, \dots$). Затем на основании уравнения (3.3) после исключения из него с учетом (3.6) функции $\psi_1(\bar{t}_1)$ определяем последовательность значений напряжения $(\sigma_{11}^0)_i$, отождествляемых с критическими напряжениями пластины в некоторые моменты критического времени \bar{t}_{1i} , соответствующими последовательности p_{1i} ($i = 1, 2, 3, \dots$). Далее с учетом уравнения (3.6) вычисляем последовательность значений функции $\psi_{1i}(\bar{t}_{1i})$, которыми согласно (1.8) определяются соответствующие значения критического времени \bar{t}_{1i} .

Для рассматриваемой задачи диапазон возможных значений задаваемого напряжения σ_{11}^0 определяется следующим образом. Верхнее значение напряжения σ_{11}^0 связано с мгновенным микроразрушением ($\bar{t}_1 = 0$; $\psi_1(\bar{t}_1) = 1$). Уравнения для вычисления пористости p_1 и соответствующего значения σ_{11}^0 в этом случае вытекают из совокупности соотношений (3.3) и (3.6) при $\psi_1(\bar{t}_1) = 1$. Аналогично вычисляется нижнее значение задаваемых напряжений при условии $\lim_{\bar{t}_1 \rightarrow \infty} \psi_1(\bar{t}_1) = 1/\gamma_1$.

По указанной схеме вычислены значения критического времени для пластин с относительными толщинами $h/a = 0,0628$; $0,0515$ при различных допустимых значениях задаваемых напряжений. Результаты вычисления зависимостей безразмерного параметра критического времени (\bar{t}_1) от безразмерного параметра задаваемых напряжений (σ_{11}^0/k_{11}) для пластин из слоистого материала с объемным содержанием несущих слоев $c_1 = 0,5$ представлены на рисунке.



Значения безразмерных параметров критических напряжений для указанных пластин без учета повреждаемости, соответственно, составляли: $\sigma_{11}^0/k_{11} = 0,1329 \cdot 10^{-2}$; $0,1158 \cdot 10^{-2}$.

Заключение.

В данной работе предложена методика определения критического времени потери устойчивости для прямоугольных пластин из длительно повреждающихся слоистых композитных материалов. Решена задача о бифуркационной устойчивости для одноосно сжатой пластины из длительно повреждающегося слоистого двухкомпонентного композитного материала.

РЕЗЮМЕ. Дано постановку і викладено методику розв'язання задачі про бифуркаційну стійкість прямокутних пластин із шаруватих композитних матеріалів з урахуванням довготривалої пошкоджуваності несучих шарів. Наведено числові результати.

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.
2. Джерард Дж. Гильберт А. Метод критической деформации для выпучивания пластин и оболочек при ползучести // Механика: Сб. переводов и обзоров иностр. период. лит. – 1959. – № 2. – С. 113 – 125.
3. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1. Механика материалов / А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин и др. – К.: Наук. думка, 1982. – 367 с.
4. Хофф Н. Обзор теорий выпучивания при ползучести // Механика: Сб. переводов и обзоров иностр. период. лит. – 1960. – № 1. – С. 63 – 96.
5. Хофф Н. Продольный изгиб при ползучести // Механика: Сб. переводов и обзоров иностр. период. лит. – 1956. – № 6. – С. 118 – 134.
6. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Plates Made of Fibrous Composite with Damageable Components // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 5. – P. 532 – 537.
7. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Rectangular Plates Made of a Laminate Material with Damageable Components // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 5. – P. 548 – 554.
8. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Cylindrical Shells Made of a Laminate Material with Damageable Components // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 6. – P. 677 – 683.
9. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Laminated Convex Shells of Revolution with Microdamages in Laminate Components // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 7. – P. 810 – 817.
10. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Plates and Shells Made of Homogeneous and Composite Materials Subject to Short-Term Microdamage // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 239 – 267.
11. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Rectangular Plates Subject to Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 7. – P. 754 – 761.
12. Khoroshun L.P., Babich D.V. Problems of Plate Stability in Short – Term Damaging of a Material // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 2. – P. 231 – 240.
13. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled Deformation and Long – Term Damage of Layered Materials with Stress-Rupture Microstrength Described by a Fractional – Power Function // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 9. – P. 991 – 999.

Поступила 29.04.2009

Утверждена 21.10.2010