

Л. В. Войтович¹, М. П. Малезик², И. С. Чернышенко³

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЗЛЕ ТРЕЩИН НА КОНТУРЕ ОТВЕРСТИЯ В ФОТОУПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

¹ *Национальный университет водного хозяйства и природопользования, ул. Соборная, 11, 33018, Ровно, Украина, e-mail: viv@rv.uar.net*

² *Национальный педагогический университет им. М.П. Драгоманова, ул. Пирогова, 9, 06601, Киев, Украина, e-mail: malez@ukr.net*

³ *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: prikl@inmech.kiev.ua*

Abstract. The stress-strain state is studied near the cracks locating on the contour of circular hole in a plate made of linearly elastic orthotropic composites under tension forces. The stress intensity coefficients (CIF) distribution near the crack tip is determined by the data of polarization-optical instrumentation. A dependence of CIF values on the ratio of crack length to hole radius as well as on mechanical properties of plate material is established.

Key words: photoelasticity; orthotropic composite plate; circular hole with two cracks on contour; tension; stress intensity coefficients.

Введение.

Теоретическому и экспериментальному исследованию распределения напряжений в композитных элементах конструкций (пластинах, оболочках с концентраторами (отверстиями, трещинами) посвящены работы [1, 3, 6, 7, 11 – 16 и др.]).

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) возле трещин, распространяющихся от границ отверстия в упругих изотропных пластинах, использованы численные [1, 3], расчетно-экспериментальные [2] и экспериментальные [8] методы. Следует заметить, что основные результаты исследований получены в статической постановке. Отметим также, что решения задач в динамической постановке для анизотропных тел с концентраторами напряжений, полученные на основе метода фотоупругости, представлены в работах [12 – 15].

В данной работе исследовано распределение напряжений возле трещин, находящихся на контуре отверстия в пластинах из линейно-упругих волокнистых композитов, нагруженных растягивающим усилием по нормали к направлению трещин. Исследования КИН проведены по данным поляризационно-оптических измерений на соответствующих фотоупругих моделях из волокнистых композитов. При этом использовано методика, которая дает более точный результат по сравнению с ранее опубликованной в работе [16]. Рассматриваемая ниже математическая модель позволяет увеличить окрестность около вершины трещины и этим повысить точность определения порядков полос интерференции, а, следовательно, и КИН.

1. Постановка задачи. Методика исследования.

Для описания механического и оптического поведения материала композитов исходим из предположения, что он является однородным анизотропным телом. Рассмотрим модель пластины из фотоупругого материала, находящейся в условиях ползучести.

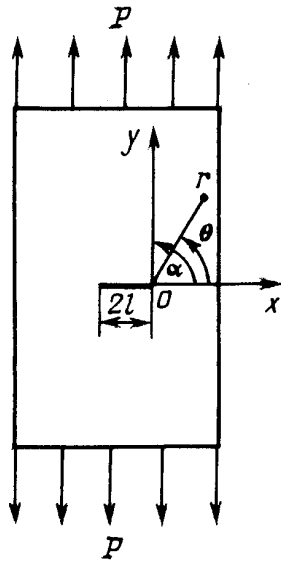


Рис. 1

Примем, что ортотропная пластина ослаблена трещиной на отрезке $(2l)$ вдоль оси x , совпадающей с главным направлением ортотропии материала (рис. 1). Пластина подвержена растягивающим усилиям $P = \text{const}$, приложенным на достаточном удалении от концентратора. В случае плоского напряженного состояния компоненты тензора напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ в ортотропном теле представим через функции напряжений $\chi(\lambda_1), f(\lambda_2)$, определяя их согласно работе [10], такими формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -s_1^2 \operatorname{Re} \chi'(\lambda_1) - s_2^2 \operatorname{Re} f'(\lambda_2); \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} \chi'(\lambda_1) + \operatorname{Re} f'(\lambda_2); \\ \tau_{xy} &= -s_1 \operatorname{Im} \chi'(\lambda_1) - s_2 \operatorname{Im} f'(\lambda_2),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\lambda_j = x + is_j y$, $is_j = \mu_j$ ($j=1, 2$), μ_j – комплексные параметры – корни характеристического уравнения [4]. Принимаем, что

$$\chi'(\lambda_1) = \frac{M_1 \lambda_1}{(\lambda_1^2 - l^2)^{1/2}}; \quad f'(\lambda_2) = \frac{M_2 \lambda_2}{(\lambda_2^2 - l^2)^{1/2}}. \quad (2)$$

Здесь M_1 и M_2 определяются из уравнений (1) и условий на контуре трещины и на бесконечности. В работе [10] показано, что значения M_1 и M_2 связаны с напряжением σ_0 на достаточном удалении от концентратора следующими соотношениями:

$$M_1 = \frac{s_2 \sigma_0}{(s_2 - s_1)}; \quad M_2 = \frac{s_1 \sigma_0}{(s_2 - s_1)}.$$

Введем в вершине трещины локальную систему координат ($\xi = x - l$, $f = y$), а также полярную (радиус r и угол θ) и обозначим $\zeta_j = \lambda_j - l = \xi + is_j f$.

В этом случае из уравнений (2) получим

$$\chi'(\zeta_1) = \frac{M_1 (\zeta_1 + l)}{(2l \zeta_1)^{1/2}} \left(1 + \frac{\zeta_1}{2l}\right)^{-1/2}; \quad f'(\zeta_2) = \frac{M_2 (\zeta_2 + l)}{(2l \zeta_2)^{1/2}} \left(1 + \frac{\zeta_2}{2l}\right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Поскольку при $\zeta_j < 2l$ справедливо равенство

$$\left(1 + \frac{\zeta_j}{2l}\right)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\zeta_j}{2l}\right)^n,$$

где

$$C_n = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)},$$

то формулы (3) принимают такой вид:

$$\chi'(\zeta_1) = M_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_1}{2l}\right)^{-1/2} + \left(\frac{\zeta_1}{2l}\right)^{1/2} \right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\zeta_1}{2l}\right)^n \right];$$

$$f'(\zeta_2) = M_2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_2}{2l} \right)^{-1/2} + \left(\frac{\zeta_2}{2l} \right)^{-1/2} \right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\zeta_2}{2l} \right)^n \right]. \quad (4)$$

Выразим комплексное число $\zeta_j = \xi + is_j f = r(\cos \theta + is_j \sin \theta)$ в тригонометрической форме: $\zeta_j = r p_j (\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j)$, где $\rho_j^2 = (\cos^2 \theta + s_j^2 \sin^2 \theta)$, $\varphi_j = \arctg s_j \operatorname{tg} \theta$. Вычислив действительную Re и мнимую Im части функций $\chi'(\zeta_1)$, $f'(\zeta_2)$ и подставив их в (1), получим выражения для напряжений в окрестности вершины трещины, где выполняются условия нормального отрыва в ортотропной пластине. Они принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_1 s_1 s_2}{\sqrt{\pi l}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2l} \right)^{-1/2} \left(s_2 p_2^{-1/2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - s_1 p_1^{-1/2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \right) + \left(\frac{r}{2l} \right)^{1/2} (s_2 n_2^{1/2} - s_1 n_1^{1/2}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{2l} \right)^{(n-1/2)} \left[(s_2 n_2^{(n-1/2)} - s_1 n_1^{(n-1/2)}) + 2 \left(\frac{r}{2l} \right)^{3/2} (s_2 n_2^{(n+1/2)} - s_1 n_1^{(n+1/2)}) \right] \right\} + \sigma_{0x}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{\pi l (s_2 - s_1)}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2l} \right)^{-1/2} \left(s_2 p_1^{-1/2} \cos \frac{\varphi_1}{2} - s_1 p_2^{-1/2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \right) + \left(\frac{r}{2l} \right)^{1/2} (s_2 n_1^{1/2} - s_1 n_2^{1/2}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{2l} \right)^{(n-1/2)} \left[(s_2 n_1^{(n-1/2)} - s_1 n_2^{(n-1/2)}) + 2 \left(\frac{r}{2l} \right)^{3/2} (s_1 n_2^{(n+1/2)} - s_2 n_1^{(n+1/2)}) \right] \right\}; \quad (5) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_1 s_1 s_2}{\sqrt{\pi l (s_2 - s_1)}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2l} \right)^{-1/2} \left(p_1^{-1/2} \sin \frac{\varphi_1}{2} - p_2^{-1/2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) + \left(\frac{r}{2l} \right)^{1/2} (P_2^{1/2} - P_1^{1/2}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{2l} \right)^{(n-1/2)} \left[(P_2^{(n-1/2)} - P_1^{(n-1/2)}) + 2 \left(\frac{r}{2l} \right)^{3/2} (P_2^{(n+1/2)} - P_1^{(n+1/2)}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $K_1 = \sigma_0 \sqrt{\pi l}$, $n_j^k = p_j^k \cos k \varphi_j$, $P_j^k = p_j^k \sin k \varphi_j$ ($j = 1, 2$); k – показатель степени n_j и P_j .

В случае, когда ортотропная пластина нагружена касательными усилиями τ_0 на бесконечности, то напряжения определим из уравнений (1), (5), выбирая функции напряжений $\chi'(\zeta_1)$, $f'(\zeta_2)$ в виде

$$\psi'(\zeta_m) = (-1)^m \frac{i K_{11}}{\sqrt{\pi l (s_2 - s_1)}} \left[\left(\frac{\zeta_m}{2l} \right)^{-1/2} + \left(\frac{\zeta_m}{2l} \right)^{1/2} \right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\zeta_m}{2l} \right)^n \right].$$

Здесь, функция $\psi'(\zeta_m)$ при $m=1$ соответствует функции $\chi'(\zeta_1)$, а при $m=2$ – функции $f'(\zeta_2)$; $K_{11} = \tau_0 \sqrt{\pi l}$.

Далее определим действительную и мнимую части функций $\chi'(\zeta_1)$, $f'(\zeta_2)$; подставив их в (1), получим выражения для напряжений в окрестности вершины трещины при сдвиге. Эти формулы принимают вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{K_{11}}{\sqrt{\pi l(s_2 - s_1)}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2l} \right)^{-1/2} \left(s_1^2 P_1^{-1/2} \sin \frac{\varphi_1}{2} - s_2^2 P_2^{-1/2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) + \left(\frac{r}{2l} \right)^{1/2} (s_2^2 P_2 - s_1^2 P_1) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{2l} \right)^{(n-1/2)} \left\{ s_2^2 P_2^{(n-1/2)} \left[1 + 2 \left(\frac{r}{2l} \right)^{3/2} P_2^{3/2} \right] - s_1^2 P_1^{(n-1/2)} \left[1 + 2 \left(\frac{r}{2l} \right)^{3/2} P_1^{3/2} \right] \right\} \right\}; \\
\sigma_{yy} &= \frac{K_{11}}{\sqrt{\pi l(s_2 - s_1)}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2l} \right)^{-1/2} \left(P_2^{-1/2} \sin \frac{\varphi_2}{2} - P_1^{-1/2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) + \left(\frac{r}{2l} \right)^{1/2} (P_1^{1/2} - P_2^{1/2}) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{2l} \right)^{(n-1/2)} \left[(P_1^{(n-1/2)} - P_2^{(n-1/2)}) + 2 \left(\frac{r}{2l} \right)^{3/2} (P_1^{(n-1/2)} - P_2^{(n-1/2)}) \right] \right\}; \quad (6) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_{11}}{\sqrt{\pi l(s_2 - s_1)}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2l} \right)^{-1/2} \left(s_2 P_2^{-1/2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - s_1 P_1^{-1/2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \right) + \left(\frac{r}{2l} \right)^{1/2} (s_1 n_1^{1/2} - s_2 n_2^{1/2}) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{2l} \right)^{(n-1/2)} \left[(s_1 n_1^{(n-1/2)} - s_2 n_2^{(n-1/2)}) + 2 \left(\frac{r}{2l} \right)^{3/2} (s_1 n_1^{(n+1/2)} - s_2 n_2^{(n+1/2)}) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь n_j и P_j имеют те же значения, что и в (5).

Отметим, что рассмотренные выше уравнения для ортотропной пластины с трещиной являются справедливыми при условии $r < 2l$. Известные сингулярные уравнения [1] справедливы в окрестности $r \ll l$. Увеличение окрестности около вершины трещины дает возможность повысить точность определения порядков полос интерференции, и также значения КИН (K).

Совместное решение уравнений ортотропной фотоупругости и механики разрушения тел с трещинами позволяет получить соотношения связи для величин порядка полос интерференции m и K , как было показано в [16].

Рассмотрим случай, когда ортотропная пластина имеет трещину, которая расположена вдоль главной оси ототропии ($E_x > E_y$). Пластина растягивается усилием σ_0 вдоль оси y .

Для данного случая уравнение ортотропной фотоупругости [5] примет вид

$$\frac{m}{h} = \sqrt{(P_{22}\sigma_{yy} - P_{11}\sigma_{xx})^2 + (2P_{12}\tau_{xy})^2}, \quad (7)$$

где P_{ij} ($i, j = 1, 2$) – функции оптической ползучести; h – толщина пластины.

Представим (7) в сокращенном виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= K_I A_{11}(s_1, s_2, c, r, \theta) + \sigma_{0x}; \quad \sigma_{yy} = K_I B_{11}(s_1, s_2, c, r, \theta); \\
\tau_{xy} &= K_I C_{11}(s_1, s_2, c, r, \theta).
\end{aligned} \quad (8)$$

где A_{11}, B_{11}, C_{11} – множители при K_I в уравнениях (5).

Подставив (8) в (7), получим равенство

$$\left(\frac{m}{h}\right)^2 = K_I^2 \left(P_{11}^2 A_{11}^2 + P_{22}^2 B_{22}^2 - 2P_{11} A_{11} P_{22} B_{11} + 4P_{12}^2 C_{12}^2 \right) + 2K_I \sigma_{0x} \left(P_{11} A_{11}^2 - P_{11} P_{22} B_{11} \right) + P_{11}^2 \sigma_{0x}^2. \quad (9)$$

Таким образом, полученные выше результаты (уравнения (7) – (9)) позволяют определить КИН с повышенной точностью возле трещин, выходящих из контура круговых отверстий в ортотропных пластинах.

2. Результаты исследования распределения напряжений в пластинах на основе поляризационно-оптического метода.

Экспериментальные исследования проведены на моделях пластин из оптически чувствительных волокнистых композитов на основе эпоксидной смолы ЭД-20, отвержденной полиэтиленполиамином; в качестве армирующего элемента в композитах приняты стекловолокна. Технология изготовления таких материалов и методики исследования их механических и оптических свойств изложены в [5]. Ниже, ограничиваясь только сведениями о механических и оптических свойствах материала, в табл. 1, 2 представлены данные о значениях функций механической ползучести $\psi_{ij}(t)$, комплексных параметров $s_j(t)$ и значениях функций оптической ползучести $P_{ij}(t)$ [16].

Таблица 1

t , мин	$\psi_{11}(t)$	$\psi_{22}(t)$	$\psi_{12}(t)$	$\psi_{66}(t)$	$s_1(t)$	$s_2(t)$
0	2,42	3,76	-1,02	11,98	1,89	0,67
10	2,48	3,88	-1,02	12,71	1,93	0,65
20	2,57	4,10	-1,10	13,51	1,98	0,64
30	2,65	4,29	-1,14	14,12	2,00	0,63
40	2,71	4,33	-1,16	14,63	2,08	0,63
50	2,75	4,40	-1,18	15,16	2,09	0,62
60	2,77	4,49	-1,21	15,51	2,10	0,61

Таблица 2

t , мин	$P_{11}(t)$	$P_{22}(t)$	$P_{12}(t)$
0	0,62	0,83	0,88
10	0,63	0,86	0,94
20	0,64	0,89	0,97
30	0,65	0,91	0,99
40	0,65	0,93	1,00
50	0,65	0,94	1,03
60	0,65	0,94	1,04

Численные исследования проведены для моделей в виде пластин с круговыми отверстиями радиусом R и симметричными трещинами длиной $2l$ (рис. 2), ориентированными по направлению (горизонтали) диаметра отверстия, совпадающего с главным направлением ортотропии ($E_x > E_y$). К пластинам прилагались постоянные рас-

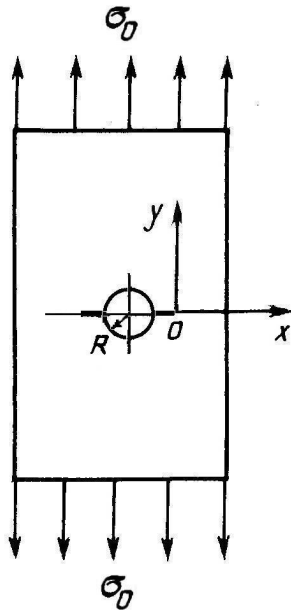


Рис. 2

тягивающие усилия, соответствующие напряжению $\sigma_0 = 6$ МПа по нормали к направлению трещин, при которых имеют место деформации ползучести.

Рассмотрены два варианта моделей: 1) модели с постоянным диаметром отверстия $2R$ и разной длиной трещин $2l$; 2) модели с разными диаметрами отверстий и одной и той же длиной трещин. Все пластины имели ширину 40 мм и толщину 3 мм.

После нагружения пластин через определенные интервалы времени проводилось фотографирование картины интерференционных полос. Координаты порядков полос вдоль радиуса r , исходящего из вершины трещины под углом θ , определяли на компараторе КМ-6.

Графики распределения полос строили вдоль луча $m = \vartheta(r)$. По данным графиков определены величины m и r в необходимом числе точек. Используя полученные величины m и r , из уравнения (8) для выбранных моментов времени определены значения $K_I(t)$. Решение нелинейного уравнения (8) осуществлено [16] с использованием процедуры итераций, основанной на методе Ньютона – Рафсона совместно с методом наименьших квадратов.

На рис. 3 приведены фотографии картин полос в моделях, находящихся в упругом состоянии при $l/R = 0,19$ (а) и $1,6$ (б) для момента времени $t = 0$. Значения порядков полос $m(r)$ (в окрестности вершины трещины вдоль радиуса) и относительных величин коэффициента $K_I^* = K_I/K_I^0$, вычисленных на основе решения уравнения (8), представлены в табл. 3.

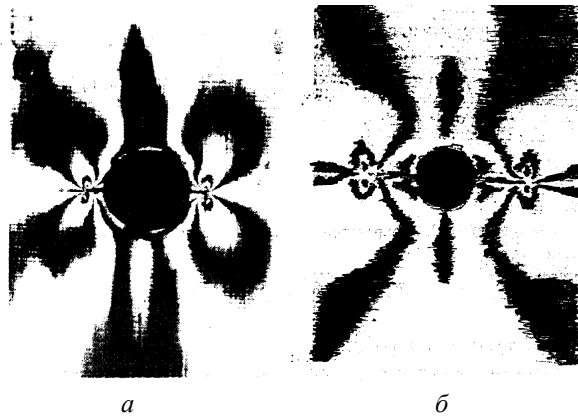


Рис. 3

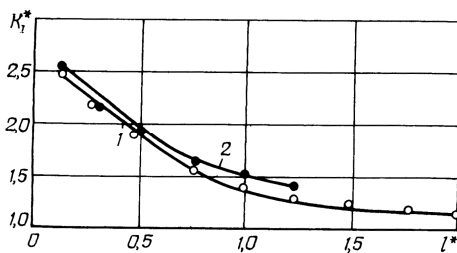


Рис. 4

Графики зависимости значений K_I/K_I^0 с увеличением отношения l/R приведены на рис. 4 (кривая 1). Для сравнения с полученными результатами указаны значения K_I/K_I^0 в случае изотропных моделей (кривая 2).

Таблица 3

r , мм	$m(r)$	
	$l/R = 0,190$	$l/R = 1,160$
0,3	21,40	19,26
0,4	19,48	17,18
0,5	17,44	15,71
0,6	16,22	14,57
0,7	15,26	13,61
0,8	14,37	12,80
0,9	13,64	12,13
1,0	13,01	11,34
K_I/K_I^0	2,52	1,33

Из анализа полученных данных следует, что относительная величина коэффициента интенсивности напряжений возле вершины трещины, находящейся на контуре отверстия, зависит от параметра геометрии модели (l/R). В случае изотропных пластин имеем $K = 3$. В композитных пластинах величины коэффициентов концентрации напряжений возле отверстий существенно зависят как от механических свойств материалов, так и от направления деформирования по отношению к главным направлениям ортотропии. В данном случае для пластины из принятого композитного материала имеем $K^* = 2,95$. Отметим также, что возле трещин в окрестности отверстий вблизи контура численные значения K_I/K_I^0 при $l/R < 0,1$ имеют меньшую величину, а при $l/R > 0,1$ – большую – по сравнению с значениями для изотропных пластин.

Представим также числовые результаты для вязкоупругого решения задачи при двух отношениях l/R , полученные путем замены в упругом решении механических и оптических характеристик материала соответствующими функциями ползучести.

Таблица 4

r , мм	$m(r)$					
	$l/R = 0,42$			$l/R = 1,16$		
	$t = 0$	$t = 5$	$t = 30$	$t = 0$	$t = 5$	$t = 30$
0,3	4,50	5,10	5,60	4,65	5,65	6,10
0,5	3,53	4,40	4,40	3,80	4,54	4,78
0,7	3,00	3,35	3,65	3,30	3,86	4,10
0,9	2,70	2,88	3,10	2,94	3,39	3,54
1,0	3,64	2,72	2,90	2,82	3,25	3,35
K_I/K_I^0	1,95	2,15	2,31	1,34	1,42	1,48

В табл. 4 представлены значения порядков полос $m(r)$ в некоторых точках вдоль радиуса, исходящего из вершины трещины, а также значения безразмерного КИН $K^* = K_I/K_I^0$, вычисленного для некоторых моментов времени ($t = 0; 5; 30$ мин) и отношений параметров $l/R = 0,42; 1,16$.

Из данных таблицы видно, что численные значения величин K_I/K_I^0 возле трещин на контурах отверстий возрастают во времени.

Заклучение.

Таким образом, в данной работе на основе уравнений механики разрушения для ортотропных тел с трещинами получены соответствующие равенства при сохранении членов высшего порядка в разложениях функции напряжений в степенной ряд. Это дало возможность применить их в расширенной окрестности кончика трещины ($r < 2l$). Полученные уравнения применены к исследованию КИН возле трещин, находящихся на контуре кругового отверстия в ортотропных пластинах, используя при этом данные фотоупругих измерений. На основе числовых результатов установлены зависимости КИН от отношения длины трещины к радиусу отверстия, а также от механических свойств материала пластин.

РЕЗЮМЕ. Досліджено напружений стан біля тріщин, що знаходяться на контурі кругового отвору в пластинах, виготовлених із лінійно-пружних ортотропних композитів при дії зусиль розтягу. Визначено розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) біля вершини тріщини за даними поляризаційно-оптичних вимірювань. Встановлено залежність величин КІН від відношення довжини тріщини до радіусу отвору, а також від механічних властивостей матеріалу пластин.

1. Каминский А.А., Селиванов М.Ф. Длительное разрушение слоистого вязкоупругого композитного материала с трещиной под действием нагрузки, изменяющейся со временем // Механика композитных материалов. – 2000. – **36**, № 4. – С. 545 – 558.
2. Комлев О.Ю., Бурдюг Т.П., Шаньгин В.А. Расчетно-экспериментальные методы определения коэффициентов интенсивности напряжений // Статика, кинетика и динамика трещин (Исследования методом фотоупругости). – М.: МИСИ, 1988. – С. 91 – 121.
3. Корниец С.Д., Каминский А.А. Исследование напряжений около трещин в упругой пластине, ослабленной двумя отверстиями // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 11. – С. 72 – 77.
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластины. – М.: Гостехиздат, 1948. – 352 с.
5. Малежик М.П., Зубов В.Л., Шеремет Г.П., Губар І.М. Еквівалентний анізотропний оптично-чутливий матеріал для виготовлення моделей волоконних композитів // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2004. – № 1. – С. 86 – 93.
6. Методы расчета оболочек: В 5-ти т. Т. 1. Теория тонких пластин, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С.Чернышенко, В.Н.Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
7. Механика композитов: В 12-ти т. / Под ред А.Н.Гузя. Т. 7. Концентрация напряжений. – К.: «А.С.К.», 1998. – 387 с.
8. Нетребко В.П. Исследование влияния упрочняющего стрингера в растягиваемой пластине на напряжения около кончиков трещин, наклонных к стрингеру // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – **10**, № 1. – С. 22 – 26.
9. Нетребко В.П., Васильченко И.П. Поляризационные методы механики композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 116 с.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 741 с.
11. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 886 с.
12. Malezhik M.P., Chernyshenko I.S. Solution of Nonstationary Problems in the Mechanics of Anisotropic Bodies by the Method of Dynamic Photoelasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 9. – P. 954 – 980.
13. Malezhik M.P., Chernyshenko I.S., Sheremet G.P. Photoelastic Simulation of the Stress Wave Field Around a Tunnel in an Anisotropic Rock Mass Subject to Shock Load // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 8. – P. 948 – 950.
14. Malezhik M.P., Chernyshenko I.S., Sheremet G.P. Diffraction of Stress Waves by a Free or Reinforced Hole in an Orthotropic Plate // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 7. – P. 767 – 771.
15. Malezhik M.P., Malezhik O.P., Chernyshenko I.S. Photoelastic Determination of Dynamic Crack-Tip Stresses in an Anisotropic Plate // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 5. – P. 574 – 581.
16. Voitovich L.V., Malezhik M.P., Chernyshenko I.S. Photoelastic Modeling of the Fracture of Viscoelastic Orthotropic Plates with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 6. – P. 677 – 682.

Поступила 29.12.2009

Утверждена в печать 21.10.2010