

Д. М. Л и л а

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ  
СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СТРУНОЙ**

*Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого  
б-р Шевченко, 81, 18031, Черкассы, Украина; e-mail: dim\_1@ukr.net*

**Abstract.** It is obtained the equation of motion of the hybrid model of one mechanical system. The system consists of horizontally situated string and spherical pendulum, which is hung up in some point of the string. The conditions of asymptotic stability of stationary motions of the spherical pendulum, which is interacted with elastic string, are established.

**Key words:** spherical pendulum, elastic string, hybrid model, double-mode approximation, temporal quasi-periodicity, conditions of stability of the stationary motions.

**Введение.**

Эффективным подходом к построению математической модели движения колебательной механической системы с бесконечным числом степеней свободы, состоящей из упругой струны и взаимодействующей с ней посредством подвеса сосредоточенной осциллирующей массой, является поэтапное решение вариационной задачи  $\delta S = 0$  для действия по Гамильтону  $S$  [1] и поиск синхронных колебаний  $q_n(t)u_n(y)$  [2],  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $y \in [0, L]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , с удовлетворяющими уравнениям Лагранжа (дифференциальным уравнениям Эйлера для вариационной задачи) независимыми координатами  $q_n$ . Как показано в работе [4], это дает возможность вначале получить и решить спектральную задачу для нагруженной струны, а потом (с использованием соответствующего результата и условия ортогональности с нагрузкой [2]) нормализовать бесконечную (« $2(n+1)$ -го порядка») систему нелинейных дифференциальных уравнений движения связанных осцилляторов, аппроксимирующих данную систему. Ввиду практической важности рассматриваемых систем в работе [4] с помощью предложенного подхода решена задача устойчивости стационарных движений однозвенного математического маятника в описанной модели.

В данной статье решается задача устойчивости стационарных движений сферического маятника, взаимодействующего со струной. Упрощенная постановка задачи предполагает вертикальные колебания закрепленной на концах струны, а уточненная – невертикальные. Используется критерий устойчивости и неустойчивости [5] решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами [7 – 13].

**§1. Постановка задачи.**

Изучим некоторые особенности движений механической системы, моделируемой горизонтально расположенной в поле тяжести материальной упругой изотропной струной и материальной точкой, подвешенной в некоторой точке струны на невесомом нерастяжимом стержне (рис. 1). В декартовой прямоугольной системе координат

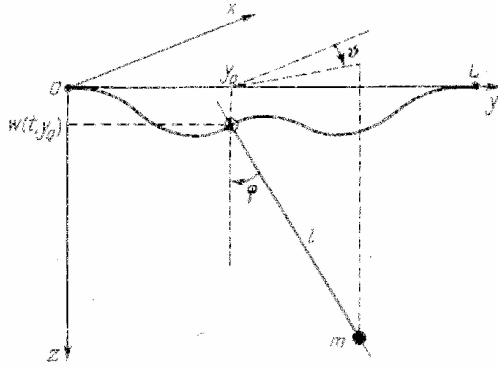


Рис. 1

Охуз положение точек струны, совершающей по предположению вертикальные колебания, будем определять по величине их смещения  $w(t, y)$  от горизонтали  $z = 0$  (здесь  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $y \in [0, L]$ ), а положение колеблющейся сосредоточенной массы  $m$  – координатами

$$x = l \sin \varphi \cos \vartheta; \quad y = y_0 + l \sin \varphi \sin \vartheta; \\ z = w(t, y_0) + l \cos \varphi,$$

где  $y_0$ ,  $l$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta$  — ордината точки подвеса маятника, длина стержня, угол отклонения стержня от вертикали и угол отклонения проекции стержня на плоскость

$xOy$  от оси абсцисс ( $\vartheta \in [0, 2\pi)$ ), соответственно.

Предполагается, что угол  $\varphi$  достаточно мал (малые нелинейные колебания маятника), чтобы не учитывать смещения точек струны вдоль оси ординат.

Вычисляя производные  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  и вводя обозначение  $\rho(y)$  для линейной плотности струны, получаем выражение кинетической энергии данной механической системы в виде

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{w}_t^2(t, y_0) - 2l \sin \varphi \dot{w}_t(t, y_0) \dot{\varphi} + l^2 (\dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\vartheta}^2)) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(y) \dot{w}_t^2(t, y) dy. \quad (1.1)$$

Потенциальная энергия представлена выражением

$$\Pi = -mg(w(t, y_0) + l \cos \varphi) + \int_0^L \left( \frac{1}{2} \mu w_y^2(t, y) - (p(t, y) + \rho(y)g) w(t, y) \right) dy, \quad (1.2)$$

где  $0,5\mu w_y^2(t, y)dy$ ,  $-p(t, y)w(t, y)dy$  и  $-\rho(y)gw(t, y)dy$  — мгновенная элементарная потенциальная энергия упругой силы (см. [2 – 4]), внешней нормальной силы, эквивалентной дополнительному удельному весу  $p(t, y)$  струны, и силы тяжести, соответственно.

Для получения уравнений движения исследуемой системы воспользуемся обобщенным интегральным вариационным принципом Гамильтона – Остроградского

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta W) dt = 0;$$

$$\delta \varphi(t_0) = \delta \varphi(t_1) = 0; \quad \delta \vartheta(t_0) = \delta \vartheta(t_1) = 0; \quad \delta \omega(t_0, y) = \delta \omega(t_1, y) = 0,$$

где  $\delta W = Q_\varphi \delta \varphi + Q_\vartheta \delta \vartheta = -k_1 \dot{\varphi} \delta \varphi - k_2 \dot{\vartheta} \delta \vartheta$  — виртуальная работа непотенциальной силы трения в точке подвеса, определяемая диссипативной функцией Рэлея  $R = (k_1 \dot{\varphi}^2 + k_2 \dot{\vartheta}^2) / 2$ .

**§2. Уравнения движения. Устойчивость стационарных движений.** После варьирования выражений (1.1), (1.2) и учета граничных условий  $w(t, 0) = w(t, L) = 0$  и определяющих свойств  $\delta$ -функции получим путем приравнивания к нулю коэффициентов при независимых вариациях  $\delta \varphi$ ,  $\delta \vartheta$  и  $\delta w$  следующие уравнения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_1}{ml^2} \dot{\varphi} + \frac{1}{l} (g - w_{tt}(t, y_0) - l \dot{\vartheta}^2 \cos \varphi) \sin \varphi = 0;$$

$$\sin^2 \varphi \ddot{\vartheta} + \left( \frac{k_2}{ml^2} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \dot{\vartheta} = 0; \quad (2.1)$$

$$[\rho(y) + m\delta(y - y_0)]w_{tt} = \mu w_{yy} + p(t, y) + \rho(y)g + m(g + l(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2))\delta(y - y_0).$$

Обозначив  $\Phi(t) = \sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2$  и полагая  $p \equiv 0$ ,  $\rho \equiv \text{const}$ , на основании уравнений (2.1) получаем систему

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_1}{ml^2} \dot{\varphi} + \frac{1}{l}(g - w_{tt}(t, y_0) - l\dot{\vartheta}^2 \cos \varphi) \sin \varphi = 0;$$

$$\sin^2 \varphi \dot{\vartheta} + \frac{k_2}{ml^2} \vartheta = \sin^2 \varphi_0 \dot{\vartheta}_0 + \frac{k_2}{ml^2} \vartheta_0 = c_0;$$

$$[\rho + m\delta(y - y_0)]w_{tt} = \mu w_{yy} + \rho g + m(g + l\Phi(t))\delta(y - y_0); \quad (2.2)$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0; \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0; \quad \vartheta(t_0) = \vartheta_0; \quad \dot{\vartheta}(t_0) = \dot{\vartheta}_0;$$

$$w(t, 0) = w(t, L) = 0; \quad w(t_0, y) = w_0(y); \quad w_t(t_0, y) = \dot{w}_0(y).$$

Используя идею метода нормальных форм колебаний, заключающуюся в данном случае в возможности представления решения неоднородного уравнения в частных производных из системы (2.2) в виде

$$w(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) u_n(y), \quad (2.3)$$

где коэффициенты  $q_n$  выписанной линейной комбинации удовлетворяют уравнениям Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

играя вместе с переменными  $\varphi$ ,  $\vartheta$  роль независимых координат, на основании (2.4) уравнения (2.2) получаем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{q}_s + \nu_s^2 q_s &= \beta_s + m l u_s(y_0) [\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2] \quad (s = 1, 2, \dots); \\ \ddot{\varphi} + \frac{k_1}{ml^2} \dot{\varphi} + \frac{1}{l} \left( g - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y_0) \ddot{q}_n - l \dot{\vartheta}^2 \cos \varphi \right) \sin \varphi &= 0; \quad \sin^2 \varphi \dot{\vartheta} + \frac{k_2}{ml^2} \vartheta = c_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\beta_s = m g u_s(y_0) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \nu_s^2 \sin \frac{(2n-1)\pi y_0}{L}}{\pi(2n-1)(\omega_{2n-1}^2 - \nu_s^2)} \right];$$

$\omega_j^2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , – собственные числа спектральной задачи для ненагруженной струны, а  $\nu_j^2$  и  $u_j(y)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , – собственные числа и собственные функции спектральной задачи для нагруженной струны [3, 4], соответственно. При этом

$$q_s(t_0) = w_{0s}; \quad \dot{q}_s(t_0) = \dot{w}_{0s}; \quad \varphi(t_0) = \varphi_0; \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0; \quad \vartheta(t_0) = \vartheta_0; \quad \dot{\vartheta}(t_0) = \dot{\vartheta}_0, \quad (2.6)$$

если учесть разложения начальных условий

$$w_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{0n} u_n(y); \quad \dot{w}_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_{0n} u_n(y).$$

Рассматривая бесконечную систему нелинейных связанных осцилляторов, при  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi \neq \pi$  в нормальной форме получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{q}_s &= r_s; \quad \dot{\varphi} = \psi; \quad \dot{r}_s = \beta_s - v_s^2 q_s + \\ &+ ml u_{s,0} \left( \psi^2 \cos \varphi - \frac{\left[ \frac{g}{l} + a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2 u_{n0}}{l} q_n + (b\psi^2 - \chi^2(\varphi, \vartheta)) \cos \varphi \right] \sin^2 \varphi + \frac{k_1}{ml^2} \psi \sin \varphi}{1 + b \sin^2 \varphi} \right); \\ \dot{\psi} &= - \frac{\left[ \frac{g}{l} + a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2 u_{n0}}{l} q_n + (b\psi^2 - \chi^2(\varphi, \vartheta)) \cos \varphi \right] \sin \varphi + \frac{k_1}{ml^2} \psi}{1 + b \sin^2 \varphi}; \quad \dot{\vartheta} = \chi(\varphi, \vartheta); \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &(q_1(t_0), \dots, q_s(t_0), \dots, \varphi(t_0), r_1(t_0), \dots, r_s(t_0), \dots, \psi(t_0), \vartheta(t_0))^T = \\ &= (w_{01}, \dots, w_{0s}, \dots, \varphi_0, \dot{w}_{01}, \dots, \dot{w}_{0s}, \dots, \dot{\varphi}_0, \vartheta_0)^T, \end{aligned}$$

где обозначено

$$u_{s,0} = u_s(y_0) \quad (s = 1, 2, \dots); \quad a = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n0} \beta_n}{l}; \quad b = -m \sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}^2; \quad \chi(\varphi, \vartheta) = \frac{c_0 - \frac{k_2}{ml^2} \vartheta}{\sin^2 \varphi}.$$

Стационарными решениями бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.5) являются  $\left( \frac{\beta_1}{v_1^2}, \frac{\beta_2}{v_2^2}, \dots, 0, \frac{c_0 ml^2}{k_2} \right)^T$  и  $\left( \frac{\beta_1}{v_1^2}, \frac{\beta_2}{v_2^2}, \dots, \pi, \frac{c_0 ml^2}{k_2} \right)^T$ .

Учитывая цикличность координаты  $\vartheta$ , линеаризованные уравнения возмущенного движения для каждого из положений равновесия будут содержать только позиционные переменные возмущенного движения  $\xi_s = q_s - \beta_s / v_s^2$ ;  $\tilde{\xi} = \varphi$ ;  $\rho_s = r_s$ ;  $\tilde{\rho} = \psi$  и  $\xi_s = q_s - \beta_s / v_s^2$ ;  $\tilde{\xi} = \varphi - \pi$ ;  $\rho_s = r_s$ ;  $\tilde{\rho} = \psi$ , соответственно. Вследствие этого вид самих уравнений возмущенного движения и условия устойчивости стационарных движений сферического маятника, взаимодействующего со струной, в рассматриваемой постановке задачи полностью совпадут с аналогичными для однозвенного математического маятника, колеблющегося под влиянием струны [3, 4].

### §3. Общая постановка задачи. Уравнения движения.

Предположим, что плоскость колебаний горизонтально закрепленной на концах струны образует некоторый фиксированный угол  $\alpha \in (0, \pi/2]$  с вертикальной плоскостью  $yOz$  (рис. 1).

Тогда в соответствии с §§ 1, 2 получим

$$x = w(t, y_0) \sin \alpha + l \sin \varphi \cos \vartheta; \quad y = y_0 + l \sin \varphi \sin \vartheta; \quad z = w(t, y_0) \cos \alpha + l \cos \varphi;$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (w_t^2(t, y_0) + l^2 (\dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\vartheta}^2) + 2l w_t(t, y_0) [(\cos \varphi \cos \vartheta \dot{\varphi} - \\ &- \sin \varphi \sin \vartheta \dot{\vartheta}) \sin \alpha - \sin \varphi \dot{\varphi} \cos \alpha]) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(y) w_t^2(t, y) dy; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & -mg(w(t, y_0) \cos \alpha + l \cos \varphi) + \int_0^l \left( \frac{1}{2} \mu w_y^2(t, y) + \right. \\ & \left. + (-(p_1(t, y) + \rho(y)g) \cos \alpha + p_2(t, y) \sin \alpha) \right) dy, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $w(t, y)$  — смещение в данный момент  $t$  точки струны с ординатой  $y$  от оси  $Oy$  в плоскости колебаний, а  $p_2(t, y)$  — мгновенная удельная горизонтальная составляющая силы внешнего влияния на струну.

Решая вариационную задачу, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{k_1}{ml^2} \dot{\varphi} + \frac{1}{l} \left( (g - w_{tt}(t, y_0) \cos \alpha - l \dot{\vartheta}^2 \cos \varphi) \sin \varphi + w_{tt}(t, y_0) \sin \alpha \cos \vartheta \cos \varphi \right) &= 0; \\ \sin^2 \varphi \ddot{\vartheta} + \left( \frac{k_2}{ml^2} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \dot{\vartheta} - \frac{1}{l} w_{tt}(t, y_0) \sin \alpha \sin \varphi \sin \vartheta &= 0; \\ [\rho(y) + m \delta(y - y_0)] w_{tt} = \mu w_{yy} + (p_1(t, y) + \rho(y)g) \cos \alpha - p_2(t, y) \sin \alpha + & \\ + m \left( (g + l(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2)) \cos \alpha + l(-\cos \varphi \cos \vartheta \ddot{\varphi} + \sin \varphi \sin \vartheta \ddot{\vartheta} + \right. & \\ \left. + 2 \cos \varphi \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta} + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) \sin \varphi \cos \vartheta \sin \alpha \right) \delta(y - y_0). & \end{aligned} \quad (3.3)$$

Применяя к системе (3.3) метод нормальных форм колебаний и полагая  $p_1 \equiv 0$ ,  $p_2 \equiv 0$ ,  $\rho \equiv \text{const}$ , имеем

$$\begin{aligned} \ddot{q}_s + \nu_s^2 q_s = \beta_s \cos \alpha + ml u_{s0} [(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \cos \alpha + (-\cos \varphi \cos \vartheta \ddot{\varphi} + & \\ + \sin \varphi \sin \vartheta \ddot{\vartheta} + 2 \cos \varphi \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta} + \sin \varphi \cos \vartheta (\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2)) \sin \alpha] \quad (s = 1, 2, \dots); & \\ \ddot{\varphi} + \frac{k_1}{ml^2} \dot{\varphi} + \left( \frac{g}{l} - \dot{\vartheta}^2 \cos \varphi \right) \sin \varphi + \frac{1}{l} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_{n0} \ddot{q}_n \right) [\sin \alpha \cos \vartheta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi] &= 0; \quad (3.4) \\ \sin^2 \varphi \ddot{\vartheta} + \left( \frac{k_2}{ml^2} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \dot{\vartheta} - \frac{1}{l} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_{n0} \ddot{q}_n \right) \sin \alpha \sin \varphi \sin \vartheta &= 0. \end{aligned}$$

#### §4. Устойчивость стационарных движений (общая постановка).

Стационарными решениями бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений (3.4) являются  $\left( \frac{\beta_1 \cos \alpha}{\nu_1^2}, \frac{\beta_2 \cos \alpha}{\nu_2^2}, \dots, 0, \vartheta_0 \right)^T$ ,  $\left( \frac{\beta_1 \cos \alpha}{\nu_1^2}, \frac{\beta_2 \cos \alpha}{\nu_2^2}, \dots, \pi, \vartheta_0 \right)^T$ .

Им соответствуют нижнее и верхнее положения равновесия маятника в исследуемой модели.

Далее рассмотрим вместо (2.3) конечную линейную комбинацию системы «координатных» функций  $\{q_n(t)\}_{n=1}^2$ , аппроксимирующих движение системы с бесконечным числом степеней свободы.

Исследуя влияние малых колебаний струны на колебания сферического маятника в окрестности нижнего положения равновесия, исключим из системы (3.4) переменные  $q_1$ ,  $q_2$  (двухмодовое приближение), проинтегрировав соответствующие линейари-

зованные уравнения [3]. Вследствие этого в переменных возмущенного движения  $\xi_1 = \varphi$ ;  $\xi_2 = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ ;  $\xi_3 = \dot{\varphi}$  в нормальной форме получим нелинейную нестационарную систему третьего порядка, линейное приближение которой имеет вид

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3; \quad \dot{\xi}_2 = -\frac{ml^2 \sin \alpha}{k_2} h(t) \xi_1; \quad \dot{\xi}_3 = -\left[ \frac{g}{l} + \cos \alpha h(t) \right] \xi_3 - \sin \alpha h(t) \xi_2 - \frac{k_1}{ml^2} \xi_3, \quad (4.1)$$

где

$$h(t) = \sum_{\substack{j=2 \\ (j \neq 0)}}^2 h_j e^{i\nu_j t};$$

$$h_1 = \frac{d_1}{2\nu_1} (c_{14} + ic_{24}); \quad h_{-1} = \bar{h}_1; \quad h_2 = \frac{d_2}{2\nu_2} (c_{15} + ic_{25}); \quad h_{-2} = \bar{h}_2; \quad \nu_{-j} = -\nu_j \quad (j = 1, 2);$$

$$d_1 = -\frac{\nu_1^2 u_{10}}{l}; \quad d_2 = -\frac{\nu_2^2 u_{20}}{l};$$

$$c_{14} = \dot{w}_{01} \sin \nu_1 t_0 - \nu_1 \left( w_{01} - \frac{\beta_1 \cos \alpha}{\nu_1^2} \right) \cos \nu_1 t_0; \quad c_{24} = \nu_1 \left( w_{01} - \frac{\beta_1 \cos \alpha}{\nu_1^2} \right) \sin \nu_1 t_0 + \dot{w}_{01} \cos \nu_1 t_0,$$

$$c_{15} = \dot{w}_{02} \sin \nu_2 t_0 - \nu_2 \left( w_{02} - \frac{\beta_2 \cos \alpha}{\nu_2^2} \right) \cos \nu_2 t_0; \quad c_{25} = \nu_2 \left( w_{02} - \frac{\beta_2 \cos \alpha}{\nu_2^2} \right) \sin \nu_2 t_0 + \dot{w}_{02} \cos \nu_2 t_0.$$

Вводя в рассмотрение малый параметр  $\varepsilon$ , систему уравнений (4.1) представим в виде

$$\dot{x} = (A + \varepsilon F(t))x, \quad (4.2)$$

где

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ml^2 \sin \alpha}{u_0 k k_2} h(t) & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{u_0 k} h(t) & -\frac{\sin \alpha}{u_0 k} h(t) & -\frac{k_1}{u_0 k m l^2} \end{bmatrix}; \quad u_0 = \sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

Нормальная жорданова форма матрицы  $A$  имеет вид  $J = \begin{bmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \end{bmatrix}$ , а неосо-

бенная матрица  $S$ , производящая преобразование подобия  $A = S^{-1}JS$ , представляется

в виде  $S = \begin{bmatrix} i\omega & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i\omega & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Общее решение  $x = S^{-1}e^{Jt}Sc$  (здесь  $c = (C_1, C_2, C_3)^T$ ) системы дифференциальных уравнений  $\dot{x} = Ax$  принимает вид

$$x = \frac{1}{2i\omega} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i\omega & 0 & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (i\omega C_1 + C_3)e^{i\omega t} \\ 2i\omega C_2 \\ (i\omega C_1 - C_3)e^{-i\omega t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i\omega & 0 & -i\omega \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Диагональная матрица, элементами которой являются мнимые части собственных значений матрицы  $A$ , имеет вид

$$\Theta = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

С учетом соотношений (4.2) – (4.4) получим равенство

$$A_0 = B^{-1}AB - i\Theta = 0. \quad (4.5)$$

Для определения матрицы  $A_1$  [5] необходимо знать вид свободного члена квази-периодической матрицы-функции

$$e^{-i\Theta t} B^{-1} F(t) B e^{i\Theta t} = -\frac{1}{2i\omega u_0 k} \times \begin{bmatrix} \cos \alpha h(t) + i\omega \frac{k_1}{ml^2} & \sin \alpha e^{-i\omega t} h(t) & (\cos \alpha h(t) - i\omega \frac{k_1}{ml^2})e^{-2i\omega t} \\ 2i\omega \frac{ml^2}{k_2} \sin \alpha h(t) e^{i\omega t} & 0 & 2i\omega \frac{ml^2}{k_2} \sin \alpha h(t) e^{-i\omega t} \\ (-\cos \alpha h(t) - i\omega \frac{k_1}{ml^2})e^{2i\omega t} & -\sin \alpha e^{i\omega t} h(t) & -\cos \alpha h(t) + i\omega \frac{k_1}{ml^2} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Предположив, что выполняется одно из нижеуказанных соотношений между величинами собственной частоты  $\omega$  и частот  $\nu_1, \nu_2$  двухпериодической силы воздействия колеблющейся струны, получим, соответственно,

$$-\omega + \nu_j = 0 \quad (j \in \{1, 2\}); \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \bar{\beta}_2 \\ 0 & \bar{\beta}_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2u_0 k} \cdot \frac{k_1}{ml^2}; \quad \beta_1 = \frac{1}{2u_0 k \omega} \cdot i \sin \alpha h_j; \quad \beta_2 = -\frac{1}{u_0 k} \cdot \frac{ml^2}{k_2} \cdot \sin \alpha h_{-j};$$

$$-2\omega + \nu_j = 0 \quad (j \in \{1, 2\}); \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\gamma} & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2u_0 k \omega} \cdot i \cos \alpha h_j;$$

$$-\omega + \nu_j \neq 0; \quad -2\omega + \nu_j \neq 0 \quad (j = 1, 2); \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Ограничиваясь членами первого порядка малости в характеристическом полиноме

$$\det(A_0 + \varepsilon A_1 + \dots - \lambda E),$$

где  $E$  – единичная матрица третьего порядка, в случае (4.7) приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (4.10)$$

где

$$a_1 = -2\varepsilon \alpha_1 + \dots; \quad a_2 = \varepsilon^2 (\alpha_1^2 - 2\operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2)) + \dots; \quad a_3 = 2\varepsilon^3 \alpha_1 \operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2) + \dots$$

Положительность старших коэффициентов его определителей Гурвица  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  является условием асимптотической устойчивости [5] исследуемого состояния. Поскольку  $\operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2) = 0$ , имеем  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 = 0$ .

В случае (4.8) отрицательность действительных частей двух корней уравнения (4.10) при нулевом третьем корне легко проверяется непосредственно и сводится к единственному условию

$$\alpha_1 + |\gamma| < 0. \quad (4.11)$$

В случае (4.9) положительность коэффициентов трения  $k_1, k_2$  также гарантирует лишь нейтральную устойчивость нижнего положения маятника в изучаемой гибридной модели. Поэтому во всех трех случаях необходимо учесть слагаемые более высоких порядков малости в разложении определителей Гурвица по малому параметру.

Поскольку матрица-функция (4.6) представима в виде

$$\sum_{\substack{s=-11 \\ (s \neq 0)}}^{11} A_s^{(1)} e^{i\tilde{\nu}_s t} + A_1,$$

где

$$A_1^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i\omega \frac{k_1}{ml^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_2^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \alpha h_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_3^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha h_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2i\omega ml^2 \sin \alpha h_1}{k_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_4^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} \cos \alpha h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \alpha h_1 \end{bmatrix}; \quad A_5^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2i\omega ml^2 \sin \alpha h_1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha h_1 & 0 \end{bmatrix};$$



$$A_6^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \alpha h_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_7^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \alpha h_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_8^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha h_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2i\omega m l^2 \sin \alpha h_2}{k_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_9^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} \cos \alpha h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \alpha h_2 \end{bmatrix}; A_{10}^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2i\omega m l^2 \sin \alpha h_2}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha h_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{11}^{(1)} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \alpha h_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{-s}^{(1)} = \overline{A_s^{(1)}} \quad (s = 1, \dots, 11; \delta = -\frac{1}{2i\omega u_0 k});$$

$$\tilde{v}_1 = 2\omega; \tilde{v}_2 = v_1 - 2\omega; \tilde{v}_3 = v_1 - \omega; \tilde{v}_4 = v_1; \tilde{v}_5 = v_1 + \omega; \tilde{v}_6 = v_1 + 2\omega;$$

$$\tilde{v}_7 = v_2 - 2\omega; \tilde{v}_8 = v_2 - \omega; \tilde{v}_9 = v_2; \tilde{v}_{10} = v_2 + \omega; \tilde{v}_{11} = v_2 + 2\omega;$$

$$\tilde{v}_{-s} = -\tilde{v}_s \quad (s = 1, \dots, 11),$$

то после непосредственных вычислений в случаях (4.9), (4.8) при  $j = 1$  и (4.8) при  $j = 2$ , соответственно, получаем

$$A_2 = \sum_{s=1}^{11} \frac{i}{\tilde{v}_s} (A_s^{(1)} A_{-s}^{(1)} - A_{-s}^{(1)} A_s^{(1)}) = \text{diag}[a_2^{(11)}, \alpha_2, a_2^{(33)}];$$

$$A_2 = \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq 2)}}^{11} \frac{i}{\tilde{v}_s} (A_s^{(1)} A_{-s}^{(1)} - A_{-s}^{(1)} A_s^{(1)}) = \text{diag}[\tilde{a}_2^{(11)}, \alpha_2, \tilde{a}_2^{(33)}]; \quad (4.12)$$

$$A_2 = \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq 7)}}^{11} \frac{i}{\tilde{v}_s} (A_s^{(1)} A_{-s}^{(1)} - A_{-s}^{(1)} A_s^{(1)}) = \text{diag}[\tilde{a}_2^{(11)}, \alpha_2, \tilde{a}_2^{(33)}],$$

где

$$\alpha_2 = -\frac{2ml^2 \sin^2 \alpha}{u_0^2 k^2 k_2} \left( \frac{|h_1|^2}{v_1^2 - \omega^2} + \frac{|h_2|^2}{v_2^2 - \omega^2} \right).$$

Если теперь в случаях (4.8), (4.9) потребовать дополнительно выполнения неравенства

$$\alpha_2 < 0, \quad (4.13)$$

то будут соблюдены и условия асимптотической устойчивости. При параметрическом резонансе  $2\omega = v_1$  (случай (4.8)) соотношение (4.13) очевидно, тогда как при  $2\omega = v_2$  является следствием неравенства

$$2v_1 > v_2. \quad (4.14)$$

Вычисляя матрицу  $A_2$  и ограничиваясь уже членами второго порядка малости в характеристическом полиноме  $\det(A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots - \lambda E)$ , в случае параметрического резонанса (4.7) условие асимптотической устойчивости получаем в виде неравенства

$$\frac{k_1^2}{2ml^2} \left( \frac{|h_j|^2}{4\omega^2} + \frac{|h_s|^2}{v_s^2 - \omega^2} \right) - \frac{ml^2 \cos^2 \alpha |h_j|^2}{\omega^2} \left( \frac{|h_1|^2}{v_1^2 - 4\omega^2} + \frac{|h_2|^2}{v_2^2 - 4\omega^2} \right) > 0 \quad \left( s = \begin{cases} 2, & j=1; \\ 1, & j=2 \end{cases} \right).$$

Область асимптотической устойчивости системы (4.2) для нижнего положения равновесия для случая параметрического резонанса (4.8) при  $j=1$  в пространстве параметров  $(m; \alpha)$  показана на рис. 2. При этом  $\rho=1$ ,  $L=1$ ,  $y_0=0,5$ ,  $\mu=200$ ,  $w_{01}=0,003$ ,  $w_{02}=-0,0003$ ,  $\dot{w}_{01}=\dot{w}_{02}=0$  (система возбуждается малыми смещениями точек струны от положения равновесия без сообщения им начальной скорости);  $t_0=0$ ,  $k_1=k_2=0,0001$ ,  $\mu_1=1000$ ,  $\mu_2=1273$ .

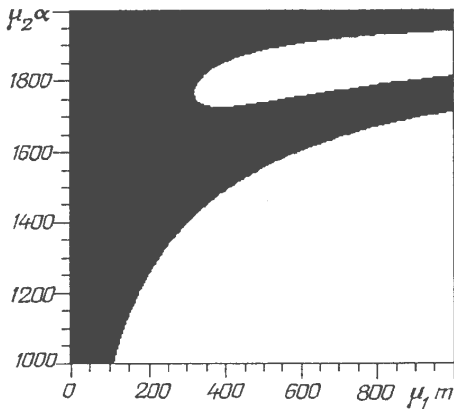


Рис. 2

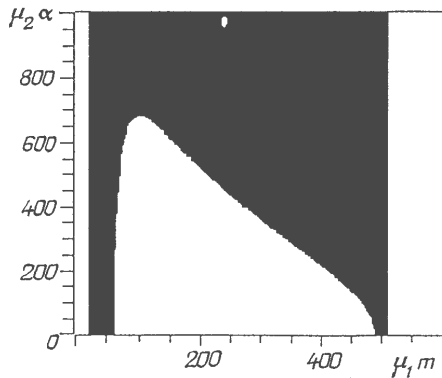


Рис. 3

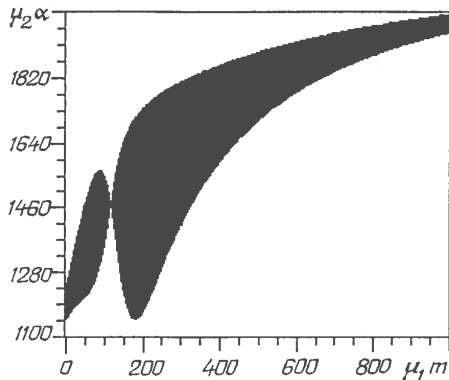


Рис. 4

На рис. 3 представлена область асимптотической устойчивости системы (4.2) (нижнего положения равновесия) для случая параметрического резонанса (4.8) при  $j=2$ . При этом  $k_1=k_2=0,0002963$ ,  $\mu_1=200$ ,  $\mu_2=5093$ . Значения других параметров соответствуют рис. 2.

Область асимптотической устойчивости системы (4.2) для нижнего положения равновесия в нерезонансном случае (4.9) показана на рис. 4. При этом  $l=0,0048$ ,  $\mu_1=1000$ ,  $\mu_2=1432$ . Значения других параметров соответствуют рис. 2.

На рис. 5 показана область асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия в случае параметрического резонанса (4.7) при  $j=1$  ( $k_1=3 \cdot 10^{-6}$ ,  $\mu_1=8000$ ,  $\mu_2=637$ ), а на рис. 6 — при  $j=2$  ( $k_1=10^{-5}$ ,  $\mu_1=1000$ ,  $\mu_2=637$ ).

Изучая влияние высокочастотных колебаний струны на колебания сферического маятника в окрестности верхнего положения равновесия, перейдем к «быстрому» времени  $\tau = \nu t$ , где  $\nu = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ . Это дает возможность исключить из системы (3.4) переменные  $q_1, q_2$  после интегрирования соответствующих линеаризованных уравнений. Вследствие этого в переменных возмущенного движения  $\xi_1 = \varphi - \pi$ ;  $\xi_2 = \vartheta - \pi/2$ ;  $\xi_3 = \dot{\varphi}$  получим нелинейную нестационарную систему дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами третьего порядка. Ее линейное приближение представимо в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = (A + \varepsilon(F_0(\tau) + \varepsilon F_1))x, \quad (4.15)$$

где  $\varepsilon = k/\nu$  — малый параметр;

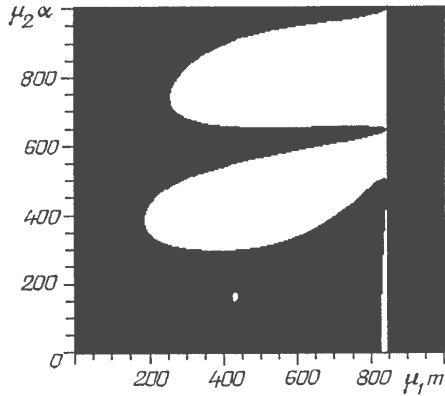


Рис. 5

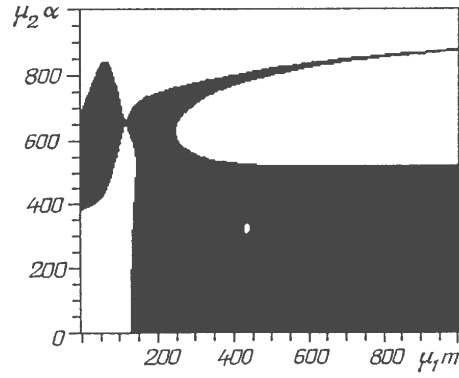


Рис. 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F_0(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ml^2 \sin \alpha}{kk_2} h(t) & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{kv} h(t) & -\frac{\sin \alpha}{kv} h(t) & -\frac{k_1}{kml^2} \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{k^2 l} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$h(\tau) = \sum_{\substack{j=-2 \\ (j \neq 0)}}^2 h_j e^{iv'_j \tau}; h_1 = -\frac{d_1}{2v'_1} (c_{14} + ic_{24}); h_{-1} = \bar{h}_1; h_2 = -\frac{d_2}{2v'_2} (c_{15} + ic_{25}); h_{-2} = \bar{h}_2;$$

$$c_{14} = \dot{w}_{01} \sin \frac{v'_1 \tau_0}{v} - v'_1 \left( w_{01} - \frac{\beta_1 \cos \alpha}{v_1^2} \right) \cos \frac{v'_1 \tau_0}{v};$$

$$c_{24} = v'_1 \left( w_{01} - \frac{\beta_1 \cos \alpha}{v_1^2} \right) \sin \frac{v'_1 \tau_0}{v} + \dot{w}_{01} \cos \frac{v'_1 \tau_0}{v};$$

$$c_{15} = \dot{w}_{02} \sin \frac{v'_2 \tau_0}{v} - v'_2 \left( w_{02} - \frac{\beta_2 \cos \alpha}{v_2^2} \right) \cos \frac{v'_2 \tau_0}{v};$$

$$c_{25} = v'_2 \left( w_{02} - \frac{\beta_2 \cos \alpha}{v_2^2} \right) \sin \frac{v'_2 \tau_0}{v} + \dot{w}_{02} \cos \frac{v'_2 \tau_0}{v}; v'_j = \frac{v_j}{v}; v'_{-j} = -v'_j \quad (j=1, 2).$$

В этом случае нормальная жорданова форма матрицы  $A$  имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Матрица } S \text{ представлена в виде } S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ а}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Соответственно, имеем

$$A_0 = B^{-1}AB = A. \quad (4.17)$$

Поскольку выполняется равенство

$$B^{-1}F_0(\tau)B = \sum_{\substack{s=-2 \\ (s \neq 0)}}^2 A_s^{(1)} e^{iv'_s \tau} + A_0^{(1)}, \quad (4.18)$$

где

$$A_s^{(1)} = \frac{h_s}{kv} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\frac{vml^2 \sin \alpha}{k_2} & 0 & -\frac{vml^2 \sin \alpha}{k_2} \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \quad (s = \pm 1, \pm 2),$$

то получим формулы

$$A_1 = A_0^{(1)} = \frac{k_1}{kml^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (4.19)$$

$$B_s^{(1)} = \frac{h_s}{kv_s} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{v'_s} - i\right) \cos \alpha & \left(\frac{1}{v'_s} - i\right) \sin \alpha & \left(\frac{2}{v'_s} + \left(\frac{2}{v_s'^2} - 1\right) i\right) \cos \alpha \\ \frac{ivml^2 \sin \alpha}{k_2} & 0 & \left(-\frac{1}{v'_s} + i\right) \frac{vml^2 \sin \alpha}{k_2} \\ i \cos \alpha & i \sin \alpha & \left(-\frac{1}{v'_s} + i\right) \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (s = \pm 1, \pm 2). \quad (4.20)$$

Учитывая соотношения (4.15), (4.16), (4.18), (4.20), матрицу  $A_2 = \sum_{\substack{s=-2 \\ (s \neq 0)}}^2 A_s^{(1)} B_{-s}^{(1)} + B^{-1}F_1B$

(согласно [5]) получаем в виде

$$A_2 = \frac{2}{k^2} \left( \sum_{s=1}^2 \frac{|h_s|^2}{v_s'^2} \right) D + \frac{g}{k^2 l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.21)$$

$$D = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \frac{vml^2 \sin^2 \alpha}{k_2} \\ -\frac{vml^2 \sin \alpha \cos \alpha}{k_2} & -\frac{vml^2 \sin^2 \alpha}{k_2} & -\frac{vml^2 \sin \alpha \cos \alpha}{k_2} \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha + \frac{vml^2 \sin^2 \alpha}{k_2} \end{bmatrix}.$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости в характеристическом полиноме  $\det(A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots - \lambda E)$ , к условию неустойчивости рассматриваемого стационарного решения приходим через отрицательность хотя бы одного из первых неисчезающих коэффициентов в разложениях по малому параметру детерминантов Гурвица

$$\Delta_1 = a_1 = \varepsilon a_1^{(13)} + \dots = \varepsilon \frac{k_1}{kml^2} + \dots;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = -\varepsilon^3 a_1^{(13)} a_2^{(31)} + \dots = -\varepsilon^3 \frac{k_1}{kml^2} \cdot \frac{1}{k^2} \left( \frac{g}{l} - 2\cos^2\alpha \sum_{s=1}^2 \frac{|h_s|^2}{v_s^2} \right) + \dots;$$

$$\Delta_3 = (\varepsilon^4 (a_2^{(31)} a_2^{(22)} - a_2^{(21)} a_2^{(32)}) + \dots) \Delta_2 = \left( -\varepsilon^4 \frac{2}{k^2} \left( \sum_{s=1}^2 \frac{|h_s|^2}{v_s^2} \right) \frac{vml^2 \sin^2\alpha}{k_2} \frac{g}{k^2 l} + \dots \right) \Delta_2.$$

Поскольку очевидно, что  $\Delta_1 > 0$  и  $\Delta_2 \Delta_3 < 0$ , то верхнее положение равновесия неустойчиво при всех допустимых значениях параметров.

### §5. Заключительные замечания.

Сведение решения задачи об устойчивости нижнего положения равновесия сферического маятника, взаимодействующего с вертикально колеблющейся с малой амплитудой упругой струной, к решению задачи об устойчивости нижнего положения математического маятника в такой же модели, объясняет возможность действительной осуществимости соответствующих устойчивых по отношению к части переменных движений.

Полученные по линейному приближению условия и построенные области асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия сферического маятника в общей постановке задачи свидетельствуют о существовании соответствующего стационарного режима колебаний маятника при обращении обобщенной координатой  $\vartheta$  из циклической в позиционную.

Потеря в последнем случае стабилизируемости верхнего положения равновесия маятника [6] имеет следующее физическое содержание: стабилизация одной из степеней свободы («широты»  $\varphi$ ) высокочастотными и (или) значительными по амплитуде вертикальными составляющими вибраций точки подвеса за счет взаимодействия с достаточно натянутой струной непременно сопровождается разрушением «устойчивости» горизонтальными составляющими вибраций в полуплоскостях «долготы»  $\vartheta$ .

РЕЗЮМЕ. Одержано рівняння руху гібридної моделі механічної системи, яка складається з горизонтально розміщеної струни і підвішеного в деякій її точці сферичного маятника. Встановлено умови асимптотичної стійкості стаціонарних рухів сферичного маятника, що взаємодіє з пружною струною.

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. I. – М.: Гостехиздат, 1951. – 476 с.
3. Лиля Д.М. Достатні умови стійкості великомасштабних нестационарних механічних систем: автореф. дис. ... канд. фіз.-матем. наук: спец. 01.02.01 «Теоретична механіка». – К., 2009. – 19 с.
4. Лиля Д.М. Достаточные условия устойчивости крупномасштабных нестационарных механических систем: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.02.01. – К., 2009. – 150 с.
5. Штокало И.З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами // Матем. сб. – 1946. – **19(61)**, № 2. – С. 263 – 286.
6. Leung A.Y.T., Kuang J.L. On the Chaotic Dynamics of a Spherical Pendulum with a Harmonically Vibrating Suspension // Nonlinear Dynamics. – 2006. – **43**, N 3. – P. 213 – 238.

7. *Lila D.M.* Stability of Motion of Quasiperiodic Systems in Critical Cases // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 2. – P. 229 – 240.
8. *Lila D.M.* Stability of Some Solutions of Phase-Matched Generation Equations for Optically Coupled Lasers // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 3. – P. 317 – 318.
9. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* Construction and Applications of the Matrix-Valued Liapunov Functions for Some Quasi-Periodic Systems // *Differential Equations and Dynamical Systems.* – 2009. – **17**, N 1 – 2. – P. 91 – 104.
10. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* On stability of some solutions for equations of locked lasing of optically coupled lasers with periodic pumping // *Nonlinear Oscillations.* – 2009. – **12**, N 4. – P. 464 – 473.
11. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* On the theory of stability of matrix differential equations // *Ukr. Math. Journ.* – 2009. – **61**, N 4. – P. 556 – 565.
12. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* Setting up Lyapunov Functions for the Class of Systems with Quasiperiodic Coefficients // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 12. – P. 1421 – 1429.
13. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* Stability of Periodic Motions of Quasilinear Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1161 – 1172.

Поступила 05.10.2009

Утверждена в печать 21.10.2010

---