

Б. Н. Кифоренко¹, Я. В. Ткаченко²

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
МЕЖДУ ОТДАЛЕННЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина;
e-mail:¹bkifor@ukr.net, ²yaroslavvt@ukr.net*

Abstract. A problem of optimization of trajectories, control and parameters of the spacecraft engine system of microthruster of constant power with energy storage is solved. The spacecraft is done the orbit adjust maneuver of synchronous essential change the major semi-axis, eccentricity and angle of slope of elliptic orbit in the spherical gravitational field. An estimation is carried out for increasing of mass of payload when the energy storage is used as a part of propulsion system. The optimal dependences of control on time and optimal relationships for the characterizing the propulsion system mass parameters are shown.

Key words: optimal transfer; maximum payload; elliptical orbit; electric propulsion; energy storage.

Введение.

Использование электрореактивных двигателей (ЭРД) как маршевых при межорбитальных перелетах космических летательных аппаратов (КЛА) позволяет существенно увеличить массу полезного груза КЛА при фиксированной начальной массе за счет уменьшения массы рабочего тела, необходимого для выполнения заданного перелета по сравнению с КЛА, оснащенным традиционной двигательной системой большой тяги. Учитывая высокую стоимость выведения на монтажную орбиту единицы массы, использовать КЛА с ЭРД экономически выгодно. Поэтому в современной научной литературе широко обсуждаются проблемы оптимальных переходов КЛА с ЭРД, например [7 – 9, 12]. В работах [3, 5, 6, 12] показано, что массу полезной нагрузки КЛА с ЭРД можно увеличить, если в состав двигательной системы включить накопитель энергии. Секундный массовый расход рабочего вещества прямо пропорционален квадрату реактивного ускорения и обратно пропорционален подведенной к движителю мощности [1]. Поэтому на участках траектории с относительно малым значением требуемого реактивного ускорения целесообразно накапливать энергию источника мощности с уменьшением энергообеспечения двигателя с тем, чтобы на участках траектории, где требуемое реактивное ускорение сравнительно велико, накопленную энергию вместе с энергией источника направлять в движитель, увеличивая при этом тягу без соответствующего увеличения массового расхода рабочего тела за счет более интенсивного его разгона. Очевидно, что включение накопителя энергии в состав двигательной системы имеет смысл, если сэкономленная за счет такого регулирования мощности масса рабочего вещества окажется больше собственной массы накопителя.

В настоящей работе рассмотрена задача оптимизации траекторий, управлений (программ вектора реактивного ускорения во времени) и параметров электрореактивной двигательной системы постоянной мощности с накопителем энергии КЛА, кото-

ISSN0032–8243. Прикл. механика, 2010, 46, № 11

рый выполняет многооборотный маневр существенного изменения большой полуоси, эксцентриситета и угла наклона эллиптической орбиты в сильном центральном гравитационном поле. КЛА моделируется материальной точкой переменной массы. Малость величины реактивного ускорения, характерная для ЭРД, по сравнению с гравитационным, позволяет линеаризовать уравнения движения и проинтегрировать их на каждом обороте в элементарных функциях. Проведена оценка увеличения массы полезной нагрузки при использовании накопителя энергии в двигательной системе.

§1. Постановка задачи и метод решения.

В данной работе изучаются управляемые движения центра масс КЛА (движения аппарата вокруг центра масс не рассматриваются). Поэтому движение КЛА моделируем движением материальной точки переменной массы. Следуя [3, 12], начальную массу M_0 аппарата предполагаем состоящей из массы полезной нагрузки M_π , массы рабочего вещества M_F , масс движителя M_γ , источника мощности M_ν и накопителя энергии M_e , т.е.

$$M_0 = M_\pi + M_F + M_\gamma + M_\nu + M_e. \quad (1.1)$$

Как и в работах [3, 5, 12], примем

$$M_\nu = \alpha N_0; \quad M_\gamma = \gamma N_\Gamma = \gamma N_\gamma N_0; \quad M_e = \beta e_{a_0}, \quad (1.2)$$

где N_0 – максимальное значение мощности, вырабатываемой источником; e_{a_0} – энергоемкость аккумулятора энергии; $N_\Gamma = N_\gamma N_0$ – значение мощности, потребляемой движителем; α, β, γ – удельные массы источника мощности, накопителя энергии и движителя, соответственно.

Все последующие соотношения записаны в безразмерной форме: линейные размеры отнесены к радиусу круговой орбиты r^* ; время t отнесено к T^* – периоду обращения по начальной орбите, деленному на 2π ; ускорения – к гравитационному ускорению на расстоянии r^* от притягивающего центра (центра Земли); текущий запас энергии в аккумуляторе e_a – к энергоемкости аккумулятора; мощность движителя и текущая мощность источника – к N_0 , а введенные ниже функционалы J_e и J – к величине $r^{*2}T^{*-3}$.

В работе [1] показано, что решение задачи об определении траектории, управления движением и значений параметров N_0 , e_{a_0} и N_γ , обеспечивающих максимум полезной нагрузки при заданной начальной массе КЛА и фиксированных значениях α , β , γ и ε , сводится к минимизации функционала

$$J_e = \int_0^T \delta (\varepsilon + (1 + \xi_B) / N_\gamma) (W_{1e}^2 + W_{2e}^2 + W_{3e}^2) dt, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon = \gamma / \alpha$, $\xi_B = M_e / M_\nu$; δ – управляющая функция, принимающая значения 0 (пассивный участок траектории) или 1 (активный участок траектории); W_{1e} , W_{2e} , W_{3e} – радиальная, трансверсальная и нормальная к плоскости оскулирующей орбиты компоненты реактивного ускорения; T – время выполнения маневра. При этом оптимальные значения масс, входящих в выражение (1.1), вычисляются по формулам

$$M_\nu = \frac{M_0 (\sqrt{\Phi_e} - \Phi_e)}{1 + \xi_B + \varepsilon N_\gamma}; \quad M_e = \frac{M_0 \xi_B (\sqrt{\Phi_e} - \Phi_e)}{1 + \xi_B + \varepsilon N_\gamma}; \quad M_F = M_0 \sqrt{\Phi_e};$$

$$M_\gamma = \frac{M_0 \varepsilon N_\gamma (\sqrt{\Phi_e} - \Phi_e)}{1 + \xi_B + \varepsilon N_\gamma}; \quad M_\pi = M_0 (\sqrt{\Phi_e} - 1)^2, \quad (1.4)$$

где

$$\Phi_e = \frac{\alpha r^{*2}}{2T^{*3}} J_e. \quad (1.5)$$

Значение параметра e_{a_0} вычисляется согласно (1.2) с учетом (1.4).

В случае двигателя постоянной мощности уравнение, описывающее текущее значение запаса энергии в накопителе e_a , имеет вид [3, 12]

$$\frac{de_a}{dt} = -\frac{\eta}{\xi_B} (N_\gamma \delta - 1), \quad e_a \in [0; 1]. \quad (1.6)$$

Здесь ограничения на величину e_a обусловлены тем, что запас энергии в накопителе не может превышать его энергоемкость и не может быть отрицательным, а $\eta = \beta T^* / \alpha$.

Для описания движения КЛА выберем следующий набор орбитальных параметров: e – эксцентриситет, $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$ (здесь a – большая полуось); ω – угловое расстояние перигентра; I – угол наклона плоскости орбиты; Ω – долгота восходящего узла; E – эксцентрическая аномалия.

Тогда безразмерные уравнения движения КЛА, согласно [4], имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W_{ke}; \quad x_j(0) = x_j^0; \quad x_j(T) = x_j^f; \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{6k} W_{ke}; \quad E(0) = E^0; \quad E(T) = E^f, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\bar{x} = \{\vartheta, e, \omega, I, \Omega\}$, а F_{jk} рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0; \quad F_{12} = \frac{1-e \cos E}{1-e^2}; \quad F_{13} = 0; \\ F_{21} &= \sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{1-e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}; \quad F_{23} = 0; \\ F_{31} &= -\frac{\cos E - e}{e(1-e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2-e^2 - e \cos E}{e\sqrt{1-e^2}(1-e \cos E)} \sin E; \\ F_{33} &= -\operatorname{ctg} I \left(\frac{\sin \omega}{1-e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E \right); \\ F_{41} &= F_{42} = 0; \quad F_{43} = \frac{\cos \omega}{1-e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E; \\ F_{51} &= F_{52} = 0; \quad F_{53} = -\frac{1}{\cos I} F_{33}; \quad F_{60} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\exp(3\vartheta)(1-e \cos E)}; \end{aligned}$$

$$F_{61} = \left(\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad F_{62} = \frac{2 - e \cos E}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{63} = 0.$$

Принимая во внимание малость компонентов вектора реактивного ускорения на каждом обороте, линеаризируем уравнения движения (1.7) в окрестности орбиты со значениями оскулирующих переменных в начале каждого оборота $\vartheta_{n-1}, e_{n-1}; \omega_{n-1}; I_{n-1}; \Omega_{n-1}, n = \overline{1, N}$, где n – номер оборота, и перейдем от независимой переменной t к независимой переменной E в (1.3), (1.6) и (1.7). Будем рассматривать маневры, при которых происходит существенное изменение параметров $\vartheta, e, I, a, \omega = \Omega = 0$. Теперь имеем задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\vartheta}}{dE} &= \frac{\exp(\vartheta_{n-1})}{F_{60}} [F_{12}W_{2e}]; \quad \tilde{\vartheta}(2\pi(n-1)) = 0; \quad \tilde{\vartheta}(2\pi n) = \Delta_{\vartheta_n}; \\ \frac{d\tilde{e}}{dE} &= \frac{\exp(\vartheta_{n-1})}{F_{60}} [F_{21}W_{1e} + F_{22}W_{2e}]; \quad \tilde{e}(2\pi(n-1)) = 0; \quad \tilde{e}(2\pi n) = \Delta_{e_n}; \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dE} &= \frac{\exp(\vartheta_{n-1})}{F_{60}} [F_{31}W_{1e} + F_{32}W_{2e} + F_{33}W_{3e}]; \quad \tilde{\omega}(2\pi(n-1)) = 0; \quad \tilde{\omega}(2\pi n) = 0; \\ \frac{d\tilde{I}}{dE} &= \frac{\exp(\vartheta_{n-1})}{F_{60}} [F_{43}W_{3e}]; \quad \tilde{I}(2\pi(n-1)) = 0; \quad \tilde{I}(2\pi n) = \Delta_{I_n}; \\ \frac{d\tilde{\Omega}}{dE} &= \frac{\exp(\vartheta_{n-1})}{F_{60}} [F_{53}W_{3e}]; \quad \tilde{\Omega}(2\pi(n-1)) = 0; \quad \tilde{\Omega}(2\pi n) = 0; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{de_a}{dE} = - \frac{\exp(3\vartheta_{n-1})(1 - e_{n-1} \cos E)}{(1 - e_{n-1}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\eta}{\xi_B} (N_\gamma \delta - 1); \quad e_a(2\pi(n-1)) = e_a(2\pi n) = 0,5;$$

$$J_{en} = \int_{2\pi(n-1)}^{2\pi n} \frac{\exp(3\vartheta_{n-1})(1 - e_{n-1} \cos E)}{(1 - e_{n-1}^2)^{\frac{3}{2}}} \delta b (W_{1e}^2 + W_{2e}^2 + W_{3e}^2) dE = \min;$$

$$J_e = \sum_{n=1}^N \Delta_{\vartheta_n}, \quad 0 \leq e_a \leq 1; \quad \sum_{n=1}^N \Delta_{\vartheta_n} = \Delta_{\vartheta}; \quad \sum_{n=1}^N \Delta_{e_n} = \Delta_e; \quad \sum_{n=1}^N \Delta_{I_n} = \Delta_I, \quad n = \overline{1, N}.$$

Здесь $b = (1 + \xi_B)/N_\gamma + \varepsilon$; $F_{ij} = F_{ij}(\vartheta_{n-1}, e_{n-1}, \omega_{n-1}, I_{n-1}, \Omega_{n-1}, E)$; $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \vartheta_{n-1}$; $\tilde{e} = e - e_{n-1}$; $\tilde{\omega} = \omega$; $\tilde{I} = I - I_{n-1}$; $\tilde{\Omega} = \Omega$; $\Delta_{\vartheta}, \Delta_e, \Delta_I$ – заданные приращения параметров орбиты. В работе [1] показано, что для маневров с большим количеством оборотов начальные и конечные значения на обороте для e_a можно положить равными 0,5. Применив к задаче (1.8) на каждом обороте метод Гамкредидзе [4] (распространение принципа максимума на задачи с фазовыми ограничениями), получим

$$\begin{aligned} W_{1e} &= \exp(\vartheta_0) \frac{\lambda_{2e} F_{21} + \lambda_{3e} F_{31}}{2b}; \quad W_{2e} = \exp(\vartheta_0) \frac{\lambda_{1e} F_{12} + \lambda_{2e} F_{22} + \lambda_{3e} F_{32}}{2b}; \\ W_{3e} &= \exp(\vartheta_0) \frac{\lambda_{3e} F_{33} + \lambda_{4e} F_{43} + \lambda_{5e} F_{53}}{2b}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В (1.9) величины $\lambda_{ie}, i = \overline{1, 5}$, постоянные, которые определяются из конечных условий каждого оборота в задаче (1.8).

Согласно результатам работы [12], если на протяжении одного оборота происходит маневр малого изменения параметров орбиты ϑ, e, I , а значения параметров ω и Ω в начале и в конце маневру равны 0, то программа оптимального реактивного ускорения имеет максимумы в окрестности точек $E = 0, E = \pi, E = 2\pi$, и $E = 0, E = 2\pi$. Поэтому оптимальная последовательность интервалов разрядки и зарядки накопителя (и, соответственно, активных $\delta = 1$ и пассивных $\delta = 0$ участков траектории) будет одной из таких, как показано на рис. 1 или рис. 2. Рис. 1 соответствует случаю максимумов в точках $E = 0, E = 2\pi$, а рис. 2 – в точках $E = 0, E = \pi, E = 2\pi$.

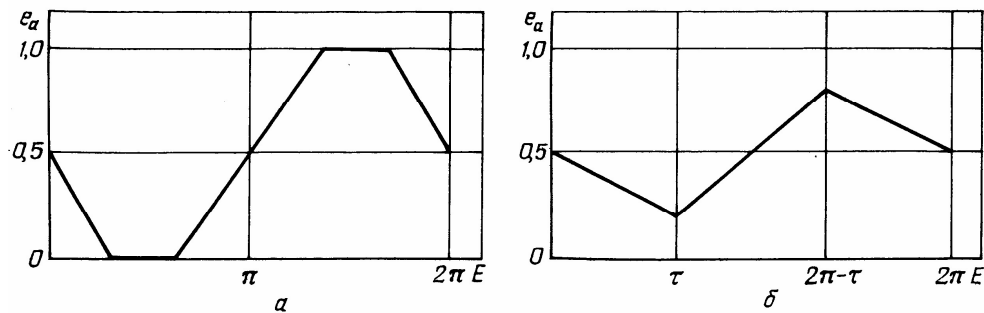


Рис. 1

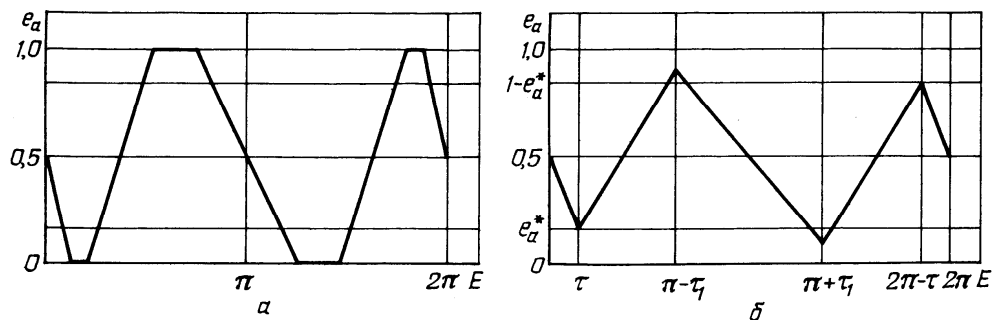


Рис. 2

Подставим соотношения (1.9) в систему (1.8). Интегрируем систему (1.8) с распределением активных и пассивных участков, соответственно, рис. 1 и рис. 2. При заданных значениях параметров $\Delta_{\vartheta_n}, \Delta_{e_n}, \Delta_{I_n}, \varepsilon, \eta, \xi_b, N_\gamma$ получаем два значения функционала J_e и выбираем распределение активных и пассивных участков, которое соответствует меньшему значению функционала J_e . Таким образом, задаваясь значениями ε, η и используя значения приращений $\Delta_{\vartheta_n}, \Delta_{e_n}, \Delta_{I_n}$, полученные при решении задачи без накопителя энергии методом, изложенным в работах [8, 9], проводим минимизацию функционала J_e по параметрам ξ_b и N_γ .

§2. Результаты расчетов и анализ результатов.

Рассмотрим маневр изменения угла наклона на 40° эллиптической орбиты с большой полуосью 42 000 км, эксцентриситетом $e = 0,1$ и $\omega = 0, \Omega = 0$ за 42 оборота. На рис. 3 показано как изменяются значения оскулирующих параметров орбиты, количество энергии в аккумуляторе и модуль вектора реактивного ускорения на втором, двадцатом и сороковом оборотах при $\varepsilon = 0,01; \eta = 0,007$.

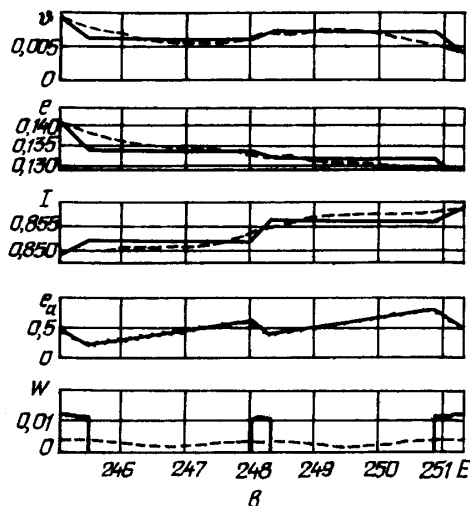
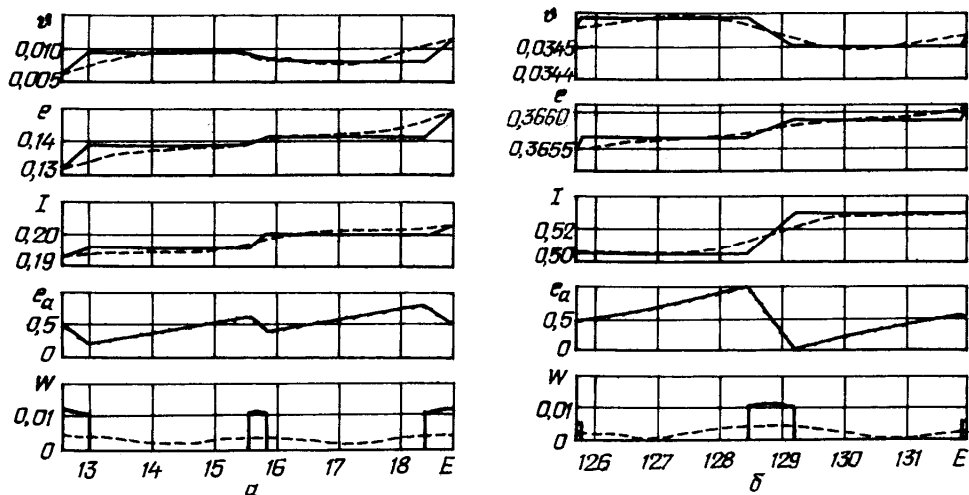


Рис. 3

На рис. 3 штриховыми линиями изображены зависимости, полученные для соответствующей задачи без накопителя энергии в составе двигательной системы.

Анализ динамики медленных переменных свидетельствует о том, что эксцентриситет и большая полуось оскулирующих орбит возрастают до середины маневра и затем возвращаются к своим начальным значениям. Это связано с тем, что приложение тяги для выполнения поворота плоскости орбиты выгодно в тех точках оскулирующих орбит, где скорость движения КЛА минимальна, т. е. вблизи апогея орбиты с как можно большими значениями эксцентриситета и большой полуоси. Поэтому при повороте плоскости орбиты на достаточно большой угол имеет смысл увеличивать большую полуось и эксцентриситет оскулирующих орбит. Таким образом, на начальных оборотах реактивное ускорение прикладывается вблизи перигея для увеличения эксцентриситета и большой полуоси потому, что по теореме Кенига увеличение полной энергии КЛА (увеличение большой полуоси) должно выполняться при возможно больших скоростях движения аппарата. Приведенные на рис. 3 графики подтверждают оптимальность указанного управления: на начальных и конечных оборотах ускорение прикладывается в основном вблизи перигея (рис. 3, а, рис. 3, в), а на средних оборотах – вблизи апогея (рис. 3, б).

Выигрыш по массе полезной нагрузки от использования накопителя энергии в двигательной системе будет иметь место, когда $J_e < J$ [1, 3], т.е. нужно оценивать этот выигрыш можно отношением функционалов J_e/J . Чем меньше это отношение, тем больше эффективность использования накопителя энергии. Здесь J – функционал соответствующей задачи без накопителя энергии, который равен:

$$J = (1 + \varepsilon) \int_0^T (W_1^2 + W_2^2 + W_3^2) dt.$$

Система уравнений движения для КЛА без накопителя энергии аналогична системе (1.8), только без уравнения для e_a , которое описывает текущее количество энергии в накопителе.

η	N_γ	ξ_b	J_e/J	$M_{\pi e}/M_\pi$	M_{Fe}/M_F	M_e
0,007	5,5154	0,0453	0,6030	21,2626	0,7765	0,0081
0,025	4,9033	0,1346	0,6614	16,1394	0,8133	0,0204
0,07	3,8048	0,2824	0,7808	8,2985	0,8836	0,0299
0,105	3,2380	0,3636	0,8595	4,7430	0,9271	0,0289
0,125	2,934	0,3995	0,9010	3,3162	0,9492	0,0265
0,15	2,5554	0,4318	0,9496	1,9953	0,9745	0,0224
0,165	2,3005	0,4384	0,9770	1,4086	0,9884	0,0193

В таблице представлены результаты расчетов для данного маневра при различных значениях параметра η . Здесь же, согласно формул (1.4), рассчитаны: оценка возможного увеличения массы полезной нагрузки $M_{\pi e}/M_\pi$ (M_π – масса полезной нагрузки для задачи без накопителя,) за счет включения накопителя энергии в состав двигательной системы, уменьшения массы рабочего тела M_{Fe}/M_F и оценка массы накопителя. Расчеты проведены при удельной массе источника мощности α равной 1,5 кг / квт.

Проведенное численное моделирование показало, что при выполнении данного маневра целесообразность включения накопителя энергии в состав двигательной системы КЛА теряется при $\eta > 0,17$.

Заключение.

Применение накопителя энергии в составе двигательной системы космического аппарата позволяет существенно увеличивать массу его полезной нагрузки. Принимая во внимание результаты работы [12], следует ожидать, что для маневров с существенным изменением большой полуоси эллиптической орбиты следует ожидать уменьшения эффективности работы накопителя энергии и, соответственно, выигрыша по массе полезной нагрузки. Отметим, что рассмотренная выше задача построения программных траекторий межорбитальных переходов космических аппаратов с малой тягой в центральном гравитационном поле может использоваться в качестве базовой при исследовании реальных движений с учетом запаздывания [10] и в условиях неопределенности [11].

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу оптимізації траєкторій, керувань та параметрів двигунної системи малої тяги сталої потужності з акумулятором енергії космічного літального апарату, що виконує космічний маневр одночасної суттєвої зміни великої півосі, ексцентриситету та кута нахилу еліптичної орбіти в сферичному гравітаційному полі. Проведено оцінку збільшення маси корисного навантаження при використанні акумулятора енергії в складі рушійної системи. Вказано оптимальні залежності керувань від часу та оптимальні співвідношення між масовими параметрами, що характеризують рушійну систему космічного апарату.

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. – М.: Наука, 1966. – 679 с.
2. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
3. Кифоренко Б.Н. О движении по орбитам, близким к круговым, при использовании двигательных систем с накопителем энергии // Механика твердого тела. Инженерный журнал. – 1967. – № 3. – С. 152 – 157.
4. Кифоренко Б. Н., Пасечник З. В., Васильев И. Ю. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 6. – С. 62 – 76.
5. Ткаченко Я.В. Оптимальные околокруговые движения космических аппаратов с накопителем энергии // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 10. – С. 93 – 100.
6. Camas M. Use of energy storage in low thrust spaceflight // ARS J. – 1960. – **30**, N 1. – P. 32 – 41.
7. Choueiri E. Y., Kelly A. J., Jahn R. G. Mass saving domain of plasma propulsion for LEO to GEO transfer // J. Spacecraft and Rockets. – 1993. – **30**, N 6. – P. 749 – 754.
8. Kiforenko B.N., Vasil'ev I.Yu. On Optimization of Many-Revolution Low-Thrust Orbit Transfers: Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 7. – P. 810 – 817.
9. Kiforenko B.N., Vasil'ev I.Yu. On Optimization of Many-Revolution Low-Thrust Orbit Transfers: Part 2 // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1050 – 1055.
10. Larin V.B. On Stabilization of Systems with Delay // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1148 – 1166.
11. Martynuk A.A., Slyn'ko V.I. On Stability of Motion with Respect to Two Measures under Uncertainty // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 1. – P. 91 – 100.
12. Tkachenko Ya.V. Using energy storage in low thrust constant power thruster for optimal interorbital transfers // Stability and control. Theory and application. – 2003. – **5**, N 1. – P. 22 – 40.

Поступила 28.12.2009

Утверждена в печать 21.10.2010