

А.Е.Букатов, А.А.Букатов

**О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ**

*Морской гидрофизический институт НАН Украины,
ул. Капитанская 2, 99011, Севастополь, Украина; e-mail: newisland@list.ru*

Abstract: By the multi-scale method, the equations for three nonlinear approximations of bending-gravitational oscillations of thin elastic plate are obtained. The plate is floating over the surface of homogeneous ideal non-compressive fluid of finite depth. The equations take into account the compression force and nonlinearity of acceleration of plate vertical shears, when the plate being bent. Basing on the equations, the asymptotic expansions are built up to the third degree of smallness for the plate bending and the potential of fluid motion, which are initiated by the running periodic wave of finite amplitude. A dependence of oscillation characteristics on the plate elastic modulus and thickness, shear force, the initial wave length and steepness is considered.

Key words: thin elastic plate, fluid of finite depth, bending-gravitational oscillations, initial wave length and steepness.

Введение.

В линейной постановке исследования колебаний упругой плавающей пластинки проведено при отсутствии [2, 7, 8, 11, 14] и при включении [1, 6, 10, 12 – 14] сжимающего усилия. Исследованию нелинейных колебаний абсолютно гибкой плавающей пластинки посвящена работа [9]. Колебания конечной амплитуды без учета нелинейности ускорения вертикальных смещений плавающей упругой пластинки, обусловленных ее изгибом, рассмотрены в [3, 4].

В настоящей работе рассмотрены колебания продольно сжатой упругой пластинки, плавающей на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины, формируемые бегущей периодической волной конечной амплитуды. Исследование выполнено на основе метода многомасштабных асимптотических разложений [5] с учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины плавает тонкая упругая пластинка. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость неограничены. Рассмотрим нелинейные колебания пластинки, предполагая движение жидкости потенциальным. В безразмерных величинах $x = kx_1$,

$z = kz_1$, $t = \sqrt{kg} t_1$, $\zeta = k\zeta^*$, $\varphi = (k^2/\sqrt{kg})\varphi^*$, где k – волновое число, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,zz} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -H \leq z \leq \zeta) \quad (1.1)$$

для потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$ с граничными условиями:
на поверхности пластинка – жидкость ($z = \zeta$)

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = p; \quad (1.2)$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right];$$

на дне ($z = -H$) бассейна –

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$) имеем условия

$$\zeta = f(x); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

В (1.2) – (1.4) приняты обозначения

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}; \quad \kappa = h \frac{\rho_1}{\rho};$$

E , h , ρ_1 , ν – модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона на пластинки; Q – продольное сжимающее усилие, приходящееся на единицу ширины пластинки; $\zeta(x, t)$ – прогиб пластинки или возвышение поверхности пластинка – жидкость; ρ – плотность жидкости; g – ускорение силы тяжести. Потенциал скорости и прогиб пластинки связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

В динамическом условии (1.2) выражение с множителем κ представляет собой инерцию вертикальных смещений пластинки. Первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения пластинки, не учтенную в [3, 4].

§2. Уравнения для нелинейных приближений.

Для решение задачи (1.1) – (1.5), представленной в безразмерных величинах, используем метод многих масштабов [5]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε малое, но конечное, и предположим справедливость разложений

$$\zeta = \varepsilon \zeta_0; \quad \varphi = \varepsilon \varphi_0; \quad f = \varepsilon f_0; \quad \zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \varepsilon^2 \zeta_3 + O(\varepsilon^3); \quad (2.1)$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_3 + O(\varepsilon^3); \quad f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3).$$

Подставив φ из (2.1) в (1.1) и (1.3), с точностью до величин третьего порядка малости получим равенства

$$\varepsilon \Delta \varphi_1 + \varepsilon^2 \Delta \varphi_2 + \varepsilon^3 \Delta \varphi_3 = 0; \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим динамическое (1.2), кинематическое (1.5) и начальное (1.4) условия. Представим потенциал скорости поверхности пластинка – жидкость $z = \varepsilon \zeta_0$ в виде

$$\varphi(x, t, \varepsilon \zeta_0) = \varphi(x, t, 0) + \varepsilon \zeta_0 \varphi_z(x, t, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta_0^2 \varphi_{zz}(x, t, 0) + \dots \quad (2.2)$$

Подставим $\zeta = \varepsilon \zeta_0$, $f = \varepsilon f_0$, $\varphi(x, t, \varepsilon \zeta_0)$ и $\varphi_z(x, t, \varepsilon \zeta_0)$ в соответствующие условия (1.2) и (1.5), принимая при этом, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2},$$

и учитывая зависимость ζ_0 от x и t в (2.2). Тогда, собрав коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю, получим уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty; -H \leq z \leq 0); \quad (2.3)$$

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta_n}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x^2} - \kappa k \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z \partial T_0} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} + \zeta_n = F_n^* \quad (z = 0); \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n \quad (n = 1, 2, 3); \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0 \quad (z = -H); \quad (2.6)$$

$$\zeta_n = f_n(x); \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n; \quad t = 0 \quad (n = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

для определения нелинейных приближений.

В равенствах (2.4) – (2.7) принято:

$$F_n^* = F_n + F_n^0; \quad F_1 = F_1^0 = L_1 = G_1 = 0 \quad (n = 1, 2, 3);$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \kappa k N;$$

$$N = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z}; \quad L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1};$$

$$F_3 = \zeta_1 N_1 + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + N_2 + \kappa k N_3;$$

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2};$$

$$N_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right);$$

$$N_3 = \zeta_1 N_4 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \zeta_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} + N_5;$$

$$N_4 = \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_1}; \quad N_5 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1};$$

$$L_3 = \zeta_1 N_6 - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2;$$

$$N_6 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3}; \quad F_2^0 = -\kappa k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x};$$

$$F_3^0 = -\kappa k \left[\zeta_1 N_7 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) \right];$$

$$N_7 = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}; \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}; \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}.$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0 , входящие в правые части динамических условий (2.4) для второго ($n=2$) и третьего ($n=3$) приближений, обусловлены учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки.

§3. Прогиб пластинки и потенциал скорости движения жидкости.

Уравнения (2.3) – (2.7) получены для общего случая неустановившихся колебаний конечной амплитуды. Найдем решение этих уравнений в случае бегущих периодических волн, задавая первое приближение ($n=1$) прогиба пластинки (возвышения поверхности пластинка – жидкость) в форме волны

$$\zeta_1 = \cos \theta; \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2), \quad (3.1)$$

бегущей в отрицательном направлении оси x . Тогда из кинематического условия (2.5) находим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \tau \sin \theta; \quad z = 0. \quad (3.2)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (2.6) на дне бассейна, представим φ_1 в виде

$$\varphi_1 = b_0 \operatorname{ch}(z+H) \sin \theta. \quad (3.3)$$

После подстановки (3.3) в (3.2) получим $b_0 = \tau \operatorname{sh}^{-1} H$. Следовательно, имеют место такие равенства:

$$\varphi_1 = b_1 \sin \theta; \quad b_1 = \tau \operatorname{sh}^{-1} H \operatorname{ch}(z+H). \quad (3.4)$$

Из динамического условия (2.4) с учетом (3.1), (3.4) для колебаний в линейном приближении найдем дисперсионное соотношение

$$\tau^2 = (1 - Q_1 k^2 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \operatorname{th} H)^{-1} \operatorname{th} H, \quad (3.5)$$

а выражение, определяющее $\beta(T_1, T_2)$ в (3.1), получим из последующих приближений.

Подставив ζ_1 и φ_1 в правые части уравнений (2.4), (2.5) для второго приближения и решив задачу при $n=2$, предполагая отсутствие основной гармоники, получаем

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta; \quad \varphi_2 = b_2 \sin 2\theta; \quad (3.6)$$

$$a_2 = \frac{3\tau^2 \eta_2}{4\mu_2 \operatorname{th} H}; \quad b_2 = \frac{\tau v_2 \operatorname{ch} 2(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch} 2H \operatorname{th} H}; \quad \eta_2 = (\operatorname{th} H - \operatorname{cth} H - 2\kappa k) \operatorname{th} 2H;$$

$$v_2 = \tau^2 (5\operatorname{th} H - \operatorname{cth} H + 2\kappa k) - 2(1 - 4Q_1 k^2 + 16D_1 k^4);$$

$$\mu_2 = (1 - 4Q_1 k^2 + 16D_1 k^4) \operatorname{th} 2H - 2\tau^2 (1 + 2\kappa k \operatorname{th} H).$$

При этом оказывается, что функция θ не зависит от T_1 , так как $\beta = \beta_2(T_2)$.

Полученные решения для первого (3.1), (3.4), (3.5) и второго (3.6) приближений определяют правые части динамического (2.4) и кинематического (2.5) условий задачи для третьего приближения ($n=3$). Исключив в них слагаемые, порождающие секулярность, для ζ_3 и φ_3 имеем формулы

$$\zeta_3 = a_3 \cos 3\theta; \quad \varphi_3 = b_3 \sin 3\theta; \quad a_3 = \frac{\tau^2 \eta_3}{\mu_3}; \quad b_3 = \frac{\tau v_3 \operatorname{ch} 3(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch} 3H},$$

в которых введены следующие обозначения:

$$\eta_3 = (l_1 - 3\kappa k l_2) \operatorname{th} 3H - l_2; \quad v_3 = 3\tau^2 l_1 - l_2 (1 - 9Q_1 k^2 + 81D_1 k^4);$$

$$l_1 = \kappa k l_{11} + l_{12}; \quad l_2 = \frac{1}{2} a_2 (3\operatorname{cth} H + 6\operatorname{cth} 2H) - \frac{3}{2} \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H + \frac{5}{8};$$

$$l_{11} = a_2 \left(5\operatorname{cth} 2H - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{cth} H - 5\operatorname{cth} 2H) \operatorname{cth} H - \frac{1}{8};$$

$$l_{12} = a_2 \left(\frac{11}{2} - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H \right) + \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{15}{8} \right) \operatorname{cth} H;$$

$$\mu_3 = (1 - 9Q_1 k^2 + 81D_1 k^4) \operatorname{th} 3H - 3\tau^2 (1 + 3\kappa k \operatorname{th} 3H);$$

$$\beta = \tau \sigma_0 T_2; \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} \left[l_3 - l_4 (\kappa k + \operatorname{cth} H)^{-1} \right];$$

$$l_3 = \frac{1}{2} a_2 (\operatorname{cth} H + 2\operatorname{cth} 2H) - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{3}{8};$$

$$l_4 = \kappa k l_{41} - l_{42}; \quad l_{41} = a_2 \left(\operatorname{cth} 2H - \frac{5}{2} \operatorname{cth} H \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{cth} H - \operatorname{cth} 2H) \operatorname{cth} H - \frac{3}{8};$$

$$l_{42} = a_2 \left(\frac{1}{2} + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H \right) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{5}{4} \right) \operatorname{cth} H.$$

В результате для определения прогиба пластинки ζ и потенциала скорости движения жидкости φ в безразмерных величинах до третьего порядка малости имеем выражения

$$\zeta = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos n\theta; \quad \varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_n \sin n\theta;$$

$$\theta = x + \sigma t; \quad \sigma = \tau(1 + \varepsilon^2 \sigma_0); \quad a_1 = 1.$$

В размерных величинах ($\zeta^* = \zeta / k$, $\varphi^* = \varphi \sqrt{kg} / k^2$, $x_1 = x / k$, $z_1 = z / k$, $t_1 = t / \sqrt{kg}$, $\varepsilon = ak$, где a – амплитуда начальной гармоник) имеем формулы

$$\zeta = a \cos \theta + a^2 k a_2 \cos 2\theta + a^3 k^2 a_3 \cos 3\theta; \quad (3.7)$$

$$\varphi = a \sqrt{g/k} b_1 \sin \theta + a^2 \sqrt{kg} b_2 \sin 2\theta + a^3 k \sqrt{kg} b_3 \sin 3\theta;$$

$$\theta = kx + \sigma_1(1 + \sigma^0)t; \quad \sigma^0 = a^2 k^2 \sigma_0; \quad \sigma_1 = \tau \sqrt{kg}$$

(здесь и далее индекс 1 у x, z, t и звездочка у ζ и φ опущены).

§4. Анализ результатов.

Полученное решение (3.7) справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волнового числа k , являющихся положительными действительными корнями $k=k_1$ и $k=k_2$ уравнений $\mu_2=0$ и $\mu_3=0$, соответственно. В приближении глубокой воды ($kH \gg 1$) эти уравнения принимают вид

$$2D_1 k^4 (7 + 6\kappa k) - 2Q_1 k^2 - 3\kappa k - 1 = 0;$$

$$3D_1 k^4 (13 + 12\kappa k) - 3Q_1 k^2 - 4\kappa k - 1 = 0.$$

Пренебрегая здесь слагаемыми, обусловленными инерцией пластинки ($\kappa=0$), приходим к равенствам

$$k_1 = \left(\frac{Q_1 + \sqrt{Q_1^2 + 14D_1}}{14D_1} \right)^{1/2}; \quad k_2 = \left(\frac{3Q_1 + \sqrt{9Q_1^2 + 156D_1}}{78D_1} \right)^{1/2},$$

а при отсутствии сжатия ($Q=0$) –

$$k_1 = 1/\sqrt[4]{14D_1}; \quad k_2 = 1/\sqrt[4]{39D_1}.$$

В случае мелкой воды ($kH \ll 1$) резонансные значения k_1 и k_2 являются корнями уравнений

$$4\kappa HD_1 k^4 + 5D_1 k^2 - \kappa H - Q_1 = 0; \quad (3.8)$$

$$9\kappa HD_1 k^4 + 10D_1 k^2 - \kappa H - Q_1 = 0,$$

из решения которых получим

$$k_1 = \left[\frac{5}{8\kappa H} \left(\sqrt{1 + \frac{16\kappa H (\kappa H + Q_1)}{25D_1}} - 1 \right) \right]^{1/2}; \quad k_2 = \left[\frac{5}{9\kappa H} \left(\sqrt{1 + \frac{9\kappa H (\kappa H + Q_1)}{25D_1}} - 1 \right) \right]^{1/2},$$

а пренебрежение инерцией пластинки ($\kappa=0$ в (3.8)) приводит к таким значениям:

$$k_1 = \sqrt{Q_1/(5D_1)}; \quad k_2 = \sqrt{Q_1/(10D_1)}.$$

В общем случае, результаты проведенных численных расчетов свидетельствуют о том, что при фиксированной глубине жидкости значения k_1 и k_2 , являющиеся корнями уравнений $\mu_1=0$ и $\mu_2=0$, возрастают с уменьшением модуля упругости пластинки. Увеличение сжимающего усилия приводит к их росту. Увеличение глубины жидкости также обуславливает рост значений k_1 и k_2 . Однако, верхняя граница значений глубины H , где это влияние существенно, убывает с уменьшением модуля упругости, но растет с уменьшением сжимающего усилия. При фиксированных E и Q уменьшение толщины пластинки сопровождается увеличением k_1 и k_2 .

Графики на рис. 1 иллюстрируют зависимость k_1 (штриховые линии) и k_2 (сплошные линии) от толщины пластинки при $H=20$ м. Они получены при $\rho_1/\rho = 0,87$; $\nu=0,34$, соответствующих ледяной пластинке. Кривые 1 и 2 на рис. 1, а отвечают ве-

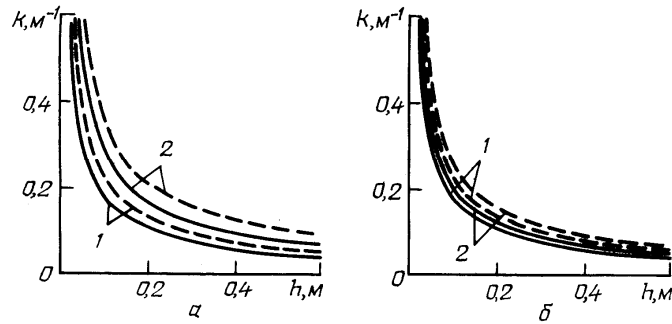


Рис. 1

личинам модуля упругости $3 \cdot 10^9$ и $5 \cdot 10^8$ Н/м² при $Q_1=0$, а на рис. 1, б – величинам $Q_1=0$ и $Q_1=\sqrt{D_1}$ при $E=3 \cdot 10^9$ Н/м². Изолинии значений k_1 и k_2 в плоскости H, Q_1 при $h=0,5$ м представлены, соответственно, на рис. 2, а и рис. 2, б, где $Q_1=2\sqrt{D_1}=120$ м².

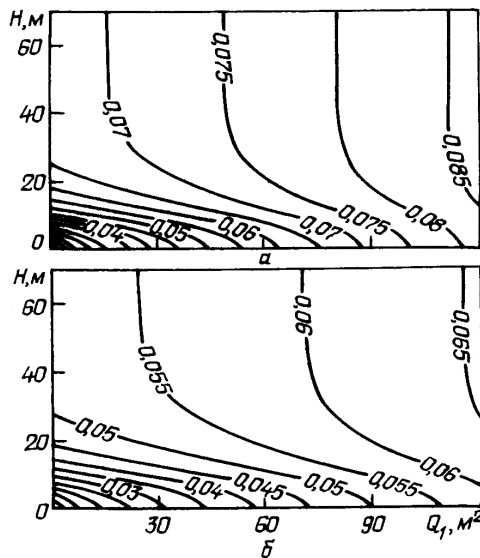


Рис. 2

Если пластинка абсолютно гибкая ($E=0$) и $Q=0$, то решение (3.7) для жидкости конечной глубины справедливо при любых значениях волнового числа [9].

Численные расчеты распределений высоты вертикального смещения поверхности пластинки – жидкость (прогиба пластинки) вдоль направления перемещения волны, выполненные по формулам (3.7), показали, что структуру возмущений определяют не только цилиндрическая жесткость пластинки и сжимающее усилие, но и глубина жидкости, длина ($\lambda=2\pi/k$) и крутизна ($\varepsilon=ak$) волны начальной основной гармоники. О влиянии этих параметров можно судить по изменению вклада высших гармоник в колебания, а следовательно, и вида профиля волны прогиба. Это иллюстрируют графики на рис. 3, 4, построенные при

$H=10$ м; $t=70$ с; $k=0,035$ м⁻¹ (рис. 3) и $H=20$ м; $t=10$ с; $k=0,133$ м⁻¹ (рис. 4) для тех же ν и ρ_1/ρ , что и на рис. 1. Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные линии

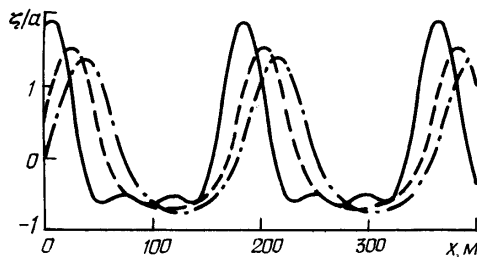


Рис. 3

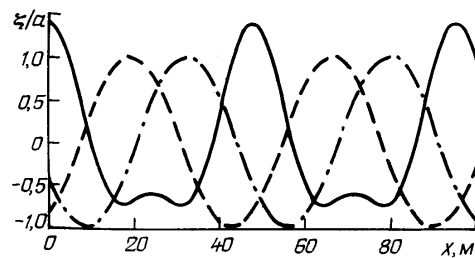


Рис. 4

отвечают значениям Q_1 , равным $0, \sqrt{D_1}, 1,95\sqrt{D_1}$ при $E=3\cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, h=0,2\text{ м}; a=1\text{ м}$. Приведенные распределения $\zeta(x)$ свидетельствуют также о влиянии сжимающего усилия на фазовую скорость волны изгиба пластинки. Для указанных параметров при фиксированном модуле упругости E она убывает с ростом сжимающего усилия Q при любом $k \neq k_1$. Отставание фазы (волна распространяется в отрицательном направлении оси x) обуславливается и увеличением модуля упругости при фиксированном $Q_1 \neq 0$ и $k < k_1$. Если $k > k_1$, то рост E при заданном $Q_1 \neq 0$ увеличивает фазовую скорость. При отсутствии сжатия ($Q=0$) с ростом E растет и величина фазовой скорости волны изгиба при всех $k \neq k_1$.

Нелинейность ускорения вертикальных смещений пластинки обуславливает сдвиг фазы колебаний в направлении движения волны изгиба и слабому увеличению их амплитуды, если пластинка абсолютно гибкая ($E=0$). В случае упругой пластинки влияние нелинейности ускорения на фазу колебаний заметно проявляется при $k > k_1$. Оно выражается в отставании фазы как при отсутствии, так и при включении сжатия. Причем это влияние убывает с увеличением длины волны изгиба начальной основной гармоники.

Заключение.

Методом многих масштабов получены уравнения для трех нелинейных приближений решения задачи о колебании плавающей упругой пластинки, учитывающие сжимающее усилие и нелинейность ускорения вертикальных смещений пластинки при ее изгибе. В случае бегущей периодической волны конечной амплитуды построены асимптотические разложения, определяющие изгиб пластинки и потенциал скорости движения жидкости с точностью до величин третьего порядка малости. Эти разложения справедливы вне малых окрестностей двух резонансных значений волнового числа. На примере ледяной пластинки выполнен количественный анализ зависимости характеристик ее изгиба и резонансных значений волнового числа от толщины и модуля упругости пластинки, сжимающего усилия и глубины жидкости. Показано, что изменение этих параметров влияет на фазовую скорость волны прогиба и величину вклада высших гармоник в формирование колебаний, а следовательно, и на структуру профиля волны прогиба.

Р Е З Ю М Е . Методом багатьох масштабів отримано рівняння для трьох нелінійних наближень вигинно-гравітаційних коливань тонкої пружної пластинки, що плаває на поверхні однорідної ідеальної нестисливої рідини скінченної глибини. Вони враховують поздовжнє зусилля стиску та нелінійність прискорення вертикальних зсувів пластинки при її вигині. На основі цих рівнянь побудовано асимптотичні розкладання до величини третього порядку малості для вигину пластинки й потенціалу швидкості руху рідини, які сформовані періодичною біжучою хвилею скінченної амплітуди. Розглянуто залежність характеристик коливань від модуля пружності й товщини пластинки, величини зусилля стиску, довжини й крутості хвилі початкової гармоніки.

1. Букатов А.Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 1. – С. 93 – 98.
2. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 8. – С. 89 – 96.
3. Гладун О.М., Федосенко В.С. Нелинейные установившиеся колебания упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1989. – № 3. – С. 146 – 154.
4. Гольдштейн Р.В., Марченко А.В. О длинных волнах в системе ледяной покров – жидкость при наличии ледового сжатия // Электрофизические и физико-механические свойства льда: Сб. науч. тр. / ГК СССР по гидрометеорологии. ААНИИ. – Л.: Гидрометеоздат, 1989. – С. 188 – 205.

5. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
6. *Пожуев В.И., Полякова Н.П.* Нестационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на ледяной покров // Строит. механика и расчет сооружений. – 1990. – № 6. – С. 46 – 50.
7. *Ткаченко В.А., Яковлев В.В.* Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны в системе жидкость – пластинка // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 3. – С. 70 – 75.
8. *Хейсин Д.Е.* Нестационарная задача о колебаниях бесконечной пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 163 – 167.
9. *Bukatov A.E., Bukatov A.A.* Propagation of surface wave of finite amplitude in a basin with floating broken ice // Int. J. Offshore and Polar Eng. – 1999. – 9, N 3. – P. 161 – 166.
10. *Bukatov A.E., Zharkov V.V.* Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. – Part 1. Surface waves // Int. J. Offshore and Polar Eng. – 1997. – 7, N 1. – P. 1 – 12.
11. *Daffy D.G.* The response of floating ice to a moving, vibrating load // Cold Regions Sci. and Techn. – 1991. – 20. – P. 51 – 64.
12. *Kerr A.D.* The critical velocities of a moving on a floating ice plate that is subjected to in – plane forces // Cold Regions Sci. and Techn. – 1983. – 6. – P. 267 – 276.
13. *Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Sneyd A.D.* Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. – Part 2 // J. Fluid Mech. – 1987. – 180. – P. 297 – 318.
14. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving loads on ice plates. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 250 p.

Поступила 15.06.2009

Утверждена в печать 15.06.2010