Д . М . Л и л а

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина; e-mail: dim_l@ukr.net

Abstract. Basing on the auxiliary matrix-valued function, a way is proposed and developed for construction of the periodic in time Lyapunov function for a linear system with periodic coefficients. The new sufficient conditions of stability of motion are formulated for the large-scale periodic systems, when they are decomposed on the even number of subsystems.

Key words: large-scale periodic system, linear system with periodic coefficients, block-diagonal matrix-valued function, periodic in time Lyapunov function, conditions of asymptotic stability.

Введение.

Движения, многократно повторяющиеся или приблизительно повторяющиеся через определенные промежутки времени, связаны с колебательными явлениями в естествознании и технике [10, 14, 21]. При этом практический интерес, в частности, в механике представляют лишь действительно осуществимые движения такого рода. Согласно принципу выбора (во множестве всех теоретически возможных решений соответствующих уравнений движения) им соответствуют устойчивые решения.

Положительный опыт распространения прямого метода Ляпунова при создании надежных приемов исследования устойчивости крупномасштабных систем и систем с бесконечным числом степеней свободы, обоснование универсальности метода функций Ляпунова [1, 6, 8, 12, 22] с последующими его обобщениями и модификациями [3, 5, 7, 9, 11], используемыми в настоящее время при развитии метода многокомпонентных функций [4, 19, 20] и получении новых условий устойчивости для некоторых классов систем [13, 15, 16, 18], представляют проблему построения подходящей V-функции для систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [2] как актуальную задачу.

В настоящей статье используется результат работы [2, 17] относительно базирующегося на общей теореме об асимптотической устойчивости периодической системы (на основе матричнозначной вспомогательной функции) способа построения функции Ляпунова. Путем обобщения этого результата сформулированы достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости движения крупномасштабных периодических систем. Проанализирован в общем виде случай системы произвольного порядка с коэффициентами в форме матричных тригонометрических полиномов, состоящей из парного числа подсистем. При этом идея построения внедиагональных элементов блочно-диагональной матричнозначной функции на основе решений интегральных уравнений Фредгольма второго рода здесь конкретизирована применительно к рассматриваемой системе. Построение диагональных элементов приводится к квадратурам.

§1. Построение функции Ляпунова. Условия устойчивости.

Объектом исследования является система

$$\frac{dx_{2s-1}}{dt} = A_{2s-1,2s-1}x_{2s-1} + A_{2s-1,2s}(t)x_{2s} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq 2s-1,2s)}}^{2r} A_{2s-1,j}(t)x_j; \;\; x_{2s-1}(t_0) = x_{2s-1,0};$$

$$\frac{dx_{2s}}{dt} = A_{2s,2s}x_{2s} + A_{2s,2s-1}(t)x_{2s-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq 2s-1,2s)}}^{2r} A_{2s,j}(t)x_j; \;\; x_{2s}(t_0) = x_{2s,0}, \; s = 1,\dots, r, \tag{1.1}$$

где $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $\sum_{j=1}^{2r} n_j = n$, $A_{jj} \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$, $j = 1,\dots, 2r$, – постоянные матрицы, и

$$A_{jl}(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_{jl}^{(k)} e^{i\omega kt} \quad (j,\, l = 1,\ \dots,\ 2r,\ j \neq l)\ ;$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T},\ T > 0\ ; \quad A_{jl}^{(k)} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_l}\ ; \quad A_{jl}^{(-k)} = \overline{A_{jl}^{(k)}}\ .$$

Для системы (1.1) построим матричнозначную функцию

$$U(t,\ x_1,\ \dots,\ x_{2r}) = \operatorname{diag}\left[V_{12}(t,\ x_1,\ x_2),\ \dots,\ V_{2r-1,2r}(t,\ x_{2r-1},\ x_{2r})\right], \tag{1.2}$$

где

$$V_{2s-1,2s}(t, x_{2s-1}, x_{2s}) = \begin{bmatrix} v_{2s-1,2s-1}(t, x_{2s-1}) & v_{2s-1,2s}(t, x_{2s-1}, x_{2s}) \\ v_{2s,2s-1}(t, x_{2s-1}, x_{2s}) & v_{2s,2s}(t, x_{2s}) \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

$$v_{2s-1,2s-1}(t,\ x_{2s-1}) = x_{2s-1}^T P_{2s-1,2s-1}(t)x_{2s-1}; \quad v_{2s,2s}(t, x_{2s}) = x_{2s}^T P_{2s,2s}(t)x_{2s},$$

а $P_{2s-1,2s-1}(t) \in C^1\left(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^{n_{2s-1}\times n_{2s-1}}\right)$, $P_{2s,2s}(t) \in C^1\left(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^{n_{2s}\times n_{2s}}\right)$ – T-периодические симметричные матрицы-функции;

$$v_{2s-1,2s}(t, x_{2s-1},\ x_{2s}) = v_{2s,2s-1}(t, x_{2s-1},\ x_{2s}) = x_{2s-1}^T P_{2s-1,2s}(t)x_{2s};$$

$$P_{2s-1,2s}(t) \in C^1\left(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^{n_{2s-1}\times n_{2s}}\right); \quad P_{2s-1,2s}(t+T) = P_{2s-1,2s}(t) \quad (s = 1,\ \dots,\ r).$$

Ограничиваясь в соответствии с (1.2), (1.3) случаем, когда все r пар подсистем системы (1.1) независимые, найдем полную производную функции Ляпунова (см. [19]).

$$v(t, x, \eta) = \eta^T U(t, x_1,\ \dots,\ x_{2r})\eta, \tag{1.4}$$

где $x = \left(x_1^T,\ \dots,\ x_{2r}^T\right)^T$, $\eta = (\eta_1,\ \dots,\ \eta_{2r})^T$, $\eta_j > 0$, $j = 1,\ \dots,\ 2r$ вдоль решений системы

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11}x_1 + A_{12}(t)x_2; \quad x_1(t_0) = x_{10};$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \tag{1.5}$$

$$\frac{dx_{2r}}{dt} = A_{2r,2r}x_{2r} + A_{2r,2r-1}(t)x_{2r-1}; \quad x_{2r}(t_0) = x_{2r,0}.$$

Тогда имеем

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.5)} = \frac{d}{dt}\left.\left(\sum_{s=1}^{r}\left(v_{2s-1,2s-1}(t, x_{2s-1})\eta_{2s-1}^2 + 2v_{2s-1,2s}(t, x_{2s-1}, x_{2s})\eta_{2s-1}\eta_{2s} + v_{2s,2s}(t, x_{2s})\eta_{2s}^2\right)\right)\right|_{(2.5)} =$$

$$
=\sum_{s=1}^{r}\Big(\Big[\big(A_{2s-1,2s-1}x_{2s-1}+A_{2s-1,2s}(t)x_{2s}\big)^{T}P_{2s-1,2s-1}(t)x_{2s-1}+x_{2s-1}^{T}\frac{dP_{2s-1,2s-1}}{dt}x_{2s-1}+
$$

$$
+x_{2s-1}^{T}P_{2s-1,2s-1}(t)\big(A_{2s-1,2s-1}x_{2s-1}+A_{2s-1,2s}(t)x_{2s}\big)\Big]\eta_{2s-1}^{2}+\Big[\big(A_{2s,2s}x_{2s}+A_{2s,2s-1}(t)x_{2s-1}\big)^{T}P_{2s,2s}(t)x_{2s}+
$$

$$
+x_{2s}^{T}\frac{dP_{2s,2s}}{dt}x_{2s}+x_{2s}^{T}P_{2s,2s}(t)\big(A_{2s,2s}x_{2s}+A_{2s,2s-1}(t)x_{2s-1}\big)\Big]\eta_{2s}^{2}+
$$

$$
+\Big[\big(A_{2s-1,2s-1}x_{2s-1}+A_{2s-1,2s}(t)x_{2s}\big)^{T}P_{2s-1,2s}(t)x_{2s}+x_{2s-1}^{T}\frac{dP_{2s-1,2s}}{dt}x_{2s}+
$$

$$
+x_{2s-1}^{T}P_{2s-1,2s}(t)\big(A_{2s,2s}x_{2s}+A_{2s,2s-1}(t)x_{2s-1}\big)\Big]\eta_{2s-1}\eta_{2s}+
$$

$$
+\Big[\big(A_{2s,2s}x_{2s}+A_{2s,2s-1}(t)x_{2s-1}\big)^{T}P_{2s-1,2s}^{T}(t)x_{2s-1}+x_{2s}^{T}\frac{dP_{2s-1,2s}^{T}}{dt}x_{2s-1}+
$$

$$
+x_{2s}^{T}P_{2s-1,2s}^{T}(t)\big(A_{2s-1,2s-1}x_{2s-1}+A_{2s-1,2s}(t)x_{2s}\big)\Big]\eta_{2s-1}\eta_{2s}\Big)=
$$

$$
=\sum_{s=1}^{r}\left(s_{2s-1}^{T}\left[\left(A_{2s-1,2s-1}^{T}P_{2s-1,2s-1}(t)+\frac{dP_{2s-1,2s-1}}{dt}+P_{2s-1,2s-1}(t)A_{2s-1,2s-1}\right)\eta_{2s-1}^{2}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\big(P_{2s-1,2s}(t)A_{2s,2s-1}(t)+A_{2s,2s-1}^{T}(t)P_{2s-1,2s}^{T}(t)\big)\eta_{2s-1}\eta_{2s}\right]x_{2s-1}+
$$

$$
+s_{2s}^{T}\left[\left(A_{2s,2s}^{T}P_{2s,2s}(t)+\frac{dP_{2s,2s}}{dt}+P_{2s,2s}(t)A_{2s,2s}\right)\eta_{2s}^{2}+\right.
$$

$$
\left.+\big(A_{2s-1,2s}^{T}(t)P_{2s-1,2s}(t)+P_{2s-1,2s}^{T}(t)A_{2s-1,2s}(t)\big)\eta_{2s-1}\eta_{2s}\right]x_{2s}+
$$

$$
+x_{2s-1}^{T}\Big[P_{2s-1,2s-1}(t)A_{2s-1,2s}(t)\eta_{2s-1}^{2}+A_{2s,2s-1}^{T}(t)P_{2s,2s}(t)\eta_{2s}^{2}+
$$

$$
\left.+\left(A_{2s-1,2s-1}^{T}P_{2s-1,2s}(t)+\frac{dP_{2s-1,2s}}{dt}+P_{2s-1,2s}(t)A_{2s,2s}\right)\eta_{2s-1}\eta_{2s}\right]x_{2s}+
$$

$$
+x_{2s}^{T}\Big[A_{2s-1,2s}^{T}(t)P_{2s-1,2s-1}(t)\eta_{2s-1}^{2}+P_{2s,2s}(t)A_{2s,2s-1}(t)\eta_{2s}^{2}+
$$

$$
\left.\left.+\left(A_{2s,2s}^{T}P_{2s-1,2s}^{T}(t)+\frac{dP_{2s-1,2s}^{T}}{dt}+P_{2s-1,2s}^{T}(t)A_{2s-1,2s-1}\right)\eta_{2s-1}\eta_{2s}\right]x_{2s-1}\right).
$$

Предположим, что $P_{2s-1,2s-1}(t)$, $P_{2s,2s}(t)$, $P_{2s-1,2s}(t)$, $s=1,\ldots,r$, удовлетворяют системе линейных неоднородных дифференциальных матричных уравнений

$$\frac{dP_{2s-1,2s-1}}{dt}+A_{2s-1,2s-1}^{T}P_{2s-1,2s-1}+P_{2s-1,2s-1}A_{2s-1,2s-1}=-S_{2s-1}(t)+P_{2s-1,2s}(t)C_{2s,2s-1}(t)+$$

$$+C_{2s,2s-1}^{T}(t)P_{2s-1,2s}^{T}(t);$$

$$\frac{dP_{2s,2s}}{dt}+A_{2s,2s}^{T}P_{2s,2s}+P_{2s,2s}A_{2s,2s}=-S_{2s}(t)+C_{2s-1,2s}^{T}(t)P_{2s-1,2s}(t)+P_{2s-1,2s}^{T}(t)C_{2s-1,2s}(t); \tag{1.6}$$

$$\frac{dP_{2s-1,2s}}{dt}+A_{2s-1,2s-1}^{T}P_{2s-1,2s}+P_{2s-1,2s}A_{2s,2s}=P_{2s-1,2s-1}(t)C_{2s-1,2s}(t)+C_{2s,2s-1}^{T}(t)P_{2s,2s}(t),$$

где $C_{2s-1,2s}(t)=-\dfrac{\eta_{2s-1}}{\eta_{2s}}A_{2s-1,2s}(t)$, $C_{2s,2s-1}(t)=-\dfrac{\eta_{2s}}{\eta_{2s-1}}A_{2s,2s-1}(t)$, а матрицы $S_{2s-1}(t)$, $S_{2s}(t)$ известны. В этом случае полную производную функции (1.4) вдоль решений системы (1.5) получим в виде

$$dv\big/dt\Big|_{(1.5)}=-\sum_{j=1}^{2r}x_j^T S_j(t)x_j\eta_j^2. \tag{1.7}$$

Исключая из первых двух уравнений каждой из r независимых подсистем системы (1.6) переменные $P_{2s-1,2s-1}(t)$, $P_{2s,2s}(t)$ по формулам

$$P_{2s-1,2s-1}(t)=\int_0^T G_{2s-1}(t,\tau)\left(-S_{2s-1}(\tau)+P_{2s-1,2s}(\tau)C_{2s,2s-1}(\tau)+C_{2s,2s-1}^{T}(\tau)P_{2s-1,2s}^{T}(\tau)\right)d\tau,$$

$$P_{2s,2s}(t)=\int_0^T G_{2s}(t,\tau)\left(-S_{2s}(\tau)+C_{2s-1,2s}^{T}(\tau)P_{2s-1,2s}(\tau)+P_{2s-1,2s}^{T}(\tau)C_{2s-1,2s}(\tau)\right)d\tau, \tag{1.8}$$

где

$$G_i(t,\tau)=\begin{cases}G_i^{(1)}(t,\tau), & 0\le\tau\le t\le T,\\ G_i^{(2)}(t,\tau), & 0\le t<\tau\le T,\end{cases} \tag{1.9}$$

причем

$$G_i^{(1)}(t,\tau)=\mathcal{P}_i(t)(\mathcal{I}-\mathcal{P}_i(T))^{-1}\mathcal{P}_i^{-1}(\tau);\quad G_i^{(2)}(t,\tau)=\mathcal{P}_i(t+T)(\mathcal{I}-\mathcal{P}_i(T))^{-1}\mathcal{P}_i^{-1}(\tau);$$

$\mathcal{P}_i(t)$, $i=2s-1,\ 2s$ – нормированный при $t=0$ фундаментальный оператор соответствующего однородного уравнения; $\mathcal{I}$ – тождественный оператор; после некоторых преобразований приходим к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода

$$P_{2s-1,2s}(t)=F_{2s-1,2s}(t)+\int_0^T N_{2s-1,2s}(t,\tau)P_{2s-1,2s}(\tau)d\tau \tag{1.10}$$

относительно периодических матриц-функций $P_{2s-1,2s}(t)$, $s=1,\ \dots,\ r$. Действительно,

$$P_{2s-1,2s-1}(t)=F_{2s-1}(t)+\int_0^t G_{2s-1}^{(1)}(t,\tau)\left(P_{2s-1,2s}(\tau)C_{2s,2s-1}(\tau)+C_{2s,2s-1}^{T}(\tau)P_{2s-1,2s}^{T}(\tau)\right)d\tau+$$

$$+\int_t^T G_{2s-1}^{(2)}(t,\tau)\left(P_{2s-1,2s}(\tau)C_{2s,2s-1}(\tau)+C_{2s,2s-1}^{T}(\tau)P_{2s-1,2s}^{T}(\tau)\right)d\tau;$$

$$F_{2s-1}(t)=-\int_0^t G_{2s-1}^{(1)}(t,\tau)S_{2s-1}(\tau)d\tau-\int_t^T G_{2s-1}^{(2)}(t,\tau)S_{2s-1}(\tau)d\tau;$$

$$P_{2s,2s}(t) = F_{2s}(t) + \int_0^t G_{2s}^{(1)}(t,\tau)\left(C_{2s-1,2s}^T(\tau)P_{2s-1,2s}(\tau) + P_{2s-1,2s}^T(\tau)C_{2s-1,2s}(\tau)\right)d\tau +$$

$$+\int_t^T G_{2s}^{(2)}(t,\tau)\left(C_{2s-1,2s}^T(\tau)P_{2s-1,2s}(\tau) + P_{2s-1,2s}^T(\tau)C_{2s-1,2s}(\tau)\right)d\tau;$$

$$F_{2s}(t) = -\int_0^t G_{2s}^{(1)}(t,\tau)S_{2s}(\tau)d\tau - \int_t^T G_{2s}^{(2)}(t,\tau)S_{2s}(\tau)d\tau,$$

поэтому последнее уравнение соответствующей подсистемы принимает вид

$$\frac{dP_{2s-1,2s}}{dt} + A_{2s-1,2s-1}^T P_{2s-1,2s} + P_{2s-1,2s}A_{2s,2s} = \Phi_{2s-1,2s}(t) + \int_0^T K_{2s-1,2s}(t,\tau)P_{2s-1,2s}(\tau)d\tau$$

с учетом таких равенств:

$$\Phi_{2s-1,2s}(t) = F_{2s-1}(t)C_{2s-1,2s}(t) + C_{2s,2s-1}^T(t)F_{2s}(t);$$

$$\int_0^T K_{2s-1,2s}(t,\tau)P_{2s-1,2s}(\tau)d\tau = \int_0^t G_{2s-1}^{(1)}(t,\tau)\left(P_{2s-1,2s}(\tau)C_{2s,2s-1}(\tau) + C_{2s,2s-1}^T(\tau)P_{2s-1,2s}^T(\tau)\right)C_{2s-1,2s}(t)d\tau +$$

$$+\int_t^T G_{2s-1}^{(2)}(t,\tau)\left(P_{2s-1,2s}(\tau)C_{2s,2s-1}(\tau) + C_{2s,2s-1}^T(\tau)P_{2s-1,2s}^T(\tau)\right)C_{2s-1,2s}(t)d\tau +$$

$$+\int_0^t C_{2s,2s-1}^T(t)G_{2s}^{(1)}(t,\tau)\left(C_{2s-1,2s}^T(\tau)P_{2s-1,2s}(\tau) + P_{2s-1,2s}^T(\tau)C_{2s-1,2s}(\tau)\right)d\tau +$$

$$+\int_t^T C_{2s,2s-1}^T(t)G_{2s}^{(2)}(t,\tau)\left(C_{2s-1,2s}^T(\tau)P_{2s-1,2s}(\tau) + P_{2s-1,2s}^T(\tau)C_{2s-1,2s}(\tau)\right)d\tau =$$

$$= \int_0^t K_{2s-1,2s}^{(1)}(t,\tau)P_{2s-1,2s}(\tau)d\tau + \int_t^T K_{2s-1,2s}^{(2)}(t,\tau)P_{2s-1,2s}(\tau)d\tau.$$

T-периодическое решение $P_{2s-1,2s}(t)$ этого уравнения принимает вид (1.10), где

$$F_{2s-1,2s} = \int_0^T \Gamma_{2s-1,2s}(t,\tau)\Phi_{2s-1,2s}(\tau)d\tau; \tag{1.11}$$

$$\Gamma_{2s-1,2s}(t,\tau) = \begin{cases} \Gamma_{2s-1,2s}^{(1)}(t,\tau), & 0 \le \tau \le t \le T; \\ \Gamma_{2s-1,2s}^{(2)}(t,\tau), & 0 \le t < \tau \le T, \end{cases} \tag{1.12}$$

причем

$$\Gamma_{2s-1,2s}^{(1)}(t,\tau) = \mathcal{P}_{2s-1,2s}(t)(\mathcal{I} - \mathcal{P}_{2s-1,2s}(T))^{-1}\mathcal{P}_{2s-1,2s}^{-1}(\tau);$$

$$\Gamma_{2s-1,2s}^{(2)}(t,\tau) = \mathcal{P}_{2s-1,2s}(t+T)(\mathcal{I} - \mathcal{P}_{2s-1,2s}(T))^{-1}\mathcal{P}_{2s-1,2s}^{-1}(\tau),$$

$\mathcal{P}_{2s-1,2s}(t)$ – нормированный при $t = 0$ фундаментальный оператор соответствующего однородного уравнения;

$$N_{2s-1,2s}(t,\tau) = \begin{cases} N_{2s-1,2s}^{(1)}(t,\tau), & 0 \le \tau \le t \le T; \\ N_{2s-1,2s}^{(2)}(t,\tau), & 0 \le t < \tau \le T, \end{cases} \tag{1.13}$$

где

$$N^{(1)}_{2s-1,2s}(t,\tau)=\int\limits_0^{\tau}\Gamma^{(1)}_{2s-1,2s}(t,\xi)K^{(2)}_{2s-1,2s}(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t}\Gamma^{(1)}_{2s-1,2s}(t,\xi)K^{(1)}_{2s-1,2s}(\xi,\tau)d\xi+\int\limits_{t}^{T}\Gamma^{(2)}_{2s-1,2s}(t,\xi)K^{(1)}_{2s-1,2s}(\xi,\tau)d\xi,$$

$$N^{(2)}_{2s-1,2s}(t,\tau)=\int\limits_0^{t}\Gamma^{(1)}_{2s-1,2s}(t,\xi)K^{(2)}_{2s-1,2s}(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t}^{\tau}\Gamma^{(2)}_{2s-1,2s}(t,\xi)K^{(2)}_{2s-1,2s}(\xi,\tau)d\xi+\int\limits_{\tau}^{T}\Gamma^{(2)}_{2s-1,2s}(t,\xi)K^{(1)}_{2s-1,2s}(\xi,\tau)d\xi.$$

В предположении, что постоянные матрицы A_{jj}, $j=1,\ \dots,\ 2r$, в исходной системе (1.1) такие, что ни одно из соответствующих линейных однородных дифференциальных уравнений системы (1.6) не имеет нетривиальных T-периодических решений, последовательно будем иметь

$$g_i(t,\tau)=(e^{-A_{ii}^T t})^{[2]}\left(I-(e^{-A_{ii}^T T})^{[2]}\right)^{-1}(e^{-A_{ii}^T\tau})^{[2]}; \tag{1.14}$$

$$f_i(t)=-\int\limits_0^{t}g_i(t,\tau)s_i(\tau)d\tau-\left(e^{-A_{ii}^T T}\right)^{[2]}\int\limits_t^{T}g_i(t,\tau)s_i(\tau)d\tau,$$

где

$$f_i(t)=\begin{pmatrix}F_{i1*}(t)^T\\ F_{i2*}(t)^T\\ \vdots\\ F_{in_i*}(t)^T\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n_i^2};\quad s_i(t)=\begin{pmatrix}S_{i1*}(t)^T\\ S_{i2*}(t)^T\\ \vdots\\ S_{in_i*}(t)^T\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n_i^2};\quad i=2s-1,2s;$$

$$\gamma_{2s-1,2s}(t,\tau)=\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}t}\otimes e^{-A^T_{2s,2s}t}\right)\left(I-e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\otimes e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)^{-1}\left(e^{A^T_{2s-1,2s-1}\tau}\otimes e^{A^T_{2s,2s}\tau}\right); \tag{1.15}$$

$$f_{2s-1,2s}(t)=\int\limits_0^{t}\gamma_{2s-1,2s}(t,\tau)\varphi_{2s-1,2s}(\tau)d\tau+\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\otimes e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)\int\limits_t^{T}\gamma_{2s-1,2s}(t,\tau)\varphi_{2s-1,2s}(\tau)d\tau; \tag{1.16}$$

$\varphi_{2s-1,2s}(\tau), f_{2s-1,2s}(t)\in\mathbb{R}^{n_{2s-1}n_{2s}}$; $f_{2s-1,2s}(t+T)=f_{2s-1,2s}(t)$ – соответствующие матрицам $\Phi_{2s-1,2s}(\tau)$ и $F_{2s-1,2s}(t)$ вектор-функции [17] замечание относительно прямого произведения матриц).

Введем в рассмотрение операторы $\mathcal{A}_{2s-1}:\mathbb{R}^{n_{2s}\times n_{2s-1}}\to\mathbb{R}^{n^2_{2s-1}\times n_{2s-1}n_{2s}}$ и $\mathcal{A}_{2s}:\mathbb{R}^{n_{2s-1}\times n_{2s}}\to\mathbb{R}^{n^2_{2s}\times n_{2s-1}n_{2s}}$, определенные таким образом, что в парах

$$P_{2s-1,2s}(t)C_{2s,2s-1}(t)+C^T_{2s,2s-1}(t)P^T_{2s-1,2s}(t)\ \text{и}\ \mathcal{A}_{2s-1}C_{2s,2s-1}(t)p_{2s-1,2s}(t),$$

$$C^T_{2s-1,2s}(t)P_{2s-1,2s}(t)+P^T_{2s-1,2s}(t)C_{2s-1,2s}(t)\ \text{и}\ \mathcal{A}_{2s}C_{2s-1,2s}(t)p_{2s-1,2s}(t)$$

матрица и вектор соответствуют друг другу, если $p_{2s-1,2s}(t)\in\mathbb{R}^{n_{2s-1}n_{2s}}$ соответствует искомой матрице $P_{2s-1,2s}(t)$. Тогда имеем

$$\mathcal{A}_{2s-1}X =$$

$$= \begin{pmatrix}
2x_{11} & 2x_{21} & \dots & 2x_{n_{2s}1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n_{2s}2} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n_{2s}1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
x_{13} & x_{23} & \dots & x_{n_{2s}3} & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n_{2s}1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{1n_{2s-1}} & x_{2n_{2s-1}} & \dots & x_{n_{2s}n_{2s-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n_{2s}1} \\
x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n_{2s}2} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n_{2s}1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 2x_{12} & 2x_{22} & \dots & 2x_{n_{2s}2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & x_{13} & x_{23} & \dots & x_{n_{2s}3} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n_{2s}2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & x_{1n_{2s-1}} & x_{2n_{2s-1}} & \dots & x_{n_{2s}n_{2s-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n_{2s}2} \\
x_{13} & x_{23} & \dots & x_{n_{2s}3} & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n_{2s}1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & x_{13} & x_{23} & \dots & x_{n_{2s}3} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n_{2s}2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2x_{13} & 2x_{23} & \dots & 2x_{n_{2s}3} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{1n_{2s-1}} & x_{2n_{2s-1}} & \dots & x_{n_{2s}n_{2s-1}} & \dots & x_{13} & x_{23} & \dots & x_{n_{2s}3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{1n_{2s-1}} & x_{2n_{2s-1}} & \dots & x_{n_{2s}n_{2s-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n_{2s}1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & x_{1n_{2s-1}} & x_{2n_{2s-1}} & \dots & x_{n_{2s}n_{2s-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n_{2s}2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{1n_{2s-1}} & x_{2n_{2s-1}} & \dots & x_{n_{2s}n_{2s-1}} & \dots & x_{13} & x_{23} & \dots & x_{n_{2s}3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 2x_{1n_{2s-1}} & 2x_{2n_{2s-1}} & \dots & 2x_{n_{2s}n_{2s-1}}
\end{pmatrix};$$

$$\mathcal{A}_{2s}Y =$$

$$= \begin{pmatrix}
2y_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 2y_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 2y_{n_{2s-1}1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
y_{12} & y_{11} & 0 & \dots & 0 & y_{22} & y_{21} & 0 & \dots & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}2} & y_{n_{2s-1}1} & 0 & \dots & 0 \\
y_{13} & 0 & y_{11} & \dots & 0 & y_{23} & 0 & y_{21} & \dots & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}3} & 0 & y_{n_{2s-1}1} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y_{1n_{2s}} & 0 & 0 & \dots & y_{11} & y_{2n_{2s}} & 0 & 0 & \dots & y_{21} & \dots & y_{n_{2s-1}n_{2s}} & 0 & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}1} \\
y_{12} & y_{11} & 0 & \dots & 0 & y_{22} & y_{21} & 0 & \dots & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}2} & y_{n_{2s-1}1} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 2y_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 2y_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 2y_{n_{2s-1}2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & y_{13} & y_{12} & \dots & 0 & 0 & y_{23} & y_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 & y_{n_{2s-1}3} & y_{n_{2s-1}2} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & y_{1n_{2s}} & 0 & \dots & y_{12} & 0 & y_{2n_{2s}} & 0 & \dots & y_{22} & \dots & 0 & y_{n_{2s-1}n_{2s}} & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}2} \\
y_{13} & 0 & y_{11} & \dots & 0 & y_{23} & 0 & y_{21} & \dots & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}3} & 0 & y_{n_{2s-1}1} & \dots & 0 \\
0 & y_{13} & y_{12} & \dots & 0 & 0 & y_{23} & y_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 & y_{n_{2s-1}3} & y_{n_{2s-1}2} & \dots & 0 \\
0 & 0 & 2y_{13} & \dots & 0 & 0 & 0 & 2y_{23} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 2y_{n_{2s-1}3} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & y_{1n_{2s}} & \dots & y_{13} & 0 & 0 & y_{2n_{2s}} & \dots & y_{23} & \dots & 0 & 0 & y_{n_{2s-1}n_{2s}} & \dots & y_{n_{2s-1}3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y_{1n_{2s}} & 0 & 0 & \dots & y_{11} & y_{2n_{2s}} & 0 & 0 & \dots & y_{21} & \dots & y_{n_{2s-1}n_{2s}} & 0 & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}1} \\
0 & y_{1n_{2s}} & 0 & \dots & y_{12} & 0 & y_{2n_{2s}} & 0 & \dots & y_{22} & \dots & 0 & y_{n_{2s-1}n_{2s}} & 0 & \dots & y_{n_{2s-1}2} \\
0 & 0 & y_{1n_{2s}} & \dots & y_{13} & 0 & 0 & y_{2n_{2s}} & \dots & y_{23} & \dots & 0 & 0 & y_{n_{2s-1}n_{2s}} & \dots & y_{n_{2s-1}3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2y_{1n_{2s}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 2y_{2n_{2s}} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2y_{n_{2s-1}n_{2s}}
\end{pmatrix}.$$

Полагая

$$\psi_{2s-1}(\xi,\tau) = g_{2s-1}(\xi,\tau)\mathcal{A}_{2s-1}C_{2s,2s-1}(\tau); \quad \psi_{2s}(\xi,\tau) = g_{2s}(\xi,\tau)\mathcal{A}_{2s}C_{2s-1,2s}(\tau),$$

ядра (1.13) интегральных уравнений (1.10) представим в виде

$$N^{(1)}_{2s-1,2s}(t,\tau) = \int_0^{\tau}\gamma_{2s-1,2s}(t,\xi)\Bigg(\left(I\otimes C^T_{2s-1,2s}(\xi)\right)\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\right)^{[2]}\psi_{2s-1}(\xi,\tau)+$$

$$+\left(C^T_{2s,2s-1}(\xi)\otimes I\right)\left(e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)^{[2]}\psi_{2s}(\xi,\tau)\Bigg)d\xi+$$

$$+\int_{\tau}^{t}\gamma_{2s-1,2s}(t,\xi)\left(\left(I\otimes C^T_{2s-1,2s}(\xi)\right)\psi_{2s-1}(\xi,\tau)+\left(C^T_{2s,2s-1}(\xi)\otimes I\right)\psi_{2s}(\xi,\tau)\right)d\xi+$$

$$+\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\otimes e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)\int_t^T\gamma_{2s-1,2s}(t,\xi)\left(\left(I\otimes C^T_{2s-1,2s}(\xi)\right)\psi_{2s-1}(\xi,\tau)+\right. \tag{1.17}$$

$$\left.+\left(C^T_{2s,2s-1}(\xi)\otimes I\right)\psi_{2s}(\xi,\tau)\right)d\xi;$$

$$N^{(2)}_{2s-1,2s}(t,\tau) = \int_0^{t}\gamma_{2s-1,2s}(t,\xi)\Bigg(\left(I\otimes C^T_{2s-1,2s}(\xi)\right)\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\right)^{[2]}\psi_{2s-1}(\xi,\tau)+$$

$$+\left(C^T_{2s,2s-1}(\xi)\otimes I\right)\left(e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)^{[2]}\psi_{2s}(\xi,\tau)\Bigg)d\xi+$$

$$+\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\otimes e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)\int_t^{\tau}\gamma_{2s-1,2s}(t,\xi)\Bigg(\left(I\otimes C^T_{2s-1,2s}(\xi)\right)\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\right)^{[2]}\psi_{2s-1}(\xi,\tau)+$$

$$+\left(C^T_{2s,2s-1}(\xi)\otimes I\right)\left(e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)^{2}\psi_{2s}(\xi,\tau)\Bigg)d\xi+ \tag{1.18}$$

$$+\left(e^{-A^T_{2s-1,2s-1}T}\otimes e^{-A^T_{2s,2s}T}\right)\int_{\tau}^T\gamma_{2s-1,2s}(t,\xi)\left(\left(I\otimes C^T_{2s-1,2s}(\xi)\right)\psi_{2s-1}(\xi,\tau)+\right.$$

$$\left.+\left(C^T_{2s,2s-1}(\xi)\otimes I\right)\psi_{2s}(\xi,\tau)\right)d\xi.$$

В предположении разрешимости уравнений (1.10) относительно периодических вектор-функций $p_{2s-1,2s}(t)$ с учетом равенств (1.8), (1.9) и сделанных соглашений по обозначениям получаем явный вид периодических функций $p_{2s-1,2s-1}(t)$, $p_{2s,2s}(t)$

$$p_{ii}(t) = f_i(t)+\int_0^t\psi_i(t,\tau)p_{2s-1,2s}(\tau)d\tau+\left(e^{-A^T_{ii}T}\right)^{[2]}\int_t^T\psi_i(t,\tau)p_{2s-1,2s}(\tau)d\tau, \tag{1.19}$$

где $i = 2s-1, 2s$, $s = 1, \ldots, r$.

Оценим элементы матричнозначной функции (1.2) и приведем оценки функции Ляпунова (1.4) в виде

$$\lambda_m(P_{2s-1,2s-1}(t))\,\|\,x_{2s-1}\,\|^2 \le v_{2s-1,2s-1}(t,x_{2s-1}) \le \lambda_M(P_{2s-1,2s-1}(t))\,\|\,x_{2s-1}\,\|^2;$$

$$\lambda_m(P_{2s,2s}(t))\|x_{2s}\|^2 \le v_{2s,2s}(t,x_{2s}) \le \lambda_M(P_{2s,2s}(t))\|x_{2s}\|^2;$$

$$-\|P_{2s-1,2s}(t)\|\|x_{2s-1}\|\|x_{2s}\| \le v_{2s-1,2s}(t,x_{2s-1},x_{2s}) \le \|P_{2s-1,2s}(t)\|\|x_{2s-1}\|\|x_{2s}\|;$$

$$u^T H^T Q_2(t) Hu \le v(t,\ x,\ \eta) = \eta^T U(t, x_1,\ \dots,\ x_{2r})\eta \le u^T H^T Q_1(t) Hu, \tag{1.20}$$

где $\lambda_m(\cdot)$ и $\lambda_M(\cdot)$ — минимальное и максимальное собственные значения матрицы, соответственно:

$$u = (\|x_1\|, \dots, \|x_{2r}\|)^T; \quad H = \mathrm{diag}[\eta_1, \dots, \eta_{2r}]; \quad Q_1(t) = \mathrm{diag}\left[Q_1^{(1)}(t), \dots, Q_r^{(1)}(t)\right];$$

$$Q_s^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_M(P_{2s-1,2s-1}(t)) & \|P_{2s-1,2s}(t)\| \\ \|P_{2s-1,2s}(t)\| & \lambda_M(P_{2s,2s}(t)) \end{bmatrix}; \quad Q_2(t) = \mathrm{diag}\left[Q_1^{(2)}(t),\ \dots,\ Q_r^{(2)}(t)\right];$$

$$Q_s^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_m(P_{2s-1,2s-1}(t)) & -\|P_{2s-1,2s}(t)\| \\ -\|P_{2s-1,2s}(t)\| & \lambda_m(P_{2s,2s}(t)) \end{bmatrix}; \quad s = 1,\ \dots,\ r\,.$$

Условия положительной определенности матриц $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ выглядят так:

$$\lambda_m(P_{2s-1,2s-1}(t)) > 0;\ \lambda_m(P_{2s-1,2s-1}(t))\lambda_m(P_{2s,2s}(t)) - \|P_{2s-1,2s}(t)\|^2 > 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Для полной производной по времени функции (1.4) вдоль решений системы (1.1) с учетом равенства (1.7) имеем

$$dv/dt\big|_{(1.1)} = dv/dt\big|_{(1.5)} + \delta(t,\ \eta), \tag{1.22}$$

где введены обозначения:

$$\delta(t,\eta) = 2\sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\ne 2s-1,2s)}}^{2r} x_{2s-1}^T P_{2s-1,2s-1}(t) A_{2s-1,j}(t) x_j \eta_{2s-1}^2 + x_{2s}^T P_{2s,2s}(t) A_{2s,j}(t) x_j \eta_{2s}^2 +$$

$$+\left(x_{2s-1}^T P_{2s-1,2s}(t) A_{2s,j}(t) x_j + x_{2s}^T P_{2s-1,2s}^T(t) A_{2s-1,j}(t) x_j\right)\eta_{2s-1}\eta_{2s} =$$

$$= 2\sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\ne 2s-1,2s)}}^{2r} \eta_{2s-1,2s}^T \Delta_{2s-1,2s,j}(t, x_{2s-1}, x_{2s}, x_j)\eta_{2s-1,2s};$$

$$\eta_{2s-1,2s} = (\eta_{2s-1},\ \eta_{2s})^T;$$

$$\Delta_{2s-1,2s,j}(t, x_{2s-1}, x_{2s}, x_j) = \begin{bmatrix} x_{2s-1}^T P_{2s-1,2s-1}(t) A_{2s-1,j}(t) x_j & x_{2s-1}^T P_{2s-1,2s}(t) A_{2s,j}(t) x_j \\ x_{2s}^T P_{2s-1,2s}^T(t) A_{2s-1,j}(t) x_j & x_{2s}^T P_{2s,2s}(t) A_{2s,j}(t) x_j \end{bmatrix}$$

и при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$dv/dt\big|_{(1.5)} \le u^T H^T S^*(t) Hu, \tag{1.23}$$

где $S^*(t) = \mathrm{diag}\left[-\lambda_m(S_1(t)),\ \dots, -\lambda_m(S_{2r}(t))\right]$,

$$\delta \le 2\sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\ne 2s-1,2s)}}^{2r} u_{2s-1,2s}^T H_{2s-1,2s}^T \Delta_{2s-1,2s,j}^*(t) H_{2s-1,2s} u_{jj}; \tag{1.24}$$

$$u_{2s-1,2s} = (\|x_{2s-1}\|, \|x_{2s}\|)^T,\ u_{jj} = (\|x_j\|, \|x_j\|)^T; \quad H_{2s-1,2s} = \mathrm{diag}[\eta_{2s-1},\ \eta_{2s}];$$

$$\Delta^*_{2s-1,2s,j}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_M(P_{2s-1,2s-1}(t))\sum\limits_{k=-N}^{N}\|A^{(k)}_{2s-1,j}\| & \|P_{2s-1,2s}(t)\|\sum\limits_{k=-N}^{N}\|A^{(k)}_{2s,j}\|\\ \|P_{2s-1,2s}(t)\|\sum\limits_{k=-N}^{N}\|A^{(k)}_{2s-1,j}\| & \lambda_M(P_{2s,2s}(t))\sum\limits_{k=-N}^{N}\|A^{(k)}_{2s,j}\|\end{bmatrix}.$$

Полученные соотношения (1.20) – (1.24) позволяют установить следующий результат.

Теорема 1. *Предположим, что для системы уравнений (1.1) существуют постоянные* $\eta_1,\dots,\eta_{2r}>0$, *постоянная* $\mu>0$ *и периодические симметричные матрицы* $S_1(t),\dots,S_{2r}(t)$, *для которых при всех* $t\in\mathbb{R}$ *выполняются следующие условия:*

(1) все последовательные главные миноры периодических симметричных матриц $P_{11}(t),\ \dots,\ P_{2r,2r}(t)$ положительные;

(2) $\lambda_m(P_{2s-1,2s-1}(t))\lambda_m(P_{2s,2s}(t))-\|P_{2s-1,2s}(t)\|^2>0$, $s=1,\dots,r$;

(3) $\Delta_k(S_j(t))>\mu$, $j=1,\dots,2r$, $k=1,\dots,n_j$, где $\Delta_k(\cdot)$ – k-ый последовательный главный минор соответствующей матрицы. Тогда решение $x=0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из условий (1), (2) теоремы 1 и оценки (1.20) следует положительная определенность функции $v(t,x,\eta)$, а из условия (3) и оценок (1.23), (1.24) – отрицательная определенность ее производной $\left.{dv}/{dt}\right|_{(1.1)}$ в виде (1.22). Таким образом, выполнены все условия общей теоремы [17] и, как следствие, решение $x=0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

§2. Пример.

В качестве приложения изложенного способа построения вспомогательной функции со специальными свойствами рассмотрим систему седьмого порядка

$$\frac{dx_1}{dt}=A_{11}x_1+A_{12}(t)x_2+A_{14}(t)x_4;\ \ \frac{dx_2}{dt}=A_{22}x_2+A_{21}(t)x_1;$$

$$\frac{dx_3}{dt}=A_{33}x_3+A_{34}(t)x_4+A_{32}(t)x_2;\ \ \frac{dx_4}{dt}=A_{44}x_4+A_{43}(t)x_3, \tag{2.1}$$

где

$$x_1\in\mathbb{R};\ x_2\in\mathbb{R}^2;\ x_3\in\mathbb{R}^2;\ x_4\in\mathbb{R}^2;\ A_{11}=-1,2905;\ A_{22}=\begin{bmatrix}-1,6399 & -0,5539\\ 0,1263 & -0,6645\end{bmatrix};$$

$$A_{33}=\begin{bmatrix}-1,4033 & 0,8283\\ 1,1989 & -1,4662\end{bmatrix},\quad A_{44}=\begin{bmatrix}-2,3957 & 0,1406\\ -1,5434 & -2,3597\end{bmatrix};$$

$$A_{12}(t)=A^{(-1)}_{12}e^{-20ti}+A^{(0)}_{12}+\overline{A^{(-1)}_{12}}e^{20ti};\quad A_{21}(t)=A^{(-1)}_{21}e^{-20ti}+A^{(0)}_{21}+\overline{A^{(-1)}_{21}}e^{20ti};$$

$$A_{34}(t)=A^{(-1)}_{34}e^{-20ti}+A^{(0)}_{34}+\overline{A^{(-1)}_{34}}e^{20ti};\quad A_{43}(t)=A^{(-1)}_{43}e^{-20ti}+A^{(0)}_{43}+\overline{A^{(-1)}_{43}}e^{20ti};$$

$$A_{14}(t)=\alpha A^{(-1)}_{14}e^{-20ti}+(\beta-\alpha)A^{(0)}_{14}+\alpha\overline{A^{(-1)}_{14}}e^{20ti};$$

$$A_{32}(t)=\beta A^{(-1)}_{32}e^{-20ti}+(\alpha-\beta)A^{(0)}_{32}+\beta\overline{A^{(-1)}_{32}}e^{20ti},$$

причем

$$A_{12}^{(-1)} = [-1,2765 + 1,9842i \quad -0,4396 + 1,9119i]; \quad A_{12}^{(0)} = [1,6954 \quad 0,1655];$$

$$A_{21}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1,8899 + 2,1645i \\ -0,5437 + 1,2416i \end{bmatrix}; \quad A_{21}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1,8880 \\ -1,9235 \end{bmatrix};$$

$$A_{34}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1,2666 + 1,3668i & -0,5132 - 2,1912i \\ -1,7810 + 1,9014i & -1,1702 + 1,3048i \end{bmatrix}; \quad A_{34}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,3334 & -2,2518 \\ -0,6280 & 1,4686 \end{bmatrix};$$

$$A_{43}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1,6445 + 0,5107i & -1,6687 + 0,9893i \\ 1,5110 + 1,8257i & -0,5305 + 0,3570i \end{bmatrix}; \quad A_{43}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,3823 & 1,6621 \\ 0,0812 & 2,3561 \end{bmatrix};$$

$$A_{14}^{(-1)} = [0,1661 - 0,1063i \quad -0,0083 - 0,1613i]; \quad A_{14}^{(0)} = [0,2497 \quad 0,1393];$$

$$A_{32}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0,1657 + 0,1370i & 0,0707 - 0,0862i \\ 0,0782 - 0,2354i & -0,2133 + 0,1659i \end{bmatrix}; \quad A_{32}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,1993 & 0,2295 \\ 0,2000 & -0,0222 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

В этом случае $r = 2$, $\omega = 20$, $T = 0,1\pi$. Положим

$$\eta_1 = 0,7055; \quad \eta_2 = 3,4552; \quad \eta_3 = 4,1534; \quad \eta_4 = 3,4233;$$

$$S_1 = 0.8405; \quad S_2 = \begin{bmatrix} 2,1464 & -1,0588 \\ -1,0588 & 2,0094 \end{bmatrix}; \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1,2839 & -0,6781 \\ -0,6781 & 1,5079 \end{bmatrix};$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0,8841 & -0,5012 \\ -0,5012 & 1,7432 \end{bmatrix}.$$

Следуя работе [17], для определения коэффициентов $h_{12}^{(m)}$, $h_{34}^{(m)}$ уравнений Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами

$$p_{2s-1,2s}(t) = f_{2s-1,2s}(t) + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} N_{2s-1,2s}^{(mn)} h_{2s-1,2s}^{(m)} e^{i\omega nt}, \quad s = 1,\ 2, \tag{2.2}$$

где

$$h_{2s-1,2s}^{(m)} = \int_0^T e^{i\omega m\tau} p_{2s-1,2s}(\tau) d\tau,$$

а $N_{2s-1,2s}^{(mn)}$ – коэффициенты Фурье соответствующих ядер (табл. 1, 2), получаем алгебраические системы

$$h_{2s-1,2s}^{(m)} = b_{2s-1,2s}^{(m)} + T \sum_{j=-\infty}^{\infty} N_{2s-1,2s}^{(j,-m)} h_{2s-1,2s}^{(j)}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{2.3}$$

где

$$b_{2s-1,2s}^{(m)} = \int_0^T e^{i\omega m\tau} f_{2s-1,2s}(\tau) d\tau.$$

Таблица 1

m	$N_{12}^{(m,-1)}$	$N_{12}^{(m,0)}$	$N_{12}^{(m,1)}$
1	$\begin{bmatrix} 0,4413+0,5284i & 0,1032+0,6655i \\ 0,4532+0,4027i & -0,1506+1,2494i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2640+0,5524i & -0,0701+0,2267i \\ -0,2940+0,0622i & 0,0223+0,3312i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0519-1,6377i & -0,5847-0,2981i \\ 0,4053-0,7597i & -0,4256-1,1396i \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 3,5782-2,4273i & 1,2466-2,1961i \\ -1,3575-0,8554i & 2,4580-10,8072i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4,7515 & -4,1393 \\ 0,8440 & -0,6869 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,5782+2,4273i & 1,2466+2,1961i \\ -1,3575+0,8554i & 2,4580+10,8072i \end{bmatrix}$
-1	$\begin{bmatrix} -0,0519+1,6377i & -0,5847+0,2981i \\ 0,4053+0,7597i & -0,4256+1,1396i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2640-0,5524i & -0,0701-0,2267i \\ -0,2940-0,0622i & 0,0223-0,3312i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4413-0,5284i & 0,1032-0,6655i \\ 0,4532-0,4027i & -0,1506-1,2494i \end{bmatrix}$

Таблица 2

m	$N_{34}^{(m,-1)}$
1	$\begin{bmatrix} 0,0965+0,9896i & 0,5598+1,1615i & 0,0645+0,3381i & 0,7517+0,6209i \\ 0,0891-0,2563i & -0,1369-0,8116i & 0,0510-0,2041i & -0,0204-0,2596i \\ 0,2429+0,2604i & 0,0518+0,3983i & 0,2530+1,3652i & 0,5623+0,8643i \\ 0,0657-0,1255i & 0,3897-0,3370i & 0,1097+0,2472i & 0,0572-0,1955i \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 1,7499+0.0684i & -0,1923-0,1194i & -0,4977-1,0720i & -0,3168-2,3895i \\ -1,6265-2,0296i & -1,4208-2,8402i & -0,9749-0,1271i & -1,3687-0,6162i \\ 0,7850+0,1924i & 0,4246+1,5056i & 0,9833-1,0073i & 0,2639-2,2328i \\ 0,1140-1,7058i & -0,8280-3,3198i & -1,8510-0,2090i & -2,6423-0,0074i \end{bmatrix}$
-1	$\begin{bmatrix} 0,1195+0,0444i & 0,4704+0,9552i & -0,0541+1,0361i & -0,0451+1,0648i \\ -0,7940-0,2929i & -0,7953-0,7482i & -0,2264+0,0825i & -0,5179+0,4064i \\ -0,3922+0,6871i & 0,1230+0,3694i & -0,8082+0,0062i & 0,0221+0,7490i \\ 0,0768-0,3628i & -0,3806+0,0375i & -0,6919-0,3570i & -0,6766-0,3230i \end{bmatrix}$
	$N_{34}^{(m,0)}$
1	$\begin{bmatrix} 0,6592-0,1475i & 1,1095-0,3725i & 0,7962-0.3644i & 0,8218-0,4702i \\ -0,3330-0,6599i & -0,7224-0,5785i & -0,1002-0,1971i & 0,0438-0,3407i \\ 0,6708-0,2681i & 0,6626-0,0187i & 0,9374-0,5068i & 1,2135-0,8207i \\ -0,3729-0,0064i & -0,2800-0,4672i & -0,0477-0,6353i & -0,1348-0,6052i \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} -0,6105 & -1,5060 & -2,2276 & -3,3698 \\ -2,0221 & -1,8276 & -0,1076 & -0,1089 \\ -0,8502 & 0,9118 & -2,6445 & -4,8008 \\ -2,2291 & -4,3219 & 0,4474 & 1,0645 \end{bmatrix}$
-1	$\begin{bmatrix} 0,6592+0,1475i & 1,1095+0,3725i & 0,7962+0,3644i & 0,8218+0,4702i \\ -0,3330+0,6599i & -0,7224+0,5785i & -0,1002+0,1971i & 0,0438+0,3407i \\ 0,6708+0,2681i & 0,6626+0,0187i & 0,9374+0,5068i & 1,2135+0,8207i \\ -0,3729+0,0064i & -0,2800+0,4672i & -0,0477+0,6353i & -0,1348+0,6052i \end{bmatrix}$
	$N_{34}^{(m,1)}$
1	$\begin{bmatrix} 0,1195-0,0444i & 0,4704-0,9552i & -0,0541-1,0361i & -0,0451-1,0648i \\ -0,7940+0,2929i & -0,7953+0,7482i & -0,2264-0,0825i & -0,5179-0,4064i \\ -0,3922-0,6871i & 0,1230-0,3694i & -0,8082-0,0062i & 0,0221-0,7490i \\ 0,0768+0,3628i & -0,3806-0,0375i & -0,6919+0,3570i & -0,6766+0,3230i \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 1,7499-0,0684i & -0,1923+0,1194i & -0,4977+1,0720i & -0,3168+2,3895i \\ -1,6265+2,0296i & -1,4208+2,8402i & -0,9749+0,1271i & -1,3687+0,6162i \\ 0,7850-0,1924i & 0,4246-1,5056i & 0,9833+1,0073i & 0,2639+2,2328i \\ 0,1140+1,7058i & -0,8280+3,3198i & -1,8510+0,2090i & -2,6423+0,0074i \end{bmatrix}$
-1	$\begin{bmatrix} 0,0965-0,9896i & 0,5598-1,1615i & 0,0645-0,3381i & 0,7517-0,6209i \\ 0,0891+0,2563i & -0,1369+0,8116i & 0,0510+0,2041i & -0,0204+0,2596i \\ 0,2429-0,2604i & 0,0518-0,3983i & 0,2530-1,3652i & 0,5623-0,8643i \\ 0,0657+0,1255i & 0,3897+0,3370i & 0,1097-0,2472i & 0,0572+0,1955i \end{bmatrix}$

Ограничиваясь отрезками вышеуказанных рядов Фурье ($m, n = -1, 0, 1$) и соответствующими частичными суммами в системах (2.3), находим коэффициенты $h_{12}^{(m)}$, $h_{34}^{(m)}$ периодических вектор-функций (табл. 3).

Таблица 3

m	-1	0	1
$h_{12}^{(m)}$	$\begin{bmatrix}-0,0729-0,4119i\\ 0,1118+0,4183i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1,5367\\ 1,5302\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0,0729+0,4119i\\ 0,1118-0,4183i\end{bmatrix}$
$h_{34}^{(m)}$	$\begin{bmatrix}-0,1031+0,0586i\\ 0,0415+0,0075i\\ 0,1124-0,2030i\\ -0,0496+0,1353i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,1581\\ -0,0734\\ -0,0887\\ 0,0160\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0,1031-0,0586i\\ 0,0415-0,0075i\\ 0,1124+0,2030i\\ -0,0496-0,1353i\end{bmatrix}$

Возвращаясь к уравнениям (2.2), получаем периодические вектор-функции $p_{12}(t)$, $p_{34}(t)$. Вместе с ними строим ненулевые внедиагональные элементы матричнозначной функции

$$v_{12}(t, x_1, x_2) = v_{21}(t, x_1, x_2) = x_1^T P_{12}(t) x_2; \quad v_{34}(t, x_3, x_4) = v_{43}(t, x_3, x_4) = x_3^T P_{34}(t) x_4,$$

где матрицы-функции $P_{12}(t)$, $P_{34}(t)$ соответствуют одноименным векторам согласно свойств прямого произведения матриц. Диагональные элементы $v_{11}(t, x_1) = x_1^T P_{11}(t) x_1$; $v_{22}(t, x_2) = x_2^T P_{22}(t) x_2$, $v_{33}(t, x_3) = x_3^T P_{33}(t) x_3$, $v_{44}(t, x_4) = x_4^T P_{44}(t) x_4$ матричнозначной вспомогательной функции для системы (2.1) определяются на основе равенств (1.19) по уже найденным $P_{12}(t)$, $P_{34}(t)$. Коэффициенты функций $P_{12}(t)$, $P_{11}(t)$, $P_{22}(t)$, $P_{34}(t)$, $P_{33}(t)$, $P_{44}(t)$ представлены в табл. 4.

Таблица 4

m	e^{-20ti}	1	e^{20ti}
$P_{12}(t)$	$\begin{bmatrix}0,1233-0,0213i & 0,1246-0,0195i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0,0190 & -0,0228\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,1233+0,0213i & 0,1246+0,0195i\end{bmatrix}$
$P_{11}(t)$	$-0,0626+0,0002i$	$1,6424$	$-0,0626-0,0002i$
$P_{22}(t)$	$\begin{bmatrix}0,0052-0,0045i & 0,0038-0,0037i\\ 0,0038-0,0037i & 0,0024-0,0028i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,5523 & -0,5481\\ -0,5481 & 1,9063\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,0052+0,0045i & 0,0038+0,0037i\\ 0,0038+0,0037i & 0,0024+0,0028i\end{bmatrix}$
$P_{34}(t)$	$\begin{bmatrix}0,0038+0,0049i & 0,0040+0,0053i\\ 0,0039+0,0049i & 0,0039+0,0051i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,0383 & 0,0376\\ 0,0383 & 0,0379\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,0038-0,0049i & 0,0040-0,0053i\\ 0,0039-0,0049i & 0,0039-0,0051i\end{bmatrix}$
$P_{33}(t)$	$\begin{bmatrix}0,0097-0,0108i & 0,0081-0,0015i\\ 0,0081-0,0015i & 0,0062+0,0075i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,8573 & 0,4209\\ 0,4209 & 0,8336\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,0097+0,0108i & 0,0081+0,0015i\\ 0,0081+0,0015i & 0,0062-0,0075i\end{bmatrix}$
$P_{44}(t)$	$\begin{bmatrix}0,0158+0,0083i & 0,0047+0,0071i\\ 0,0047+0,0071i & -0,0067+0,0075i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,3244 & -0,2142\\ -0,2142 & 0,3298\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0,0158-0,0083i & 0,0047-0,0071i\\ 0,0047-0,0071i & -0,0067-0,0075i\end{bmatrix}$

Таким образом, для системы (2.1) получаем функцию Ляпунова в виде

$$v(t, x, \eta) = \eta_1^2 x_1^T P_{11}(t) x_1 + \eta_2^2 x_2^T P_{22}(t) x_2 + 2\eta_1\eta_2 x_1^T P_{12}(t) x_2 +$$

$$+\eta_3^2 x_3^T P_{33}(t) x_3 + \eta_4^2 x_4^T P_{44}(t) x_4 + 2\eta_3\eta_4 x_3^T P_{34}(t) x_4;$$

$$t \in [t_0, t_0 + 0.1\pi], \ \ t_0 \in \mathbb{R}; \quad x = (x_1, x_2^T, x_3^T, x_4^T)^T \in \mathbb{R}^7, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T,$$

положительная определенность которой непосредственно следует из условий (1), (2) теоремы 1. Полная производная по времени этой функции, найденная вдоль решений системы (2.1), имеет вид

$$\left.{}^{dv}\!/_{dt}\right|_{(2.1)} = -\sum_{j=1}^{4} x_j^T S_j x_j \eta_j^2 + 2\left(x_1^T S_{14}(t) x_4 + x_2^T S_{24}(t) x_4 + \right.$$

$$\left. x_3^T S_{32}(t) x_2 + x_4^T S_{42}(t) x_2 \right) = x^T S(t) x,$$

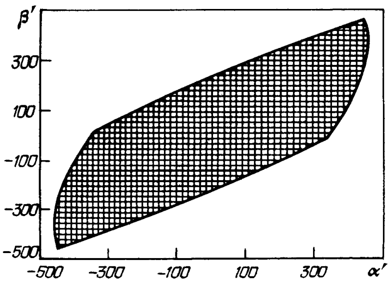
где

$$S(t) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} S_{11} & 0 & 0 & S_{14}(t) \\ \hline 0 & S_{22} & S_{32}^T(t) & S_{24}(t) + S_{42}^T(t) \\ \hline 0 & S_{32}(t) & S_{33} & 0 \\ \hline S_{14}^T(t) & S_{42}(t) + S_{24}^T(t) & 0 & S_{44} \end{array} \right],$$

$$S_{jj} = -S_j \eta_j^2,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4\,;$$

$$S_{14}(t) = P_{11}(t) A_{14}(t) \eta_1^2\,; \quad S_{24}(t) = P_{12}^T(t) A_{14}(t) \eta_1 \eta_2\,; \quad S_{32}(t) = P_{33}(t) A_{32}(t) \eta_3^2\,;$$

$$S_{42}(t) = P_{34}^T(t) A_{32}(t) \eta_3 \eta_4\,.$$



Соответственно, условие (3) теоремы 1 сводится к положительной определенности матрицы $-S(t)$.

Область равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1) в пространстве параметров $(\alpha;\beta)$, построенная предложенным методом, показана на рисунке (знаком « $'$ » обозначено умножение соответствующей величины на 200).

Заключение.

В данной работе рассмотрен пример крупномасштабной нестационарной системы, демонстрирующий конструктивность функции Ляпунова, полученной с привлечением гармоник более высоких порядков при отыскании периодических элементов вспомогательной матричнозначной функции. Предложенная периодическая V-функция со специальными свойствами позволяет установить условия сохранения устойчивости решений системы при наличии периодических возмущений ее устойчивой стационарной части.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано і розвинуто спосіб побудови періодичної за часом функції Ляпунова для лінійної системи з періодичними коефіцієнтами на основі допоміжної матричнозначної функції. Сформульовано нові достатні умови стійкості руху великомасштабних періодичних систем при їх декомпозиції на парну кількість підсистем.

1. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, № 3. – С. 345—350.
2. *Еругин Н.П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. – Минск: Изд-во АН БССР, 1963. – 273 с.
3. *Зубов В.И.* К теории второго метода А. М. Ляпунова // Докл. АН СССР. – 1955. – **100**, № 5. – С. 857 – 859.
4. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – К.: Наук. думка, 1991. – 248 с.

5. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
6. *Малкин И.Г.* К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, № 2. – С. 129 – 138.
7. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю.* Вектор-функции Ляпунова и их построение. – Новосибирск: Наука, 1980. – 286 с.
8. *Персидский К.П.* К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений // Усп. матем. наук. – 1946. – **1**, № 5–6(15–16). – С. 250 – 255.
9. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. – М. – Л.: Наука, 1964. – 368 с.
10. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. — 304 с.
11. *Тузов А.П.* Об устойчивости в целом одной системы регулирования // Вестн. ЛГУ. – 1957. – № 1. – С. 57 – 75.
12. *Kurzweil J.* On Inversion of the Second Lyapunov Theorem on Stability of Motion // Czechoslovak Math. J. – 1956. – **6**, N 4. – P. 455 – 484.
13. *Lila D.M.* Stability of Motion of Quasiperiodic Systems in Critical Cases // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 229 – 240.
14. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* On Stability of Some Solutions for Equations of Locked Lasing of Optically Coupled Lasera with Periodic Pumping // Nonlinear Oscillations. – 2009. – **12**, N 4. – P. 464 – 473.
15. *Lila D.M., Martynyuk A.A.*On the theory of stability of matrix differential equations // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, N 4. – P. 556 – 565.
16. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* Setting up Lyapunov Functions for the Class of Systems with Quasiperiodic Coefficients // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P. 1412 – 1429.
17. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* Stability of Periodic Motions of Quasilinear Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1161 – 1172.
18. *Martynyuk A.A.* Block-Diagonal Matrix-Valued Lyapunov Function and Stability of an Uncertain Impulsive System // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 322 – 327.
19. *Martynyuk A.A.* Stability by Liapunov's Matrix Function Method with Applications. – N. Y.: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
20. *Martynyuk A.A.* Stability of Motion. The Role of Multicomponent Liapunov Functions. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 322 p.
21. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Oscillations of Conservative Systems with Complex Trajectories // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 7. – P. 721 – 738.
22. *Massera J.L.* Contributions to Stability Theory // Ann. of Math. – 1956. – **64**, N 2. – P. 182 – 206.
23. *Siljak D.D.* Large Scale Dynamic Systems. Stability and Structure. – Amsterdam: North-Holland, 1978. – 416 p.

Поступила 05.10.2009 Утверждена в печать 15.06.2010