

М. Е. Бабешко, Ю. Н. Шевченко

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК  
В ПРОЦЕССАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ С УЧЕТОМ  
ТРЕТЬЕГО ИНВАРИАНТА ДЕВИАТОРА НАПРЯЖЕНИЙ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A technique of numerical study of elasto-plastic stress-strain state of thin layered shells of revolution under action of axisymmetric loading is proposed. The constitutive equations are used, which describe the elasto-plastic deformation of isotropic materials with allowance for the third invariant of the stress deviator. A numerical example is given.

**Key words:** constitutive equations, elasto-plastic deformation, isotropic material, stress-strain state.

**Введение.**

В работе [1] изложен метод последовательных приближений решения краевых задач пластичности с использованием определяющих уравнений [12 – 14], описывающих процессы упругопластического деформирования изотропных материалов по траекториям малой кривизны с учетом вида напряженного состояния, и на тестовом примере рассмотрена практическая сходимость метода. Вид напряженного состояния в уравнениях [12 – 14] характеризуется углом вида напряженного состояния [3], который представляет собой угол между направлением октаэдрического касательного напряжения и отрицательным направлением проекции на октаэдрическую плоскость главной оси девиатора напряжений, вдоль которой главные напряжения минимальные. В работе [2] описана методика решения осесимметричной задачи теории тонких оболочек и приведены числовые результаты, полученные на основе тех же определяющих уравнений. Эти уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений и линейных частей деформаций, которые для простоты в дальнейшем тексте будем называть деформациями, экспериментально обоснованы в работах [8, 9, 12 – 14]. Они записаны в предположении, что деформации могут быть представлены в виде суммы упругих и пластических составляющих, а девиаторы напряжений и дифференциалов пластических деформаций соосны. Уравнения содержат две нелинейные функции, вычисляемые по результатам экспериментов. Одна из этих функций выражает зависимость между средним напряжением и деформацией и углом вида напряженного состояния. Вторая функция выражает зависимость между интенсивностями касательных напряжений и деформаций сдвига и углом вида напряженного состояния. Если первую нелинейную функцию заменить линейной зависимостью между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторую принять не зависящей от вида напряженного состояния и определяемой из опытов на простое растяжение образцов, то рассматриваемые определяющие уравнения превращаются в широко используемые [5 – 7 и др.] соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [5], которые при активных процессах нагружения совпадают с традиционными уравнениями [3, 10 и др.] теории пластического течения, ассоциированными с условием Мизеса (уравнения Прандтля – Рейсса).

В работе [9] рассмотрен упрощенный вариант определяющих уравнений [12 – 14], где первая из названных нелинейных функций заменена линейной зависимостью между средними напряжением и деформацией и оценена возможность такой замены. В работе [11] описан метод последовательных приближений и получено решение пространственной задачи пластичности для тела вращения с использованием упрощенного варианта определяющих уравнений [9].

В отличие от [11] и развитие [1, 2] в данной работе изложена методика решения осесимметричных задач пластичности для тонких слоистых оболочек с учетом упругопластического деформирования материалов в разных слоях, с использованием определяющих уравнений [5, 9, 12 – 14].

### §1. Постановка задачи и основные соотношения.

Рассмотрим оболочку вращения, слои которой изготовлены из изотропных материалов, находящуюся в начальный момент времени в ненапряженном и недеформированном состоянии при температуре  $T = T_0$ , а затем подвергнутую осесимметричному воздействию произвольных нагрузок, кроме крутящих. Предполагается, что между слоями оболочки осуществляется идеальный механический контакт. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат  $s, \theta, \zeta$ , связанной с недеформированной непрерывной координатной поверхностью. Через  $s$  ( $s_a \leq s \leq s_b$ ) обозначена меридиональная координата,  $s_a, s_b$  – координаты, соответствующие торцам оболочки;  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) – окружная координата;  $\zeta$  ( $\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k$ ) – координата, отсчитываемая по нормали к координатной поверхности,  $\zeta_0$  соответствует внутренней поверхности первого (внутреннего) слоя оболочки, а  $\zeta_k$  – наружной поверхности последнего (внешнего) слоя;  $k$  – количество слоев, толщины которых  $h_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . В качестве координатной поверхности выбирается срединная поверхность либо одна из поверхностей слоев. Предполагается, что в процессе нагружения оболочки ее материалы деформируются в пределах и за пределами упругости и в областях пластических деформаций может происходить разгрузка без возникновения вторичных пластических деформаций. Будем рассматривать только такие процессы, в которых деформации ползучести пренебрежимо малы по сравнению с упругими и пластическими составляющими.

При формулировке задачи используем подход Коши [4, 13, 14], в соответствии с которым все уравнения записываем в вышеприведенной системе координат, связанной с недеформированной координатной поверхностью. Задачу решаем в геометрически линейной квазистатической постановке с использованием гипотез Кирхгофа – Лява для пакета слоев. Для описания деформирования материалов будем использовать соотношения теории пластичности, учитывающие вид напряженного состояния, в варианте [12 – 14] и упрощенном варианте [9], а также соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [5]. Задачу о напряженно-деформированном состоянии (НДС) оболочки будем решать методом последовательных приближений.

Для решения задачи процесс нагружения необходимо разбить на ряд малых этапов таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами начала разгрузки в элементах оболочки. На каждом этапе используем дифференциальные уравнения равновесия элемента осесимметрично нагруженной оболочки вращения при отсутствии кручения, геометрические соотношения и физические уравнения. Уравнения равновесия имеют вид [5]

$$\frac{d(rN_s)}{ds} - \cos \varphi N_\theta + \frac{r}{R_s} Q_s + r q_s = 0; \quad \frac{d(rQ_s)}{ds} - \sin \varphi N_\theta - \frac{r}{R_s} N_s + r q_\zeta = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{d(rM_s)}{ds} - \cos \varphi M_\theta - r Q_s = 0,$$

где  $N_s, N_\theta, Q_s$  – усилия;  $M_s, M_\theta$  – моменты;  $\vartheta_s$  – угол поворота нормали к координатной поверхности в меридиональной плоскости;  $r$  – радиус параллельного круга;  $R_s$  – радиус кривизны меридиана координатной поверхности оболочки;  $\pi - \varphi$  – угол между нормалью к координатной поверхности и осью  $z$ , совмещенной с осью вращения оболочки;  $q_s, q_\zeta$  – распределенные нагрузки, приведенные к координатной поверхности. Геометрические соотношения имеют вид [5]

$$\varepsilon_s = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_s}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \quad \kappa_s = \frac{d\vartheta_s}{ds}; \quad \kappa_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s; \quad \vartheta_s = -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_s}. \quad (1.2)$$

В формулах (1.2)  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$  – деформации и изменения кривизны координатной поверхности оболочки в направлениях  $s$  и  $\theta$ ;  $u, w$  – перемещения ее точек в направлениях  $s, \zeta$ . Переход от компонент деформаций координатной поверхности оболочки  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$  к компонентам деформации  $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}$  в произвольной точке оболочки в предположении, что можно пренебречь по сравнению с единицей величинами  $\zeta/R_s, \zeta/R_\theta$ , где  $R_\theta$  – радиус кривизны координатной поверхности в окружном направлении, осуществляется с помощью формул

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_s + \zeta \kappa_s; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_\theta + \zeta \kappa_\theta. \quad (1.3)$$

Связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций в произвольной точке рассматриваемой оболочки на  $M$ -ом этапе нагружения представим в форме, соответствующей определяющим уравнениям [12 – 14] теории пластичности с учетом вида напряженного состояния, линеаризованных методом дополнительных напряжений [5], в виде, разрешенном относительно компонент напряжений, т.е. в форме закона Гука с дополнительными напряжениями

$$\sigma_{ss} = A_{11} \varepsilon_{ss} + A_{12} \varepsilon_{\theta\theta} - A_{1D}; \quad \sigma_{\theta\theta} = A_{12} \varepsilon_{ss} + A_{22} \varepsilon_{\theta\theta} - A_{2D}; \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} (e_{ss}^{(p)} + e_{\theta\theta}^{(p)}) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{F_1}{K |\varepsilon_0|} \right), \quad (1.5)$$

где

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad A_{12} = \nu A_{11}, \quad (1.6)$$

$E$  и  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала соответствующего слоя;  $E = 2G(1+\nu)$ ;  $G$  – модуль сдвига материала;  $K = E/(1-2\nu)$ ,  $e_{ss}^{(p)}$  ( $s \rightarrow \theta$ ) – компоненты девиатора пластических составляющих деформаций;  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\zeta\zeta})/3$  – средняя деформация;  $F_1$  – нелинейная функция,

$$\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma), \quad (1.7)$$

выражающая зависимость между средним напряжением  $\sigma_0 = (\sigma_{ss} + \sigma_{\theta\theta})/3$ , средней деформацией  $\varepsilon_0$  и углом вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$  [3, 12]

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{S^3} \right] \quad (0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3); \quad (1.8)$$

$I_3(D_\sigma)$  – третий инвариант девиатора напряжений.

Угол  $\omega_\sigma$  определяется через компоненты девиатора напряжений, в отличие от параметра Лоде, который определяется через главные значения тензора напряжений. Этот угол связан с параметром Лоде  $\mu_\sigma$  простой зависимостью [3] и между их значениями существует такое соответствие: при растяжении  $\omega_\sigma = \pi/3$ ,  $\mu_\sigma = -1$ ; при равенстве главных напряжений  $\sigma_1 = \sigma_2$  –  $\omega_\sigma = 0$ ,  $\mu_\sigma = 1$ ; при сдвиге или соотношении главных напряжений  $2\sigma_1 = \sigma_2$  –  $\omega_\sigma = \pi/6$ ,  $\mu_\sigma = 0$ .

Входящие в (1.4) слагаемые  $A_{1D}, A_{2D}$  имеют разный вид в зависимости от того, какими уравнениями описывается деформирование материала рассматриваемого слоя.

В том случае, когда деформирование материала слоя описывается уравнениями [12 – 14] с учетом вида напряженного состояния, имеем

$$\begin{aligned} A_{1D} &= A_{11} \left( e_{ss}^{(p)} + \nu e_{\theta\theta}^{(p)} \right) + \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0|} \right); \\ A_{2D} &= A_{11} \left( e_{\theta\theta}^{(p)} + \nu e_{ss}^{(p)} \right) + \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0|} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Входящие в (1.4), (1.9) компоненты девиатора пластических составляющих деформаций  $e_{ss}^{(p)}$  ( $s \rightarrow \theta$ ) определяются как суммы приращений  $\Delta_k e_{ss}^{(p)}$  ( $s \rightarrow \theta$ ) этих составляющих в конце  $N$  этапа

$$e_{ss}^{(p)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k e_{ss}^{(p)} \quad (s \rightarrow \theta). \quad (1.10)$$

Приращения  $\Delta_k e_{ss}^{(p)}$  ( $s \rightarrow \theta$ ) на произвольном  $k$ -ом этапе нагружения определяются выражением

$$\Delta_k e_{ss}^{(p)} = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{3S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^{(p)} \quad (s \rightarrow \theta), \quad (1.11)$$

где  $S$  – интенсивность касательных напряжений,

$$S = \left[ (\sigma_{ss}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{ss}\sigma_{\theta\theta}) / 3 \right]^{1/2}, \quad (1.12)$$

$\Delta_k \Gamma^{(p)}$  – приращение интенсивности пластических деформаций сдвига

$$\Gamma^{(p)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k \Gamma^{(p)}. \quad (1.13)$$

Угловыми скобками в (1.11) обозначено среднее за этап значение заключенной в них величины.

Для определения  $\Delta_k \Gamma^{(p)}$  используется предположение о существовании зависимости вида

$$S = F_2(\Gamma, \omega_\sigma) \quad (1.14)$$

между интенсивностью касательных напряжений  $S$  (1.12), интенсивностью деформаций сдвига  $\Gamma$  и углом вида напряженного состояния  $\omega_\sigma$ . При конкретизации функции  $F_2$  предполагаем, что

$$\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma^{(p)}. \quad (1.15)$$

Функции  $F_1$  (1.7) и  $F_2$  (1.14) вычисляются по результатам опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов растягивающим осевым усилием и равномерным внутренним давлением при нескольких постоянных значениях угла  $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$ . Подробно вычисление функций  $F_1$  (1.7) и  $F_2$  (1.14) по результатам опытов при значениях  $\omega_\sigma = 0, \pi/6, \pi/3$  описано в работах [8, 9, 13, 14]. В этих опытах  $\varepsilon_0 \geq 0$  и функции  $F_1 \geq 0$ , поэтому при  $\varepsilon_0 < 0$  в расчетах будем использовать значение  $F_1(|\varepsilon_0|)$ .

Таким образом, рассматриваемые определяющие уравнения для описания процессов деформирования изотропных материалов включают соотношения (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.9), (1.14). Эти уравнения имеют тот же вид, что и соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [5], линеаризованные методом дополнительных напряжений, но отличаются наличием дополнительных слагаемых  $\frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0|}\right)$  в выражениях (1.9) и  $\frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0|}\right)$  в выражении для  $\varepsilon_{\zeta\zeta}$  (1.5). В том случае, когда входящая в (1.5), (1.9) функция  $F_1$  (1.7) линейна, т.е.

принимается в виде  $\sigma_0 = K\varepsilon_0$ , выражение  $\left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0|}\right) = 0$  и (1.5), (1.9) зависят только от пластических составляющих деформаций (1.10), которые вычисляются с использованием функции  $F_2(\Gamma, \omega_\sigma)$  (1.14). Этот случай соответствует варианту определяющих уравнений [9]. Если предположить, что функция  $F_2$  (1.14) не зависит от вида напряженного состояния и определяется по результатам опытов на одноосное растяжение образцов (т.е.  $\omega_\sigma = \pi/3$ ), то уравнения (1.4), (1.5) превращаются в уравнения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [5].

Используем соотношения (1.4) для получения связи между усилиями, моментами и деформациями координатной поверхности оболочки. Для этого в выражения для усилий и моментов подставим (1.4), в которых заменим деформации в произвольной точке оболочки их выражениями (1.3). Получим

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}^{(0)} \varepsilon_s + C_{12}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(1)} \kappa_s + C_{12}^{(1)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(0)}; \\ N_\theta &= C_{12}^{(0)} \varepsilon_s + C_{22}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(1)} \kappa_s + C_{22}^{(1)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(0)}; \\ M_s &= C_{11}^{(1)} \varepsilon_s + C_{12}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(2)} \kappa_s + C_{12}^{(2)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(1)}; \\ M_\theta &= C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(2)} \kappa_s + C_{22}^{(2)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$C_{mn}^{(j)} = \sum_{i=1}^k \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} A_{mn}^{(i)} \zeta^j d\zeta; \quad N_{mD}^{(j)} = \sum_{i=1}^k \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} A_{mD}^{(i)} \zeta^j d\zeta \quad (m, n=1, 2; j=0, 1, 2). \quad (1.17)$$

Таким образом, приведены все основные соотношения для решения задачи об осесимметричном НДС слоистой оболочки с учетом вида напряженного состояния – уравнения равновесия, геометрические и физические соотношения.

## §2. Система разрешающих уравнений.

Соотношения (1.16) вместе с (1.1) и (1.2) образуют систему 12 уравнений. Выберем в качестве основных неизвестных функции  $N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s$ , позволяющие непосредственно формулировать различные граничные условия. Выразив через ос-

новые неизвестные функции остальные неизвестные, приведем указанную систему к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s) \quad (2.1)$$

при граничных условиях

$$B_1\vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1; \quad B_2\vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2, \quad (2.2)$$

где  $\vec{Y}$  – вектор-столбец разрешающих функций;  $\vec{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$ ;  $P(s)$  – матрица системы;  $\vec{f}(s)$  – вектор-столбец дополнительных слагаемых;  $B_1, B_2$  – заданные матрицы;  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  – заданные векторы-столбцы граничных условий. Элементы матрицы  $P(s)$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{\cos \varphi}{r}(1 + \lambda_1); \quad p_{13} = -\frac{\cos \varphi}{r}\lambda_2; \quad p_{14} = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}(\lambda_1 C_{12}^{(0)} + C_{22}^{(0)} + \lambda_2 C_{12}^{(1)}); \\ p_{15} &= p_{14} \operatorname{tg} \varphi; \quad p_{16} = -\frac{\cos^2 \varphi}{r^2}(\lambda_3 C_{12}^{(0)} + \lambda_4 C_{12}^{(1)} - C_{22}^{(1)}); \quad p_{21} = \frac{1}{R_s} - \frac{\lambda_1 \sin \varphi}{r}; \\ p_{22} &= -\frac{\cos \varphi}{r}; \quad p_{23} = -\frac{\sin \varphi}{r}\lambda_2; \quad p_{24} = p_{15}; \quad p_{25} = p_{15} \operatorname{tg} \varphi; \quad p_{26} = p_{16} \operatorname{tg} \varphi; \\ p_{31} &= -p_{22}\lambda_3; \quad p_{32} = -1; \quad p_{33} = -\frac{\cos \varphi}{r}(1 - \lambda_4); \\ p_{34} &= \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}(\lambda_1 C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} + \lambda_2 C_{12}^{(2)}); \quad p_{35} = p_{34} \operatorname{tg} \varphi; \\ p_{36} &= -\frac{\cos^2 \varphi}{r^2}(\lambda_3 C_{12}^{(1)} - C_{22}^{(2)} + \lambda_4 C_{12}^{(2)}); \quad p_{41} = \frac{C_{11}^{(2)}}{\delta}; \quad p_{42} = 0; \\ p_{43} &= -\frac{C_{11}^{(1)}}{\delta}; \quad p_{44} = -\lambda_1 p_{22}; \quad p_{45} = -p_{21}; \quad p_{46} = -p_{31}; \quad p_{51} = p_{52} = p_{53} = 0; \\ p_{54} &= -p_{12}; \quad p_{55} = 0; \quad p_{56} = -1; \quad p_{61} = p_{43}; \quad p_{62} = 0; \quad p_{63} = \frac{C_{11}^{(0)}}{\delta}; \\ p_{64} &= -p_{13}; \quad p_{65} = -p_{23}; \quad p_{66} = \lambda_4 p_{22}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (C_{11}^{(1)} C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(0)} C_{11}^{(2)}) / \delta; \quad \lambda_2 = (C_{11}^{(1)} C_{12}^{(0)} - C_{12}^{(1)} C_{11}^{(0)}) / \delta; \quad \lambda_3 = (C_{11}^{(2)} C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(2)} C_{11}^{(1)}) / \delta; \\ \lambda_4 &= (C_{11}^{(0)} C_{12}^{(2)} - C_{12}^{(1)} C_{11}^{(2)}) / \delta; \quad \delta = C_{11}^{(0)} C_{11}^{(2)} - (C_{11}^{(1)})^2. \end{aligned}$$

Компоненты вектора  $\vec{f}(s)$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\cos \varphi}{r}[\lambda_1 N_{1D}^{(0)} + \lambda_2 N_{1D}^{(1)} + N_{2D}^{(0)}] - q_s; \quad f_2 = -\frac{\sin \varphi}{r}[\lambda_1 N_{1D}^{(0)} + \lambda_2 N_{1D}^{(1)} + N_{2D}^{(0)}] - q_\zeta; \\ f_3 &= \frac{\cos \varphi}{r}[\lambda_3 N_{1D}^{(0)} + \lambda_4 N_{1D}^{(1)} - N_{2D}^{(0)}]; \quad f_4 = \frac{C_{11}^{(2)} N_{1D}^{(0)} - C_{11}^{(1)} N_{1D}^{(1)}}{\delta}; \quad f_5 = 0; \end{aligned}$$

$$f_6 = -\frac{C_{11}^{(1)}N_{1D}^{(0)} - C_{11}^{(0)}N_{1D}^{(1)}}{\delta}. \quad (2.4)$$

Из выражений (2.3), (2.4) видно, что матрица системы зависит от упругих характеристик материалов оболочки и параметров ее геометрии, а компоненты вектора  $\vec{f}(s)$  зависят еще и от пластических составляющих девиатора деформаций, которые необходимо уточнять в процессе последовательных приближений с использованием функций (1.7), (1.14).

### §3. Алгоритм решения задачи.

Предполагаем, что известны форма меридиана оболочки, количество слоев и их толщины, условия закрепления, действующие нагрузки и законы их изменения. Примем также, что известны модуль упругости (модуль сдвига) и коэффициент Пуассона каждого из материалов слоев, а также функции  $F_1$  (1.7) и  $F_2$  (1.14) при нескольких постоянных значениях угла  $\omega_\sigma$  для каждого материала. Для решения задачи процесс нагружения необходимо разбить на ряд этапов. На первом этапе удобно выбрать уровень нагрузок так, чтобы оболочка деформировалась в пределах упругости. Тогда в уравнениях (1.4) полагаем  $A_{1D} = A_{2D} = 0$  и решаем задачу упругости для рассматриваемой оболочки. Получим НДС оболочки на первом этапе. Строя процесс последовательных приближений на втором и любом из следующих этапов, будем использовать компоненты НДС, соответствующие концу предыдущего этапа. Начиная процесс последовательных приближений на произвольном  $k$ -м этапе, предполагаем, что известны значения  $(\varepsilon_{ss})_{k-1}, (\varepsilon_{\theta\theta})_{k-1}, (\varepsilon_{\zeta\zeta})_{k-1}, (\sigma_{ss})_{k-1}, (\sigma_{\theta\theta})_{k-1}, (e_{ss}^{(p)})_{k-1}, (e_{\theta\theta}^{(p)})_{k-1}, (\Gamma^{(p)})_{k-1}, [\varepsilon_0^{(p)}]_{k-1} = [\varepsilon_0(1 - F_1/(K|\varepsilon_0|))]_{k-1}$ . Используя  $(e_{ss}^{(p)})_{k-1}, (e_{\theta\theta}^{(p)})_{k-1}$  и  $[\varepsilon_0^{(p)}]_{k-1} = [\varepsilon_0(1 - F_1/(K|\varepsilon_0|))]_{k-1}$ , вычисляем  $A_{1D}, A_{2D}$  (1.9) и решаем краевую задачу при нагрузках и граничных условиях, соответствующих данному этапу. Имея значения компонент деформаций и напряжений, определим значения  $\varepsilon_0$  и  $\omega_\sigma$  (1.8) в первом приближении на текущем этапе. Путем линейной интерполяции найдем кривую  $F_1$ , соответствующую значению  $\omega_\sigma$ , и на этой кривой вычислим значение, соответствующее  $|\varepsilon_0|$ . Затем вычислим приращение интенсивности деформаций сдвига  $\Delta_k \Gamma^{(p)}$ . Для этого путем линейной интерполяции найдем кривую  $F_2$ , соответствующую значению  $\omega_\sigma$ , и на этой кривой определим значение  $S^{(d)}$ , соответствующее значению интенсивности деформаций сдвига  $\Gamma = (\Gamma^{(p)})_{k-1} + S/2G$ , где  $S$  вычислено по формуле (1.12). Тогда  $\Delta_k \Gamma^{(p)} = (S - S^{(d)})/2G$ . Используя это значение, определим приращения компонент девиатора пластических составляющих деформаций (1.11) и значения компонент этого девиатора (1.10). Теперь можем определить значения  $A_{1D}, A_{2D}$  (1.9) и решить краевую задачу в новом приближении. В общем случае в произвольном  $M$ -том приближении на  $k$ -том этапе приращение интенсивности пластических деформаций сдвига определяем, пользуясь следующим выражением:

$$\Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)} + \frac{S - S^{(d)}}{2G}, \quad (3.1)$$

где значение интенсивности касательных напряжений  $S$  вычислено по формуле (1.12), а значение  $S^{(d)}$  найдено с использованием функции  $F_2$  (1.14), соответствующей значению  $\omega_\sigma$  (1.8), при значении интенсивности деформаций

$$\Gamma = \Gamma_{k-1}^{(p)} + \Delta_k \Gamma^{(p)} + \frac{S}{2G}; \quad \Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)}. \quad (3.2)$$

Вычисленное значение  $\Delta_k \Gamma^{(p)}$  (3.1) используем для определения приращений компонент девиатора пластических деформаций (1.11), а с помощью значений этих компонент (1.10) уточняем  $A_{1D}, A_{2D}$  (1.9). Для этого же используем и значение функции  $F_1$ , найденное при соответствующих значениях  $\omega_\sigma$  и  $|\varepsilon_0|$ . Таким образом, каждое новое приближение на текущем этапе выполняем, вычислив  $A_{1D}, A_{2D}$  с использованием результатов решения задачи в предыдущем приближении и на предыдущем этапе. Процесс последовательных приближений на этапе продолжаем до выполнения условий

$$\left| \frac{\sigma_0 - F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma)}{K} \right| \leq \delta_1; \quad (3.3)$$

$$\left| \frac{S - F_2(\Gamma, \omega_\sigma)}{2G} \right| \leq \delta_2, \quad (3.4)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – заданные числа, характеризующие точность, с которой полученные в результате расчета значения  $\omega_\sigma, \varepsilon_0, \sigma_0$  удовлетворяют уравнению (1.7), а значения  $\omega_\sigma, S, \Gamma$  удовлетворяют уравнению (1.14). Расчетная практика показала, что при проведении вычислений достаточно задавать  $\delta_2$  и следить за выполнением условия (3.4), так как  $\delta_1 < \delta_2$ .

Описанный алгоритм реализуется в том случае, когда в элементах тела происходит процесс активного нагружения. Для того, чтобы определить – происходит процесс активного нагружения или разгрузка – на произвольном этапе в каждом элементе тела, в котором возникли пластические деформации ( $\Gamma^{(p)} > 0$ ), после решения задачи в первом приближении необходимо выполнить проверку условия

$$\Delta \Gamma^{(p)} > 0. \quad (3.5)$$

Если условие (3.5) выполняется, это означает, что в данном элементе происходит активное нагружение, и вычисления проводятся по вышеописанному алгоритму. В противном случае в данном элементе происходит разгрузка, и для ее учета в этом элементе тела необходимо положить  $\Delta \Gamma^{(p)} = 0$  и при определении  $A_{1D}, A_{2D}$  использовать значения  $e_{ss}^{(p)}, e_{\theta\theta}^{(p)}$  и  $\varepsilon_0(1 - F_1/(K|\varepsilon_0|)) = \varepsilon_0^{(p)}$  (см. [1]), соответствующие концу предыдущего этапа, и с этими значениями  $A_{1D}, A_{2D}$  решать краевую задачу в следующих приближениях данного этапа. Правильность определения моментов перехода от активного нагружения к разгрузке и наоборот и выбора величины этапов проверяется путем повторного расчета при уменьшении величины этапов в два раза. Процесс дробления этапов необходимо выполнять до тех пор, пока результаты расчетов компонент НДС оболочки в конце исследуемого процесса не совпадут с заданной точностью.

#### §4. Числовые результаты.

Применим вышеописанную методику к определению упругопластического НДС двухслойной бочкообразной оболочки, первоначально находившейся в ненапряженном и недеформированном состоянии при начальной температуре  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , а затем подвергнутой действию равномерного внутреннего давления при той же температуре. В качестве координатной поверхности принята срединная поверхность. Радиус кривизны меридиана срединной поверхности  $R_s = 20$  см, длина симметричной половины меридиана  $s_b - s_a = 20$  см, радиус параллельного круга при  $s = s_a = 0$   $r = r_0 = 10$  см, толщины слоев  $h_1 = h_2 = 0,5$  см. Граничные условия имеют следующий вид:  $s = s_a = 0$



–  $u = Q_s = \vartheta_s = 0$ ;  $s = s_b = 20$  см –  $u = w = M_s = 0$ . Внутреннее давление на 20 этапах нагружения задано следующими числовыми значениями (МПа):  $(q_\zeta)_1 = 6$ ;  $(q_\zeta)_2 = 20$ ;  $(q_\zeta)_3 = 30$ ;  $(q_\zeta)_4 = 35$ ;  $(q_\zeta)_k = 35 + 2,5(k - 4), k = 5, 6, \dots, 20$ .

Внутренний и наружный слой оболочки изготовлены из изотропных материалов 1 и 2, соответственно. При определении НДС оболочки учитываем зависимость от вида напряженного состояния при деформировании материала 2, а при деформировании материала 1 не будем учитывать эту зависимость. Для материала 2 значения функций  $F_1$  (1.8) и  $F_2$  (1.14) при значениях угла вида напряженного состояния  $\omega_\sigma = 0, \pi/6, \pi/3$  приведены в табл.1 и 2, соответственно; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,27$ .

Таблица 1

$\varepsilon_0 \cdot 10^2$	$\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0, \omega_\sigma)$ , МПа		
	$\omega_\sigma = 0$	$\omega_\sigma = \pi/6$	$\omega_\sigma = \pi/3$
0	0	0	0
0,01	41,8	41,8	41,8
0,06	187,4	176,8	89,9
0,10	198,4	200,4	107,7
0,24	280,8	237,6	152,3
0,30	291,5	244,0	159,2
0,50	318,0	266,5	168,1
1,00	347,6	299,2	181,6
2,00	373,2	365,4	187,9
4,00	411,6	431,6	199,5

Таблица 2

$\Gamma \cdot 10^2$	$S = F_2(\Gamma, \omega_\sigma)$ , МПа		
	$\omega_\sigma = 0$	$\omega_\sigma = \pi/6$	$\omega_\sigma = \pi/3$
0	0	0	0
0,02	30,3	30,3	30,3
0,05	55,6	45,6	79,5
0,09	86,8	64,6	112,8
0,42	162,7	171,3	143,2
0,85	175,9	187,9	157,4
2,14	206,3	210,8	195,4
4,31	239,1	232,3	225,7
12,96	322,7	280,1	297,6
21,62	414,0	335,3	321,5

Эти данные получены для материала Х18Н10Т [1, 13]. Для материала 1 приняты следующие характеристики: функция  $F_1$  (1.7) имеет вид  $\sigma_0 = K\varepsilon_0$ , ( $K = 418043,5$  МПа), функция  $F_2$  (1.14) определяется значениями, приведенными в табл. 2 при  $\omega_\sigma = \pi/3$ , а коэффициент Пуассона  $\nu = 0,27$ . Точность решения задачи пластичности –  $\delta_2 = 0,00001$ .

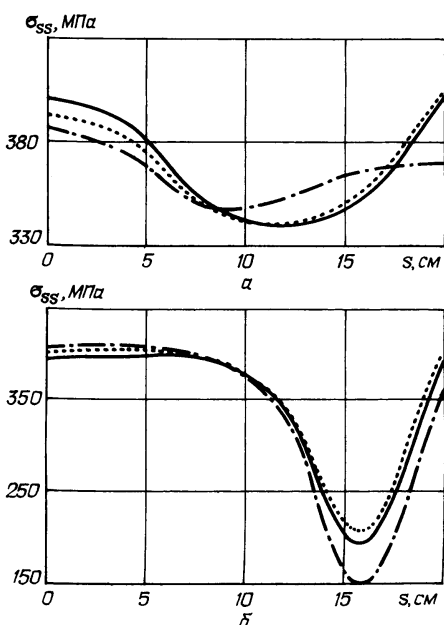


Рис. 1

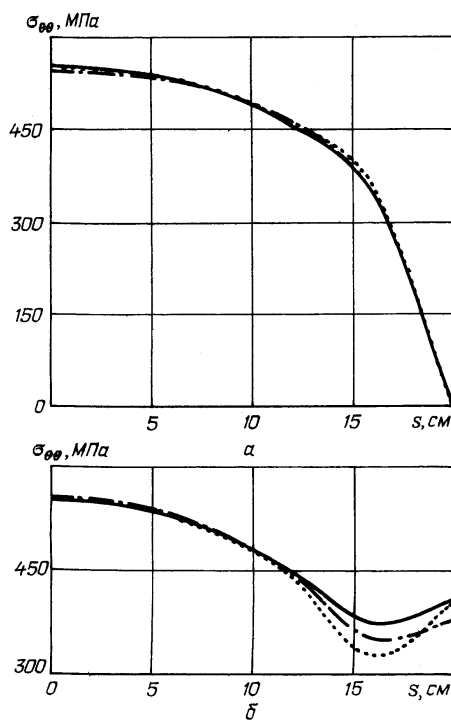


Рис. 2

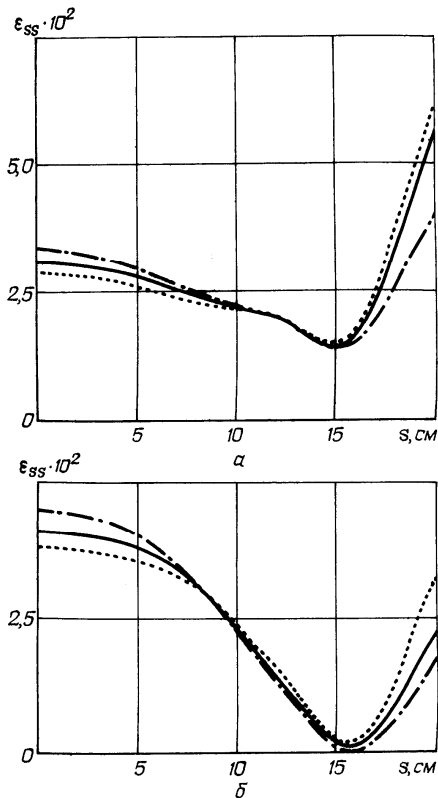


Рис. 3

В результате расчета установлено, что в конце рассматриваемого процесса нагружения оба материала оболочки деформировались за пределами упругости; процесс нагружения был активным, разгрузка в областях пластических деформаций не возникла. Некоторые результаты расчета приведены сплошными линиями на рис. 1 – 4. На этих рисунках показаны изменения напряжений  $\sigma_{ss}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  (рис. 1, 2) и деформаций  $\epsilon_{ss}$ ,  $\epsilon_{\theta\theta}$  (рис. 3, 4) вдоль меридиана при значениях координаты  $\zeta = -h_1$  (рис. 1, а – 4, а) и  $\zeta = h_2$  (рис. 1, б – 4, б). На этих же рисунках приведены результаты еще двух расчетов. Штриховые линии соответствуют расчету, в котором вся оболочка предполагалась изготовленной из материала 2 (т.е. учитывался вид напряженного состояния во всей оболочке), а пунктирные – расчету, в котором вся оболочка принималась изготовленной из материала 1. Эти данные позволяют рассмотреть влияние учета вида напряженного состояния и слоистой структуры на значения компонент НДС оболочки. Из результатов рисунков видно, что учет вида напряженного состояния и слоистость мало повлияли на окружные напряжения и деформации и значительно повлияли на значения меридиональных напряжений и деформаций. Значения меридиональных деформаций в слоистой оболочке в окрестности точки  $s = s_b$ ,  $\zeta = -h_1$  на 30 %, а в окрестности точки  $s = s_b$ ,  $\zeta = h_2$  на 25 % выше соответствующих значений, полученных при расчете НДС однослойной оболочки с учетом вида напряженного состояния, и в окрестностях тех же точек на 13 % и 46 %, соответственно, ниже значений в однослойной оболочке, полученных без учета вида напряженного состояния. Таким образом, в данной задаче учет вида напряженного состояния и слоистая структура оболочки значительно повлияли на значения компонент НДС этой оболочки.

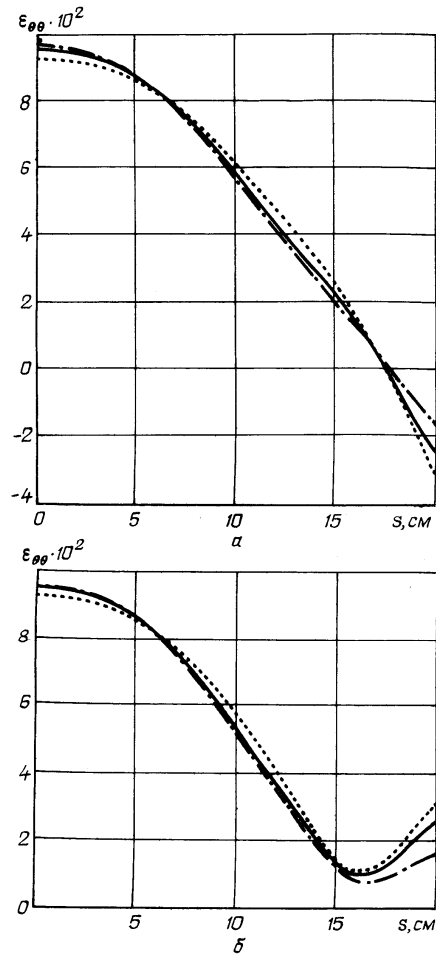


Рис. 4

### **Заключение.**

В результате выполненных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Разработана методика определения упругопластического НДС слоистых оболочек из изотропных материалов с учетом вида напряженного состояния в процессах осесимметричного нагружения.

2. Методика апробирована на примере двухслойной бочкообразной оболочки с шарнирно закрепленными торцами под действием равномерного внутреннего давления, в одном из слоев которой учитывался вид напряженного состояния.

3. Результаты расчета НДС двухслойной оболочки сопоставлены с соответствующими результатами расчета двух однослойных оболочек той же толщины и при тех же условиях нагружения, в одной из которых учитывался вид напряженного состояния, а в другой не учитывался.

Показано, что учет вида напряженного состояния и слоистая структура оболочки привели к значительному (на 25 – 46%) изменению некоторых результатов расчета НДС этой оболочки.

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано методику чисельного дослідження пружнопластичного напружено-деформованого стану тонких шаруватих оболонок обертання під дією осесимметричного навантаження. Використано визначальні рівняння, які описують пружнопластичне деформування ізотропних матеріалів з урахуванням виду напруженого стану. Наведено результати числового прикладу.

1. *Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н.* О методе последовательных приближений решения краевых задач пластичности с учетом вида напряженного состояния // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 7. – С. 11 – 12.
2. *Галишин А.З., Шевченко Ю.Н.* Определение осесимметричного упругопластического состояния тонких оболочек с учетом вида напряженного состояния // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 8. – С. 19 – 28.
3. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.
4. *Новожиллов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
5. *Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с.
6. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N.* Elastoplastic Stress-Strain State of Flexible Layered Shells Made of Isotropic and Transversely Isotropic Materials with Different Moduli and Subjected to Axisymmetric Loading // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 11. – P. 1208 – 1217.
7. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N.* On Two Approaches to Determining the Axisymmetric Elastoplastic Stress-Strain State of Laminated Shells Made of Isotropic and Transversely Isotropic Bimodulus Material // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 6. – P. 644 – 652.
8. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* On the Constitutive Equations to Describing the Elastoplastic Deformation of Isotropic Materials with Allowance for View of the Stress State // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 11. – P. 1189 – 1195.
9. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* On an Approximative Description of Elasto-Plastic Deformation Processes of Isotropic Materials with Allowance for the form of the Stress State // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 139 – 148.
10. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 350 p.
11. *Savchenko V.G.* Method of Investigation of Non-axisymmetric Non-elastic Deformation of Solids of Revolution with Allowance for View of Stress State // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 921 – 929.
12. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 4. – P. 421 – 430.
13. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Linear Relationship between the First Invariants of the Stress and Strain Tensors in Theories of Plasticity with Strain Hardening // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 3. – P. 291 – 302.
14. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Elastoplastic Deformation of Elements of an Isotropic Solid along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Incorporating the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 6. – P. 621 – 630.

Поступила 08.12.2009

Утверждена в печать 15.06.2010