

Н.П. Плахтиенко, А.Т. Забуга

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
С УПРАВЛЯЕМЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

Abstract. A nonlinear mathematical model of translational vibrations of a system of n rigid bodies is constructed for the case of inertial loading. The system contains the support-ball mechanism of seismic isolation and the electromagnetic dampers, controlled by means of the inertial feed-back channel. When the accelerative damping being presented in the system, the system of differential equations of dynamics is obtained in the normal form. The frequencies of small non-attenuated vibrations are evaluated. A technique of studying the dynamical coefficients by use of acceleration of rigid bodies is proposed for the case of accelerative damping. For the two-mass system, the phenomenon of double phase-frequency resonance is studied.

Key words: mathematical model, system of rigid bodies, electromagnetic damper, mechanism of seismic isolation, feed-back, translational acceleration, double phase-frequency resonance.

Введение.

Механизмы сейсмоизоляции (МС) сооружений со второй половины прошлого столетия разрабатываются и применяются как средство смягчения негативных последствий сильных землетрясений [3 – 7, 16, 17, 21 – 24]. Назначение этих механизмов состоит в уменьшении жесткости связи сооружения с частью фундамента, заглубленной в грунт, а также в увеличении диссипации энергии сейсмических возмущений. В настоящее время предложены модели и проводятся исследования по разработке конструктивных решений для управляемых демпфирующих устройств, содержащих жидкие электро- и магнитореологические материалы в виде суспензий для использования их в МС [13 – 17]. Один из возможных путей улучшения диссипативных свойств сейсмозащитных устройств может быть основан на использовании фрикционных электромагнитных демпферов, не содержащих магнитореологических суспензий. Такая схема демпфирования одномассовой системы описана в работах [8, 11].

В настоящей работе при определенных ограничивающих предположениях строится математическая модель многомассовой системы тел, снабженной подобным электромагнитным демпфером в механизме сейсмоизоляции. Построена математическая модель системы твердых тел с опорно-шаровым МС и встроенными электромагнитными фрикционными элементами. Последние производят силу сопротивления движению несущей платформы МС, зависящую от тока в обмотке электромагнитов. Величина тока в обмотке демпферов управляется сигналом, доставляемым контуром обратной связи с датчиков поступательного ускорения отдельных тел системы. Измерение ускорения весьма выгодно технически (не требует неподвижного основания). Последовательно интегрируя сигнал из акселерометра, можно организовать управление демпфирующими устройствами по скорости или перемещению.

Управление движением механических систем с использованием контура управления является эффективным приемом улучшения их динамических свойств [18, 19].

§1. Расчетная схема цепной системы твердых тел с шаровым механизмом сейсмоизоляции и управляемыми электромагнитными демпферами.

На рис. 1 показана геометрическая схема n твердых тел, обустроенных МС. Этот механизм состоит из нижнего массивного тела массы m_0 , которое имеет твердую плоскую ферромагнитную поверхность, по которой могут перекаатываться шаровые опорные элементы K_s , $s=1,2,\dots$, радиуса r в количестве не меньше трех, которые не лежат на одной линии. СА – система измерения, интегрирования и усиления процессов, доставляемых акселерометрами, установленными на несомых твердых телах.

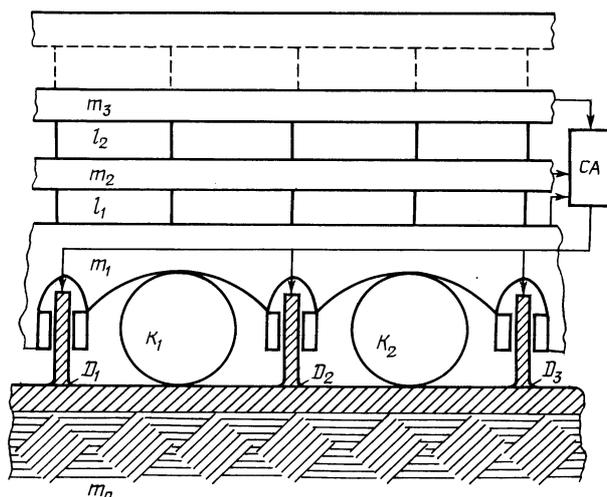


Рис. 1

Верхняя часть механизма включает тело m_1 , обустроенное системой сферических выемок радиуса $R \gg r$. Шаровые опоры контактируют с верхней плитой m_1 МС, при этом в положении равновесия точки контакта находятся в вершинах выемок шаровых опор. Верхняя плита МС обустроена системой электромагнитных демпферов (ЭМД) D_i ($i=1, 2, \dots, k$). Эти демпферы являют собой катушки соленоидов с ферромагнитным сердечником. Знакопостоянный ток I в катушках электромагнитов может быть управляемым по отклонению, относительной или абсолютной скорости или ускорению любого из тел цепной системы. Электромагнитные демпферы могут беспрепятственно двигаться в вертикальных направляющих верхней плиты МС. При наличии тока в катушках в зоне контакта башмаков с ферромагнитной поверхностью нижней плиты МС возникает сила прижима N электромагнитов к поверхности скольжения. Сила прижима предопределяет появление силы трения, направленной в сторону, противоположную вектору скорости скольжения башмаков электромагнитов относительно поверхности скольжения. Предполагаем ее неотрицательной функцией ампервитков $W = qi$, где q – количество витков катушки ЭМД является постоянным конструктивным параметром; i – величина тока в амперах, которая зависит от движения тела; далее примем ее функцией $N(i)$, которую можно изобразить некоторым полиномом по степеням величины тока i , т.е.

$$N = N(i) = n_0 + n_1 i + n_2 i^2 + \dots + n_k i^k, \quad (1.1)$$

где n_j ($j = \overline{1, k}$) – конструктивные параметры электромагнита, при этом величина n_j имеет размерность n/a^j . Величина параметра n_0 зависит от силы веса якоря электромагнита и его остаточной намагниченности, связанной, например, с применением якорей из магнито жестких материалов. Такие материалы характеризуются достаточно широкой петлей магнитного гистерезиса со значительной коэрцитивной силой. Для магнитомягких якорей сила их прижима к ферромагнитной поверхности имеет приближенную квадратичную зависимость от тока i [5].

Теоретический расчет коэффициентов n_k ($k = 1, 2, \dots$) возможен на основе теории электромагнетизма [1], он является достаточно сложной задачей. Более эффективным может оказаться теоретико-экспериментальный метод, который опирается на измерение силы отрыва якоря от ферромагнитной поверхности в зависимости от тока в его обмотке [5].

Величины оценок конструктивных параметров n_j ($j = \overline{1, k}$) получают с применением метода наименьших квадратов обработкой множества измерений F_T при $p \gg k$ значениях тока $i_p = \text{const}(p = 1, 2, \dots, k, \dots)$.

Сила трения скольжения якоря электромагнита по ферромагнитной поверхности с скоростью v определяется простой формулой

$$F_T(i) = -\mu N(i) \text{sign} v. \quad (1.2)$$

Тело массы m_0 может выполнять заданное движение и является моделью фундамента, жестко совмещенного с тектонической плитой (почвой), колебательное движение которой вызывает инерционную силовую нагрузку сейсмической природы, т.е. землетрясение. В дальнейшем предположим, что тело m_0 выполняет поступательное колебательное движение. К телу массы m_1 присоединена цепная система твердых тел с помощью k гибких упругих стержневых связей длиной ℓ . Деформацией растяжения связей будем пренебрегать. Следовательно, стержневые связи обеспечивают возможность плоскопараллельного сдвигового перемещения несомых тел друг относительно друга при постоянном расстоянии в вертикальном направлении.

Дальше систему твердых тел m_0, m_1 с шаровыми опорами между ними и электромагнитными демпферами будем называть механизмом сейсмоизоляции цепной системы твердых тел.

Целью данного исследования является составление математической модели малых поступательных колебаний обозначенной системы твердых тел с механизмом сейсмоизоляции, который содержит управляемый электромагнитный фрикционный демпфер, а также исследованию влияния управления по ускорению на резонансные характеристики рассматриваемой системы при частных значениях ее параметров.

В общем случае движение рассматриваемой системы тел будет связано по всем координатам, при этом вращательно-поступательное движение обязательно порождает пространственный характер движения тела m_1 , которое опирается на шаровые опоры. При его малом поступательно-вращательном движении возникает отклонение от вертикальной оси, которое является сугубо кинематическим по природе и имеет второй порядок малости сравнительно с углом вращения вокруг оси Oz [9]. В случае, когда малое поступательное и вращательное движения не связаны [2], их можно отдельно исследовать как не порождающие наклона вертикально ориентированной цепной системы твердых тел. Согласно результатам работы [9] малое поступательное и вращательное движения исследуемой системы твердых тел будут не связаны, если выполняются такие условия:

- 1) опорные элементы расположены на периферии одного круга;
- 2) центры масс цепной системы твердых тел в положении равновесия лежат на вертикальной оси, которая проходит через центр круга расположения опорных элементов;
- 3) центры жесткости связей всех тел лежат на оси, которая проходит через центр круга опорных элементов;
- 4) главные оси инерции всех тел коллинеарны.

При перечисленных условиях, отсутствии внешних вращательных моментов, а также нулевых начальных значениях, движение системы тел будет поступательным.

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают малые поступательные колебания совокупности твердых тел возле положения равновесия. При поступательном движении всех элементов цепной системы твердых тел перемещение всех шаровых опор относительно опорной и несущей плит МС предполагается идентичным.

Воспользуемся методом уравнений Лагранжа II рода. Вычислим кинетическую и потенциальную энергии системы, показанной на рис. 1. С этой целью введем инерциальную декартову систему координат $O_i\xi\zeta$ и неинерциальную Oxz с началом на плоскости подвижного тела m_0 . Ось Oz направлена вертикально вверх, Ox – вправо (рис. 2). Начало O совпадает с проекцией вершины выемки на поверхность нижнего тела МС в положении равновесия, то есть при отсутствии перемещения верхнего тела m_1 . Ось Ox параллельна оси $O_i\xi$. Для проекций абсолютной скорости системы тел имеем $v_{xi} = \dot{x}_i + \dot{\xi}(t)$, $v_{zi} = \dot{z}_i + \dot{\zeta}(t)$. Согласно предположению о нерастяжимости стержневых связей – $z_i = z_1$ ($i = 2, 3, \dots, n$).

Кинематические параметры, характеризующие пространственное положение несущей плиты, определим как и в работе [23] углом поворота шара, отсчитываемого от его невозмущенного состояния.

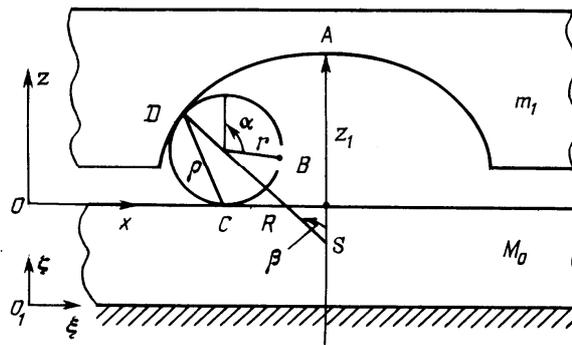


Рис. 2

Вертикальная и горизонтальная составляющие относительной скорости массы m_1 не являются независимыми, поскольку верхняя плита перекачивается по шару и проекции скоростей $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{z}_1(t)$ связаны интегрируемой (при поступательном движении) кинематической связью

$$\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2 = v_1^2, \quad (1.3)$$

где согласно работе [22] $v_1 = \dot{\alpha}\rho(\alpha)$; α – угол между вертикалью и радиусом r , проведенным из центра шара в точку B , которая в положении равновесия системы тел совпадает с точкой A вершины выемки; $\rho(\alpha)$ – мгновенный радиус вращения, который соединяет точки C и D шара (рис. 2)

$$\rho(\alpha) = r\sqrt{2(1 + \cos \chi\alpha)} \quad \left(\chi = \frac{r}{R-r} \right). \quad (1.4)$$

При этом $\chi\alpha = \beta$ – угол между вертикалью и радиусом выемки, проведенным в точку D текущего контакта шара с поверхностью выемки (рис. 2)

$$z_1 = (R-r)(1 - \cos \chi\alpha) + 2r. \quad (1.5)$$

Отсюда имеем равенство $\dot{z}_1 = \dot{\alpha}(R-r)\chi\sin \chi\alpha$. Подставляя его в формулу (1.3), находим

$$\dot{x}_1 = r(1 + \cos \chi\alpha)\dot{\alpha}. \quad (1.6)$$

Проинтегрируем последнее равенство и в результате получим координату x_1 так же, как функцию угла α

$$x_1 = r \int_0^\alpha (1 + \cos \chi \sigma) d\sigma = r \left(\frac{\sigma + \sin \chi \sigma}{\chi} \right) \Big|_0^\alpha = r \left(1 + \frac{1}{\chi} \sin \chi \alpha \right). \quad (1.7)$$

Следовательно, для функции Лагранжа L имеем такое выражение: $L = T - \Pi$, где с учетом $\dot{z}_i = \dot{z}_1$ ($i = \overline{2, n}$) имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[(\dot{x}_i + \dot{\xi})^2 + (\dot{z}_1 + \dot{\zeta})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} M (\dot{z}_1 + \dot{\zeta})^2 + \frac{1}{2} m_1 (r(1 + \cos \chi \alpha) \dot{\alpha} + \dot{\xi})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n m_i (\dot{x}_i + \dot{\xi})^2; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= g z_1 \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} k_{i-1, i} (x_i - x_{i-1})^2 + \text{const} = g(R - r)(1 - \cos \chi \alpha) M + \\ &+ \frac{1}{2} k_{12} \left(x_2 - r \left(\alpha + \frac{1}{\chi} \sin \chi \alpha \right) \right)^2 + \sum_{i=3}^n \frac{1}{2} k_{i-1, i} (x_i - x_{i-1})^2 + \text{const}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $M = \sum_{i=1}^n m_i$; $k_{i, i+1} = \frac{12EJ}{\ell^3} p$ изгибная жесткость из p одинаковых параллельно вставленных и жестко зажатых между двух подвижных масс (m_i, m_{i+1}) стержней длиной ℓ и изгибной жесткостью EJ . Первое слагаемое в выражении (1.9) является гравитационным потенциалом, а второе и третье слагаемое отражают потенциал сил деформации гибких стержневых связей. Следовательно, уравнение поступательного движения цепной системы твердых тел имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_\alpha; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_{xi} \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (1.10)$$

Здесь Q_α, Q_{xi} – обобщенные силы непотенциального характера, в число которых будем включать только силы трения от управляемых демпферов, действующих на тело m_1 . Согласно известным правилам, Q_α определяется как коэффициент при $\delta \alpha$ элементарной работы δA , силы трения на виртуальном перемещении δx_1

$$\delta A = -\mu N(i) \delta x_1 = -\mu N(i) r(1 + \cos \chi \alpha) \text{sign} \dot{\alpha} \delta \alpha,$$

откуда имеем

$$Q_\alpha = -\mu N(i) r(1 + \cos \chi \alpha) \text{sign} \dot{\alpha}. \quad (1.11)$$

Обобщенные силы Q_{xi} примем нулевыми: $Q_{xi} = 0$ ($i = \overline{2, N}$).

Для построения уравнений малых колебаний системы возле положения равновесия выражение кинетической и потенциальной энергий представим в виде

$$T = T_2 + T_1, \quad \Pi = \Pi_2, \quad (1.12)$$

где T_k ($k = 1, 2$) – функции первой и второй степени относительно переменных $\dot{\alpha}, \dot{x}_i$, Π_2 – функция второй степени относительно переменных α, x_i ($i = \overline{2, N}$). Для вычислений T_i ($i = 1, 2$) и Π_2 имеем формулы:

$$T_1 = M \frac{r^2}{R-r} \dot{\alpha} \alpha \dot{\zeta} + 2m_1 r \dot{\alpha} \dot{\zeta} + \sum_{i=2}^n m_i \dot{x}_i \dot{\zeta}; \quad T_2 = 2m_1 r^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n m_i \dot{x}_i^2;$$

$$\Pi_2 = Mg(R-r) \frac{\chi^2 \alpha^2}{2} + \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - 2r\alpha)^2 + \sum_{i=3}^n \frac{1}{2} k_{i-1,i} (x_i - x_{i-1})^2. \quad (1.13)$$

Для вычисления операторов Эйлера с учетом (1.11) приходим к таким уравнениям малых поступательных колебаний цепной системы твердых тел возле положения равновесия:

$$2m_1 r \ddot{\alpha} + \mu N(i) \text{sign} \dot{\alpha} + M \frac{r}{2(R-r)} (g + \ddot{\zeta}) \alpha - k_{12} (x_2 - 2r\alpha) = -m_1 \ddot{\zeta};$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_{12} (x_2 - 2r\alpha) - k_{23} (x_3 - x_2) = -m_2 \ddot{\zeta}; \quad (1.14)$$

$$m_j \ddot{x}_j + k_{j-1,j} (x_j - x_{j-1}) - k_{j,j+1} (x_{j+1} - x_j) = -m_j \ddot{\zeta} \quad (j = 3, 4, \dots, n).$$

В первое уравнение (1.14) необходимо подставить выбранный закон $N(i)$ управления током в катушках ЭМД.

Практический интерес представляет использование акселерометров, установленных только на несомых телах, которые доставляют их абсолютное горизонтальное ускорение: $\ddot{x}(t) + \ddot{\zeta}(t)$. Последовательным интегрированием этих процессов можно получить с некоторой погрешностью абсолютные скорости $\dot{x}(t) + \dot{\zeta}(t)$ и перемещения $x(t) + \zeta(t)$.

Учитывая инерционность контура обратной связи в форме апериодического звена первого порядка, имеем один из трех законов управления током в катушке электромагнитного демпфера

$$T_j \frac{di}{dt} + i = \begin{cases} K_{dj} |x_j + \zeta(t)|; & (1.15) \\ K_{vj} |\dot{x}_j + \dot{\zeta}(t)|; & (1.16) \\ K_{aj} |\ddot{x}_j + \ddot{\zeta}(t)|, & (1.17) \end{cases}$$

где $T_j, K_{dj}, K_{vj}, K_{aj}$ ($j = \overline{1, n}$) – постоянная времени и коэффициенты усиления контуров управления, которые содержат измерители абсолютных значений перемещения, скорости или ускорения j -й массы системы твердых тел.

Численное интегрирование системы уравнений (1.14), (1.15) или (1.14), (1.16) с учетом (1.1) может быть выполнено при малых значениях n_i ($i = \overline{0, k}$) как системы квазилинейных дифференциальных уравнений в форме Коши. В случае уравнений (1.14), (1.17) задача аналитически осложняется необходимостью исключения переменной \ddot{x}_j из уравнения (1.17).

Согласно уравнениям (1.14) при $\ddot{\zeta} = 0$ имеем для ($j = \overline{2, n}$) равенство

$$\ddot{x}_j = -\ddot{\zeta} - \frac{1}{m_j} [k_{j-1,j} (x_j - x_{j-1}) - k_{j,j+1} (x_{j+1} - x_j)]; \quad x_1 = 2r\alpha. \quad (1.18)$$

Для $j = 1$ согласно первому уравнению (1.14) получаем

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{\xi} - \left(N(i) \text{sign } \dot{x}_1 - k_{12}(x_2 - x_1) + \frac{M}{4} \frac{x_1}{R-r} g \right) \frac{1}{m_1}. \quad (1.19)$$

В случае, когда постоянные времени T_j ($j = \overline{1, n}$) значительно меньше низшего из собственных периодов T_k ($k = \overline{1, n}$) рассматриваемой системы при $\ddot{\xi}(t) = \dot{\xi}(t) \equiv 0$, $N(i) = 0$, тогда величины T_j пропорциональны малому параметру; в этом случае получаем сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром при производных [12]. При численном интегрировании таких систем необходимо выбирать шаг интегрирования с учетом наличия в системе быстрых переменных. В работе [8] с использованием численного интегрирования исследовано влияние инерционности контура управления на резонансные характеристики одномассовой системы при управлении током электромагнита по скорости и ускорению. В предельном случае, когда параметр T_j существенно мал, можно положить $T_j = 0$. В этой ситуации величина тока определяется из конечных соотношений. Ограничиваясь далее двучленным представлением соотношения (1.2) при n_i ($i = \overline{2, k}$) и наличием обратной связи только от тела малой массы m_1 , находим такие силы трения скольжения для соответствующих законов управления током:

$$\mu N(i) = \begin{cases} \mu(n_0 + h_{d1} |x_1 + \xi(t)|) ; \\ \mu(n_0 + h_{v1} |\dot{x}_1 + \dot{\xi}(t)|) ; \\ \mu(n_0 + h_{a1} |\ddot{x}_1 + \ddot{\xi}(t)|) , \end{cases} \quad (1.20)$$

где $h_{d1} = n_1 K_{d1}$, $h_{v1} = n_1 K_{v1}$, $h_{a1} = n_1 K_{a1}$.

Введенные параметры имеют такие размерности: $[h_{d1}] = \text{н/м}$, $[h_{v1}] = \text{нс/м}$, $[h_{a1}] = \text{кг}$.

Законы управления (1.15), (1.17) делают уравнения малых колебаний цепной системы нелинейными. Управление по перемещению обуславливает гистерезисное, а по ускорению – акселеративное демпфирование совокупности твердых тел.

Оценим собственные частоты и формы малых колебаний исследуемой системы при отсутствии тока в электромагнитных демпферах при $n_0 \equiv 0$ и $\ddot{\xi}(t) = \dot{\xi}(t) \equiv 0$. Обозначим матрицы инерции и жесткости системы через \bar{M} и \bar{C} . Здесь \bar{M} – диагональная n -матрица с элементами m_i ($i = \overline{1, n}$) на главной диагонали. Матрица \bar{C} является симметрической и трехдиагональной, на главной и верхней диагонали имеем, соответственно, такие элементы:

$$c_{11} = \frac{Mg}{4(R-r)} + k_{12}; \quad c_{ii} = k_{i-1,i} + k_{i,i+1} \quad (i = \overline{2, n}, \quad k_{n,n+1} = 0);$$

$$c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = -k_{i,i+1} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Матрицы \bar{M}, \bar{C} положительно определены, следовательно, частотное уравнение

$$\det[-\bar{M} \omega^2 + \bar{C}] = 0 \quad (1.21)$$

имеет действительные положительные корни $\omega^2 = \omega_i^2$ ($i = \overline{1, n}$).

Предполагаем, что среди этих корней нет кратных; тогда решение соответствующей автономной консервативной системы имеет вид

$$x_k = \sum_{i=1}^n X_{ki} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (\varphi_i = \text{const}),$$

где X_{ki} – координаты вектора $X_i^T = (X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ni})$ являются нетривиальным решением однородного линейного алгебраического уравнения

$$(-\bar{M}\omega_i^2 + \bar{C})X_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

которое определяется с точностью до произвольного множителя. Векторы X_i, X_j ($i \neq j$) являются ортогональными в том понимании, что $X_i^T \bar{M} X_j = 0$, $X_i^T \bar{C} X_j = 0$; здесь T – символ транспонирования.

Запишем явный вид корней уравнения (1.21) для $n = 2$. Введем такие обозначения положительных величин:

$$M = m_1 + m_2; \quad D = R - r; \quad g = 9,8; \quad \omega_0^2 = g/(4D); \quad \frac{m_2}{m_1} = \sigma; \quad \frac{k_{12}}{m_2 \omega_0^2} = Q.$$

Здесь величины σ, Q являются безразмерными.

Тогда, составляя и решая квадратные уравнения (1.21) при $n = 2$ относительно ω_1^2, ω_2^2 , находим

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_{1,2}^2(\omega_0, \sigma, Q) = \omega_0^2 \Phi_{1,2}(\sigma, Q);$$

$$\Phi_{1,2}(\sigma, Q) = \frac{1}{2}(1 + \sigma)(1 + Q) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(1 + \sigma)^2(1 + Q)^2 - Q(1 + \sigma)}.$$

Здесь знак « \mp » перед радикалом отвечает меньшей, а « \pm » – большей частотам.

На рис. 3, *a, б* показаны поверхности, которые отображают влияние двухмассовости на частоты системы с двумя степенями свободы,

$$u_i = \sqrt{\Phi_i(\sigma, Q)} \quad (i = 1, 2); \quad \sigma \in [0, 1]; \quad Q \in [1, 10].$$

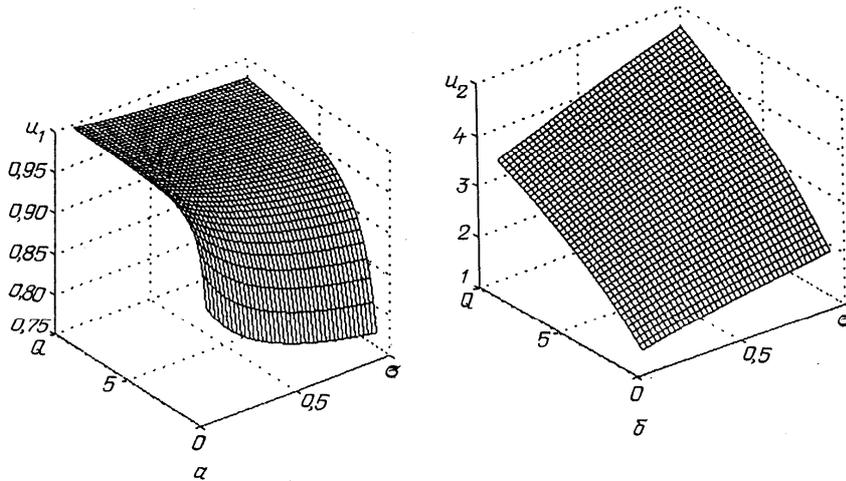


Рис. 3

На рис. 4 показана поверхность, которая характеризует относительную длину диапазона расположения собственных частот двухмассовой системы, отнесенную к гравитационной частоте одномассовой системы

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(\sigma, Q) = \\ &= \frac{|\omega_1(\omega_0, \sigma, Q) - \omega_2(\omega_0, \sigma, Q)|}{\omega_0} = \\ &= \left| \sqrt{\Phi_1(\sigma, Q)} - \sqrt{\Phi_2(\sigma, Q)} \right|. \end{aligned}$$

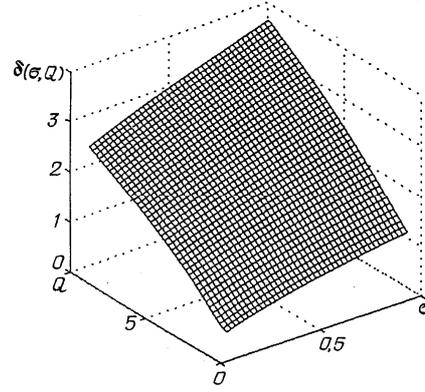


Рис. 4

Как видно из рис. 4, увеличение жесткости k_{12} межмассовой упругой связи приближает низшую частоту ω_1 к чисто маятниковой частоте ω_0 .

Приведем расчетную модель динамики поступательных колебаний системы твердых тел при безынерционной обратной связи $T_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$) и управлению током электромагнитов по абсолютному ускорению несущей платформы

$$i = K_{a1} |\ddot{x}_1 + \ddot{\xi}| = K_{a1} (\ddot{x}_1 + \ddot{\xi}) \operatorname{sign}(\ddot{x}_1 + \ddot{\xi}).$$

Тогда первое уравнение системы (1.14) запишем в форме

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{\xi})(1 + \lambda_a \operatorname{sign}(\dot{x}_1(\ddot{x}_1 + \ddot{\xi}))) = -F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \ddot{\xi}),$$

$$\text{где } F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \ddot{\xi}) = \frac{M}{m_1} \frac{(g + \ddot{\xi})}{4(R-r)} x_1 - \frac{k_{1,2}}{m_1} (x_2 - x_1) + \frac{\mu n_0}{m_1} \operatorname{sign} \dot{x}_1, \quad \lambda_a = \mu K_{a1} n_1 / m_1.$$

Размерность величины λ_a является нулевой, поскольку $[K_{a1}] = a\epsilon^2/m$, $[n_1] = n/a$, $[m_1] = \text{кг}$.

Отсюда при $\lambda_a < 1$ имеем $\operatorname{sign}(\dot{x}_1 + \ddot{\xi}) = -\operatorname{sign}F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \ddot{\xi})$.

Следовательно, первое уравнение системы (1.14) может быть решено относительно второй производной и она примет вид нелинейных дифференциальных уравнений, которые сводятся к форме Коши

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\ddot{\xi} - \frac{F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \ddot{\xi})}{1 - \lambda_a \operatorname{sign}(\dot{x}_1 F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \ddot{\xi}))}; \\ \ddot{x}_j &= -\ddot{\xi} - \frac{k_{j-1,j}}{m_j} (x_j - x_{j-1}) + \frac{k_{j-1,j}}{m_j} (x_{j+1} - x_j); \\ & (j = \overline{2, n}), \quad k_{n, n+1} = 0). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Эти уравнения удобны для численного интегрирования. Таким образом, в предположении безынерционности контура управления током система уравнений (1.22) представляет математическую модель динамики поступательных колебаний цепной системы твердых тел с управляемыми по абсолютному ускорению фрикционными электромагнитными сейсмодемпферами с учетом инерционной нагрузки.

§2. Исследование явления двойного фазочастотного (ДФЧ) резонанса.

Для получения результатов анализа ДФЧ-резонанса рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $\omega_1(\omega_2)$ является нижней (высшей) из собственных частот, которые определяются уравнением типа (1.21). Пусть $\omega_i = \omega_i(\omega_0, \sigma, Q)$, $i = 1, 2$, – две собственные частоты системы (1.22) при $n = 2$, ν_1, ν_2 – две близкие частоты внешнего затухающего возмущения вида

$$\ddot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^2 a_i \exp(\lambda_i t) \cos(\nu_i t + \alpha_i). \quad (2.1)$$

В системе (1.22) при $n = 2$ может иметь место явление ДФЧ-резонанса, если при изменении параметров ω_0, σ, Q любая из частот ω_1, ω_2 попадет в интервал $[\nu_1, \nu_2]$ с начальными фазами α_i ($i = 1, 2$), которые отличаются на полупериод, и имеет гармоники с близкими амплитудами a_1, a_2 [6, 7, 24]. Исследуем резонансно-частотные свойства рассматриваемой двухмассовой системы, содержащей только две несомые массы, возмущаемые горизонтальным переносным ускорением. С этой целью запишем уравнения движения (1.22) при $n = 2$, $\ddot{\xi}(t) = 0$ с использованием параметров ω_0, σ, Q . В результате имеем

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dot{x}_1, 0) &= \omega_0^2 ((1 + \sigma + Q/\sigma)x_1 - Q/\sigma x_2) + \mu n_0 / m \text{sign} \dot{x}_1; \\ \ddot{x}_1 &= -\ddot{\xi} - F(x_1, x_2, \dot{x}_1, 0) / (1 - \lambda_a \text{sign}(\dot{x}_1 F(x_1, x_2, \dot{x}_1, 0))); \\ \ddot{x}_2 &= -\ddot{\xi} - Q\omega_0^2(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Примем $R - r = D$ переменным параметром и

$$\sigma = \bar{\sigma} = \text{const}; \quad Q = \bar{Q} = \text{const}; \quad \omega_0 - \text{var} \in [\omega_{01}, \omega_{02}].$$

Вычислим значение низшей частоты ω_{Hi} ($i = 1, 2$) при D_1 и D_2

$$\begin{aligned} \omega_{01} = \omega_0(D_1) &= \sqrt{g/(4D_1)}; \quad \omega_{02} = \omega_0(D_2) = \sqrt{g/(4D_2)}; \\ \omega_{H1} &= \omega_{01} \sqrt{\Phi_1(\bar{\sigma}, \bar{Q})}; \quad \omega_{H2} = \omega_{02} \sqrt{\Phi_1(\bar{\sigma}, \bar{Q})}. \end{aligned}$$

При изменении параметра D в диапазоне $[D_1, D_2]$ низшая собственная частота будет изменяться в диапазоне $[\omega_{H1}, \omega_{H2}]$. Выберем теперь частоты внешнего возмущения в окрестности частоты $\hat{\omega}_1$

$$\nu_{1,2} = \hat{\omega}_1 (1 \pm \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1; \quad \hat{\omega}_1 = \frac{1}{2}(\omega_{01} + \omega_{02})$$

и построим графики зависимостей $\mu_1(\omega_0)$, $\mu_2(\omega_0)$

$$\mu_1(\omega_0(\sigma)) = \frac{\max_t |\dot{x}_1(t) + \ddot{\xi}(t)|}{\max_t |\ddot{\xi}(t)|}; \quad \mu_2(\omega_0(\sigma)) = \frac{\max_t |\ddot{x}_2(t) + \ddot{\xi}(t)|}{\max_t |\ddot{\xi}(t)|}; \quad \omega_0 \in [\omega_{01}, \omega_{02}]. \quad (2.3)$$

Эти зависимости являются коэффициентами динамичности рассматриваемой системы по ускорению. Максимумы графиков $\mu_1(\omega_0)$, $\mu_2(\omega_0)$ отображают явление резонанса. Аналогичные вычисления коэффициентов $\mu_1(\omega_0)$, $\mu_2(\omega_0)$ за счет выбора параметра D можно выполнить в окрестности высшей собственной частоты двухмассовой системы.

На рис. 5 представлены графики кривых $\mu_1(\omega_0)$, $\mu_2(\omega_0)$, полученные путем численного интегрирования уравнений, (2.2) с начальными условиями: $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$ и внешнем возмущении (2.1.), при таких значениях входных величин:

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2; \quad Q = 5; \quad \sigma = 1; \quad \lambda_a = 0,2; \quad n_0 = 0; \quad DZ = 0,2;$$

$$D_1 = 0,02\text{м}; \quad D_2 = 0,2\text{м}; \quad \varepsilon = 0,05;$$

$$\omega_{01} = \sqrt{g/(4D_2)} = 3,5018; \quad \omega_{02} = \sqrt{g/(4D_1)} = 11,0736;$$

$$\bar{\omega}_H = \frac{1}{2}(\omega_{01} + \omega_{02}) = 7,2877; \quad \nu_{1,2} = \bar{\omega}_H(1 \pm \varepsilon) = [7,6521; \quad 6,9233];$$

$$a_{1,2} = 1; \quad T_{1,2} = 2\pi/\nu_{1,2} = [0,2436; \quad 0,2204];$$

$$\lambda_{1,2} = DZ/T_{1,2} = [0,2436; \quad 0,2204]; \quad \alpha_{1,2} = [0, \quad 0] \quad (\text{рис. 5, а});$$

$$\alpha_{1,2} = [0, \quad \pi] \quad (\text{рис. 5, б}).$$

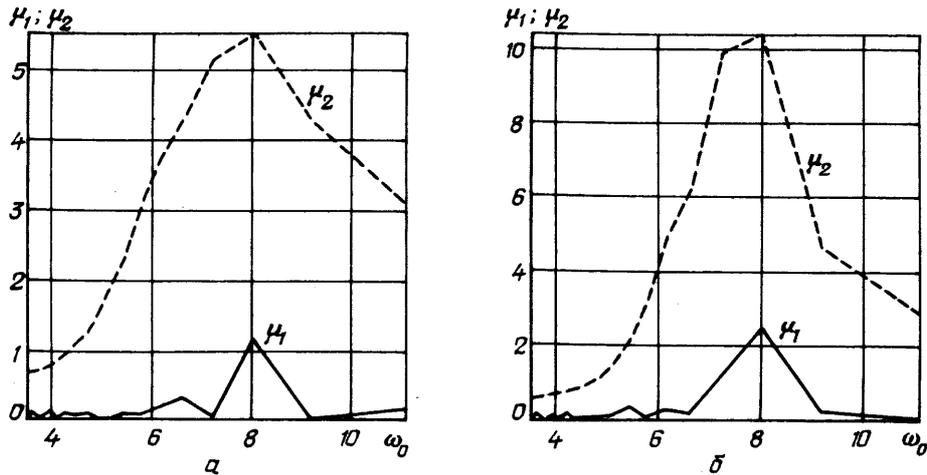


Рис. 5

Как видим, явление аномально высокого значения величин $\mu_{1,2}(\omega_0(D))$ действительно имеет место, когда начальные фазы отличаются на полупериод.

РЕЗЮМЕ. Побудовано нелінійну математичну модель поступальних коливань системи n твердих тіл при інерційному навантаженні. Система містить опорно-кульовий механізм сейсмоізоляції і електромагнітні демпфери, керовані за допомогою каналу інерційного зворотного зв'язку. При наявності акселеративного демпфування отримано систему диференціальних рівнянь динаміки в нормальній формі. Обчислено частоти малих незатухаючих коливань. Досліджено залежність власних частот від ряду безрозмірних параметрів. Побудовано методичку дослідження динамічних коефіцієнтів по прискоренню твердих тіл при акселеративному демпфуванні. Для двомасової системи досліджено явище подвійного фазочастотного резонансу.

1. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. – М.: Наука, 1971. – 1033 с.
2. *Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О.* Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 431 с.
3. *Козина Г.А., Килимник Л.Ш.* Современные методы сейсмозащиты зданий и сооружений. – М.: ВНИИИС, 1987. – 66 с.
4. *Назин В.В.* Новые сейсмостойкие конструкции и железобетонные механизмы сейсмоизоляции зданий и сооружений. – М.: Стройиздат, 1993. – 133 с.
5. *Назин В.В.* Экспериментальные здания в Севастополе на гравитационных системах сейсмоизоляции с включающимся сухим трением. – Ташкент: НТО Стройиндустрия, 1974. – 37.
6. *Нейман Л.Р., Калантаров П.Л.* Теоретические основы электротехники. Ч. 1. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 296 с.
7. *Плахтиенко Н.П.* Переходный резонанс упругих систем при двухчастотном инерционном возбуждении // Сейсмостойкое строительство и безопасность сооружений. – 2000. – № 6. – С. 27 – 30.
8. *Плахтиенко Н.П., Михайлова М.И., Забуга А.Т.* К расчету колебаний твердого тела с управляемым фрикционным электромагнитным сейсмомодератором // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 1. – С. 114 – 124.
9. *Плахтиенко М.П.* Математична модель малих нелінійних просторових коливань масивного твердого тіла з опорно-котковим сейсмоамортизатором // Конструкции гражданских зданий: Сборник научных трудов Киевзнииэп. – К., 2003. – С. 96 – 102.
10. *Плахтиенко М.П.* Про розрахункове визначення коефіцієнтів допустимих пошкоджень та відповідальності споруд // Конструкции гражданских зданий: Сборник научных трудов КиевЗНИИЭП. – К., 2003. – С. 103 – 113.
11. *Плахтиенко М.П., Забуга А.Т.* Оптимізація параметрів контура управління струмом електромагнітного фрикційного сейсмомодератора при розривному сейсмічному прискоренні // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2009. – Вип. 1. – С. 10 – 15.
12. *Понтрягин Л.С., Родыгин Л.В.* Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // ДАН СССР. – 1960. – **131**, № 2. – С. 255 – 258.
13. *Aldemir U., Gavin H.P.* Optimal Semiactive Control of Structures with Isolated Base // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 2. – P. 235 – 240.
14. *Carlson J.D., Spencer B.F.* Magnetorheological fluid dampers for semiactive seismic control // Proc. 3rd, Int. Conf. on Motion and Vibration Control, **III**. – P. 35 – 40. (1996).
15. *Gavin H.P., Hanson R.D., Filisko F.E.* Electrorheological Dampers, part I: Analysis and Design; Part II: Testing and Modeling // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1996. – **63**. – P. 669 – 682.
16. *Karnopp D.* Active and semi-active vibration isolation // Trans. ASME, Special 50-th Anniversary Design Issue. – 1995. – **117**. – P. 177 – 185.
17. *Kelly J.M.* The role of damping in seismic isolation // Earthquake Energ. and Struct. Dyn. – 1999. – **25**. – P. 3 – 20.
18. *Larin V.B.* Control Problems for Wheeled Robotic Vehicles // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 363 – 389.
19. *Larin V.B., Tunik A.A.* Dynamic Output Feedback Compensation of External Disturbances // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 5. – P. 606 – 616.
20. *Legeza V.P.* Quickest-Descent Curve in the Problem of Rolling of a Homogeneous Cylinder // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P. 1430 – 1437.
21. *Moon B.Y., Kang G.J., Kang B.S., Kim G.S. and Kelly J.M.* Mechanical properties of seismic isolation system with fiber-reinforced bearing of strip type // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 10. – P. 1231 – 1239.
22. *Plakhtienko N.P.* Double Transient Phase-Frequency Resonance in Vibratory Systems // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 113 – 120.
23. *Plakhtienko N.P.* Dynamics of a Chain System of Rigid Bodies with Gravity-Friction Seismic Dampers: Fixed Supports // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 7. – P. 786 – 796.
24. *Yao, J.T.P.* Concept of Structural Control // J. of Structural Division. – 1972. – **98**. – P. 1567 – 1574.

Поступила 25.09.2009

Утверждена в печать 15.06.2010