

Е.Я. Антонюк¹, В.А. Сахарнов², Н.И. Коваль²

**О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ДВИГАТЕЛЯ С ПРОСТРАНСТВЕННО КАЧАЮЩИМИСЯ ЗВЕНЬЯМИ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ;
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

²*Ин-т электросварки им. Е.О. Патона НАНУ;
ул. Боженко, 11, 03680, Киев 150, МСП, Украина;
e-mail: Sakharnov VO@nas.gov.ua*

Abstract. A mathematical model is proposed and the results are shown of studying the structure, kinematics and dynamics of the diesel engine with oblique washers. A structural scheme of the kinematic chain of statically determinate force system of engine is elaborated. The kinematic relationships are obtained with taking into account the presence of Hooke joints and oblique washers. A mathematical model of the engine dynamical system is described. A numerical example is considered. The kinematics and dynamical processes of the engine are studied.

Key words: mathematical model, diesel engine, oblique washers, structure of mechanism, constraint, statically determinate force system, kinematics, dynamical process.

Введение.

Совершенствование двигателей внутреннего сгорания с целью повышения их экономичности, надежности и качества работы представляет важную научно-техническую проблему современного машиностроения. Дизельные двигатели обладают рядом преимуществ по сравнению с бензиновыми [5, 7, 13] – более просты в конструктивном отношении, работают на менее качественном горючем, обеспечивают экономию расхода топлива, большую безопасность в пожарном отношении, простоту обслуживания. Кроме того, у них отсутствует система выработки электрической искры для воспламенения рабочей смеси и используются более высокие степени сжатия. Перечисленные выше и ряд других преимуществ (в том числе более высокий коэффициент полезного действия КПД) способствуют расширению применения дизелей в автотракторном машиностроении, военной и других областях техники. Процесс создания новых дизельных двигателей состоит из ряда этапов, связанных с проектированием, экспериментальным их исследованием и последующей доводкой. К недостаткам дизелей относится несколько более высокая стоимость и более низкий срок службы.

Важным шагом в деле создания нового дизеля является выбор кинематической схемы его силовой установки. Выпускаемые в настоящее время дизельные и другие двигатели внутреннего сгорания имеют коленчатые валы для преобразования поступательного движения поршней во вращательное, что обуславливает ряд конструктивных и технологических трудностей. Широкие перспективы совершенствования связаны с двухтактными дизельными двигателями, у которых для передачи рабочих усилий от поршневой группы к исполнительным механизмам вместо коленчатых валов используются закрепленные на ведущем валу косые шайбы с дополнительными кинематическими цепями. Двигатели внутреннего сгорания, выполненные по таким схемам, в настоящее время не получили сколько-нибудь широкого распространения в машиностроении. В [10] приводятся конструкции на основе таких схем. Отметим также, что существуют защищенные патентами новые изобретения [15, 16] по конст-

рукции дизеля с косыми шайбами и аналогами шарниров Гука, которые свидетельствуют о повышенных возможностях таких двигателей. Преимуществом отмеченной схемы является упрощение конструкции, существенное снижение радиальных усилий на поршне и цилиндре двигателя, а также значительное уменьшение скоростей скольжения в шарнирах шатунов и поршней, что является обоснованной предпосылкой для повышения долговечности и качества работы по сравнению с двигателями традиционного исполнения и более высокому КПД. Цикл исследований по усовершенствованию конструкции дизелей на основе этих патентов [15, 16], проводится в Институте электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины. Как отмечено выше, двухтактный двигатель согласно [15, 16] не имеет коленчатых валов, каждый из цилиндров содержит по два движущихся в противоположных направлениях поршня (при рабочем ходе) или навстречу друг другу – при обратном ходе; углы наклона шатунов к осям цилиндров незначительны (до 2°). Все это упрощает конструкцию, снижает вес, удешевляет производство, повышает компактность, КПД и износостойкость, обеспечивает высокую степень уравнивания системы, в том числе продольных усилий воздействия сгорающих газов на корпус двигателя.

Каждая проектно-конструкторская проработка неизбежно должна включать этап синтеза структуры машины, в данном случае силовой установки двигателя. Целью этого этапа является создание статически определимой системы механизмов, в которой отсутствуют пассивные (повторяющиеся) связи [10, 18]. При соблюдении такого условия нагрузки в звеньях и кинематических парах (т.е. подвижных соединениях) будут определяться только силовым технологическим и динамическим воздействием, а в кинематических цепях не появятся дополнительные (пассивные) натяжения, возникающие вследствие неизбежных погрешностей изготовления деталей и сборки узлов машины, а также их деформации при работе. Как исключение, в обоснованных случаях возможно допустить статическую неопределимость как, например, в многоопорных валах, при условии высокой точности изготовления и обеспечения достаточной жесткости соответствующих элементов конструкции. Кроме того, в процессе синтеза структуры системы должны быть исключены все избыточные степени свободы, которые не обусловлены требованиями к кинематике движения выходного звена. В данной статье (§1) приводится один из вариантов разработанной структурной схемы без повторяющихся связей.

Кинематические исследования выполнены вследствие наличия косых шайб и аналогов шарниров Гука. С этим связана нелинейность кинематических передаточных функций и динамической системы дизеля в целом. Определение соответствующих кинематических зависимостей осуществлено в §2.

При создании новой машины большая роль отводится динамическому исследованию двигателя и связанной с ним последующей системы механизмов, что позволяет объективно осуществить последующие расчеты на прочность, износ и долговечность. В статье (§3) разработаны динамические модели силовой установки дизеля на базе уравнений Лагранжа – первого рода, соответственно, для системы с неидеальной связью и второго рода – для системы со всеми идеальными связями. На основе численного решения на базе программного пакета MATLAB определены кинематика движения и динамические нагрузки звеньев (§4).

§1. Структура.

Используемые в конструкции двигателя шарниры Гука (карданные передачи), в общем случае, являются статически неопределимыми. Они принадлежат к так называемым сферическим механизмам [6]: все три геометрические оси их подвижных звеньев должны пересекаться в одной точке. При этом кинематическая цепь шарнира Гука обладает одной степенью свободы, но имеет три повторяющиеся условия связи, т.е. она трижды статически неопределима. Широкое применение шарниров Гука в различных отраслях техники (транспорте, гироскопических системах и др.) обуславливает необходимость высокой культуры производства, обеспечивающей необходимую точность изготовления и сборки. Полагаем, что в некоторых случаях можно существенно расширить область допустимых отклонений размеров деталей шарниров Гука от номинальных за счет увеличения подвижности кинематических пар, соединения крестовины с вилками и одного из валов (для последнего – в осевом направле-

нии). Возникающие при этом кинематические возбуждения будут несущественными и не окажут заметного влияния на динамическую нагруженность системы.

Схема статически определимой системы силовой установки дизеля изображена на рис. 1. При разработке схемы использованы метод «непринужденной сборки» [10] и структурная формула Сомова – Малышева [1], позволяющая для относительно простых кинематических цепей осуществить синтез на основании количества условий связей. При этом отпадает необходимость в использовании уравнений связей и последующей проверки отсутствия их линейной зависимости.

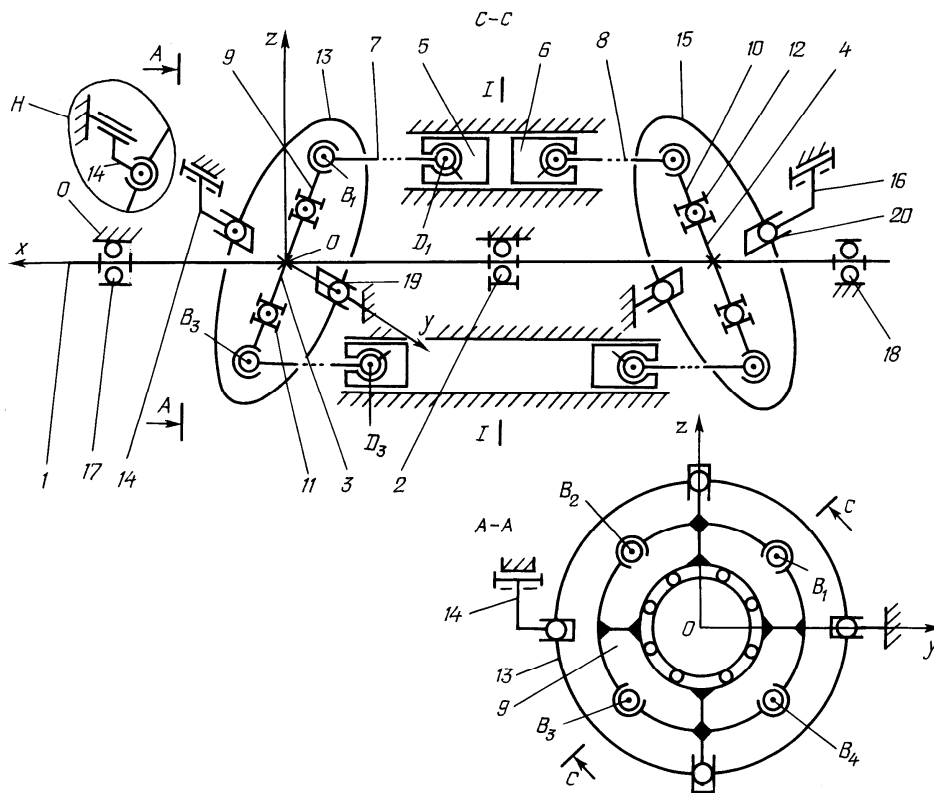


Рис. 1

Предлагаемая схема двигателя (рис.1) (согласно патентам [15, 16]), состоит из двух частей, симметричных относительно вертикальной плоскости $I - I$, перпендикулярной оси выходного вала 1 . Вал является многоопорным, что порождает статическую неопределимость подсистемы вал – корпус, однако при достаточной жесткости корпуса и вала, а также высокой точности изготовления корпуса под подшипники, статической неопределимостью данной подсистемы можно пренебречь. Тем более, что фиксация вала от осевого перемещения осуществляется одним подшипником 2 . Неподвижно соединенные с валом 1 наклонные шайбы 3 и 4 в конечном счете обеспечивают передачу силового воздействия от поршней 5 и 6 и шатунов 7 и 8 к валу 1 . В опытном образце двигателя предусмотрены по четыре поршня для каждой из частей, однако их количество может быть иным. Ввиду того, что шатуны 7 и 8 воздействуют на звенья 9 и 10 , которые могут вращаться в подшипниках 11 и 12 относительно косых шайб 3 и 4 , для исключения двух дополнительных степеней свободы вводятся две кинематические цепи в форме шарниров Гука, включающие соответственно звенья $9, 13$ и 14 для левой части и $10, 15, 16$ – для правой. Оси вращательных кинематических пар, образованных корпусом 0 со звеньями 14 и 16 по возможности должны располагаться горизонтально и параллельно Oy , чтобы компенсировать незначительные смещения вала 1 вдоль его оси при монтаже и вращении, обусловленные отклонениями фактических размеров от расчетных. Другой вариант кинематической группы, состоящей из звена 14 (и звена 16 для правой части двигателя) с соответствующими

щими кинематическими парами, дан на рис. 1 в виде узла H . Кроме подшипников 2, 17 и 18, а также 11 и 12 и соединений поршней с цилиндрами, все кинематические пары являются сферическими шарнирами с четырьмя, тремя или двумя степенями свободы (в последнем случае в изображении на схеме они содержат штрих, означающий исключение возможности поворота вокруг одной из осей координат, или представлены как шар в цилиндре). Кинематические пары, образуемые поршнями (5, 6, ...) и неподвижными цилиндрами, принимаем как имеющие одну степень свободы. Система в целом (рис. 1) имеет одну степень свободы ($W = 1$), т.е. положение любого из звеньев силовой установки в любой момент времени будет определяться одной обобщенной координатой, например, углом поворота φ_1 вала 1 или перемещением какого-либо из поршней вдоль оси соответствующего цилиндра. Одновременно в системе по рис. 1 исключаются кинематические неопределенности в положениях вала 1 и звеньев обоих шарниров Гука, что могло бы иметь место, если бы в каждый из них вместо кинематической пары 19 (или 20) ввели соответственно звено 14 или 16 с вращательной и сферической кинематическими парами, т.е. придали полную симметрию системе силовой установки; при этом возникли бы избыточные степени свободы. Схема рис. 1 [18] будет без принуждения компенсировать возникающие при работе торцевые и радиальные биения вала 1, косых шайб 3 и 4, деталей 9 и 10, несоосность отверстий в корпусе по оси Oy и параллельно ей и др.

§2. Кинематика.

Для динамического исследования нагруженности силовой установки должны быть определены кинематические передаточные функции звеньев ввиду наличия кинематических цепей, включающих косые шайбы и аналоги шарниров Гука.

Звенья 9 и 10 относительно шайб 3 и 4 (рис. 1) могут вращаться только вокруг осей, совпадающих с нормальными к поверхностям шайб. В силу ограничений, налагаемых подшипниками 11 и 12, геометрические плоскости звеньев 9 и 10 всегда будут совпадать с плоскостями окружностей косых шайб 3 и 4. Таким образом, любая линия, проходящая через радиус r окружности шайбы 3 (или 4), на своем продолжении будет расположена на плоскости звена 9 (или 10). Кинематическая цепь, состоящая из подвижных звеньев 9 и 13 и неподвижного корпуса 0 двигателя, включающая кинематические пары, образованные звеном 13 с корпусом 0, а также звеньями 9 и 13 и подшипником 11 между звеном 9 и косой шайбой 3, представляет собой аналог шарнира Гука. В инвертированном (обращенном) движении (рис. 2), когда всем звеньям двигателя, включая и корпус 0, придается угловая скорость $-\omega_1$ (останавливая вал 1), отмеченная кинематическая цепь будет функционировать как традиционный шарнир Гука, передающей под углом α движение от звена 0 к звену 9, вращающемуся на подшипнике 12. Обозначения звеньев и кинематических пар на рис. 2 соответствуют тем, которые даны на рис. 1. На рис. 3 изображена подробная расчетная схема такого инвертированного механизма. Нумерация звеньев и кинематических пар та же, что и

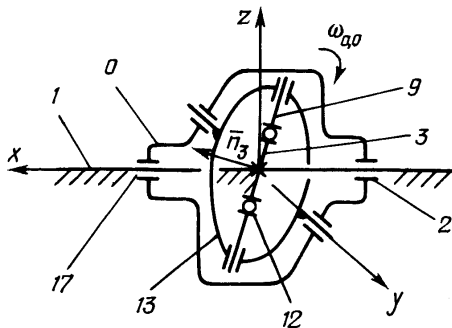


Рис. 2

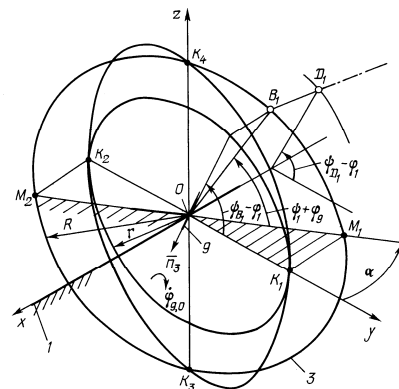


Рис. 3

на рис. 1. Отсчет угла φ_1 поворота вала 1 будем осуществлять в плоскости поперечного к валу 1 сечения от оси Oy прямоугольной системы координат $Oxyz$; положительное направление – против вращения часовой стрелки. Начало O прямоугольной системы координат совместим с точкой пересечения оси вала 1 с плоскостью косо́й шайбы 3, ось Ox – с осью этого вала. Начальное положение плоскости косо́й шайбы 3 зададим так, чтобы она, располагалась в вертикальной плоскости и, пересекалась с горизонтальной плоскостью xOy под углом α к оси Oy (α – представляет угол наклона плоскости шайбы 3 к оси вала 1). В этом положении плоскость косо́й шайбы 3 может быть определена двумя взаимно перпендикулярными диаметрами окружности шайбы 3 (радиуса r), причем один из этих диаметров (K_3, K_4) расположен вертикально, а другой (M_1, M_2) – в горизонтальной плоскости. В обращенном движении угловая скорость $\omega_{0,0}$ корпуса 0 двигателя будет равна $\omega_{0,0} = -\omega_1$, а угловая скорость звена 9 (в направлении нормали \vec{n}_3 к плоскости шайбы 3) равна $\omega_{9,0}$; углы φ поворота этих звеньев $\varphi_{0,0} = -\varphi_1$ и $\varphi_{9,0}$. Угол $\varphi_{9,0}$ и скорость $\dot{\varphi}_{9,0}$ будут определены ниже. Поскольку косо́я шайба 3 (рис. 1) закреплена на валу 1, в обращенном движении она будет неподвижна.

С учетом горизонтального положения осей шарниров, соединяющих звенья 0 и 13, а также 0 и 14, кинематическое уравнение шарнира Гука согласно [1, 8] будет иметь вид

$$\operatorname{tg} \varphi_{9,0} = \operatorname{tg} \varphi_{0,0} \cos \alpha. \quad (1)$$

Переходя к более удобной, чем (1) зависимости, после преобразований получим

$$\cos \varphi_{9,0} = \frac{\cos \varphi_{0,0}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{0,0} \sin^2 \alpha}}. \quad (2)$$

Принимая во внимание, что значения углов $\varphi_{0,0}$ и $\varphi_{9,0}$ с течением времени непрерывно (по модулю) нарастают, представим (2) в виде

$$\varphi_{9,0} = 2\pi k + (-1)^k \arccos \left(\cos \varphi_{0,0} / \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{0,0} \sin^2 \alpha} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Дифференцируя (1) по времени и заменяя $\varphi_{0,0}$ и $\dot{\varphi}_{0,0}$ на $-\varphi_1$ и $-\dot{\varphi}_1$, найдем угловую скорость $\dot{\varphi}_{9,0}$ звена 9 для обращенного движения

$$\dot{\varphi}_{9,0} = -\frac{\dot{\varphi}_1 \cos^2 \varphi_{9,0} \cos \alpha}{\cos^2 \varphi_1} = -\frac{\dot{\varphi}_1 \cos \alpha}{1 - \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

Обозначим через x_{D_i} , y_{D_i} , z_{D_i} координаты центра D_i сферического шарнира i -го поршня (на рис. 3 шарнир D_1 поршня 1). Для координат y_{D_i} , z_{D_i} в обращенном движении получаем зависимость (рис. 3)

$$y_{D_i} = r_1 \cos(\psi_{D_i} - \varphi_1), \quad z_{D_i} = r_1 \sin(\psi_{D_i} - \varphi_1). \quad (5)$$

Здесь r_1 – радиус расположения продольных осей цилиндров на окружности перпендикулярного к валу 1 сечения корпуса двигателя, φ_1 – угол поворота вала 1 в абсолютном движении, ψ_{D_i} – угол между плоскостью xOy и продольной осью i -го цилиндра, отсчитываемый от оси Oy в поперечном к оси вала 1 сечении в начальный

момент времени ($t = 0$). При равномерном расположении i цилиндров $\psi_{D_i} = 2\pi/i$. В системе координат $Oxyz$ в обращенном движении координаты центров B_i сферических шарниров на звене 9 (рис. 1) имеют вид

$$x_{B_i} = -R \cos(\psi_i - \varphi_{9,0}) \sin \alpha; \quad y_{B_i} = R \cos(\psi_i - \varphi_{9,0}) \cos \alpha; \quad z_{B_i} = R \sin(\psi_i - \varphi_{9,0}). \quad (6)$$

Производная по времени t от координаты x_{B_i} определяет скорость движения точки B_i вдоль оси Ox (параллельно оси i -го цилиндра), т.е.

$$\dot{x}_{B_i} = -\frac{\dot{\varphi}_1 R \sin(\psi_i - \varphi_{9,0}) \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha}. \quad (7)$$

Если при анализе движения поршня ограничиться только скоростью \dot{x}_{B_i} центра шарнира B_i , то кинематику диады, состоящей, например, из звеньев 5 и 7 с соответствующими тремя кинематическими парами, в первом приближении можно описать как для системы, совершающей плоско-параллельное движение в плоскости, содержащей ось Ox и точку D_1 поршня.

Более точный анализ движения i -го поршня требует учета всех компонент скорости точки B_i , т.е. \dot{x}_{B_i} , \dot{y}_{B_i} , \dot{z}_{B_i} . Для этого предварительно следует найти угловую скорость $\omega_9 = \dot{\varphi}_9$ звена 9 в абсолютном движении, равную сумме векторов $\bar{n}_3 \dot{\varphi}_{9,0} + \bar{i} \dot{\varphi}_1$ или в проекциях на оси координат $Oxyz$

$$\dot{\varphi}_{9,x} = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_{9,0} \cos \alpha; \quad \dot{\varphi}_{9,y} = \dot{\varphi}_{9,0} \sin \alpha \cos \varphi_1; \quad \dot{\varphi}_{9,z} = \dot{\varphi}_{9,0} \sin \alpha \sin \varphi_1. \quad (8)$$

Линейные скорости \bar{v}_{B_i} точек B_i центров шарниров определяются [4, 12] зависимостью

$$\bar{v}_{B_i} = \bar{\omega}_9 \times \bar{R}_{B_i} = \bar{i} (\dot{\varphi}_{9,y} z_{B_i} - \dot{\varphi}_{9,z} y_{B_i}) + \bar{j} (\dot{\varphi}_{9,z} x_{B_i} - \dot{\varphi}_{9,x} z_{B_i}) + \bar{k} (\dot{\varphi}_{9,x} y_{B_i} - \dot{\varphi}_{9,y} x_{B_i}). \quad (9)$$

В (9) проекции векторов \bar{R}_{B_i} и $\bar{\omega}_i$ соответствуют (6) и (8); $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы по осям Ox, Oy, Oz .

Координата x_{D_i} центра сферического шарнира D_i i -го поршня определяется зависимостью

$$x_{D_i} = x_{B_i} - \sqrt{\ell^2 - (y_{D_1} - y_{B_1})^2 - (z_{D_1} - z_{B_1})^2}, \quad (10)$$

где ℓ – длина шатунов (например, 7, рис. 1).

На основании (10) скорость движения i -го поршня имеет вид

$$\dot{x}_{D_1} = \dot{x}_{B_1} - \frac{(y_{D_1} - y_{B_1}) (\dot{y}_{D_1} - \dot{y}_{B_1}) + (z_{D_1} - z_{B_1}) (\dot{z}_{D_1} - \dot{z}_{B_1})}{\sqrt{\ell^2 - (y_{D_1} - y_{B_1})^2 - (z_{D_1} - z_{B_1})^2}}, \quad (11)$$

где, согласно (5) и (6) соответствующие скорости определяются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{y}_{D_1} &= r_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\psi_{D_1} - \varphi_1); \quad \dot{z}_{D_1} = -r_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\psi_{D_1} - \varphi_1); \\ \dot{y}_{B_1} &= R \dot{\varphi}_{9,0} \sin(\psi_1 - \varphi_{9,0}) \cos \alpha; \quad \dot{z}_{B_1} = -R \dot{\varphi}_{9,0} \sin(\psi_1 - \varphi_{9,0}); \end{aligned} \quad (12)$$

\dot{x}_{B_i} – имеет вид (7). Кинематические передаточные функции от звеньев 9 и 13 к звену 1 имеют вид

$$u_{9,1} = \frac{\dot{\varphi}_9}{\dot{\varphi}_1} = \sqrt{1 + \frac{-1 + \sin^2 \alpha (1 + 2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha)}{(1 - \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha)^2}};$$

$$u_{13,1} = \frac{\dot{\varphi}_{13}}{\dot{\varphi}_1} = \frac{\dot{\varphi}_{9y}}{\dot{\varphi}_1} = -\frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{1 - \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha}. \quad (13)$$

Графики $u_{9,1}$ и $u_{13,1}$ представлены на рис. 4, а, б.

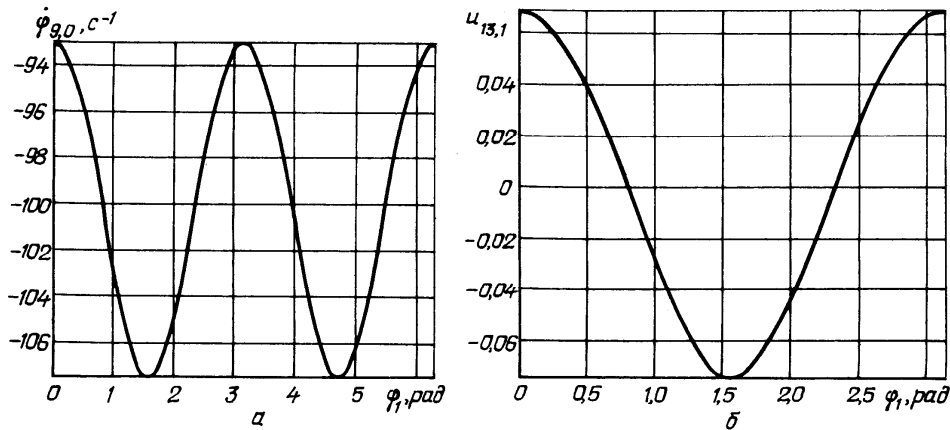


Рис. 4

Передаточная функция $u_{x, \varphi_1} = \dot{x}/\dot{\varphi}_1$ определяется на основании (7), (11), (12).

Принимая во внимание небольшие текущие значения углов наклона осей шатунов 7, 8, ... к осям соответствующих цилиндров, момент сил, действующий на вал 1, например, со стороны поршня 1, может быть принят в виде

$$M_1 \approx P_1 R \sin \alpha \cos \alpha \cos \left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4} \right). \quad (14)$$

Зависимость (14) справедлива для четырехцилиндрового двигателя.

Кинетическая энергия звеньев 9, а также 10, совершающих пространственное движение, может быть вычислена согласно выражению [4]

$$T_9 = 0,5 I_\omega \omega^2, \quad (15)$$

где ω – мгновенная угловая скорость звена; I_ω – момент инерции звена 9 относительно мгновенной оси вращения. Вследствие симметрии звена 9 относительно осей x_1, y_1, z_1 центробежные моменты инерции I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} можно принять равными нулю, т.е. эллипсоид инерции звена 9 относительно его центра масс O будет иметь вид

$$I_{xx} x_1^2 + I_{yy} y_1^2 + I_{zz} z_1^2 = K^2. \quad (16)$$

В (16) I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – центральные осевые моменты инерции, $k^2 = I_\ell R_\ell^2$, I_ℓ – момент инерции звена 9 относительно оси ℓ , проходящей через центр O ; R_ℓ – расстояние от центра O до точки пересечения оси ℓ с эллипсоидом инерции. Мгновенная ось вращения звена 9 лежит в плоскости этого звена и определяется [4] направляющими косинусами α, β, γ , т.е.

$$I_\ell = I_{xx} \alpha^2 + I_{yy} \beta^2 + I_{zz} \gamma^2. \quad (17)$$

§3. Динамика.

Динамические процессы в машинах описываются посредством дифференциальных уравнений, отражающих учитываемые при исследовании наиболее существенные свойства механической системы [21, 22]. Работа тяжелых быстроходных машин обычно сопровождается существенной деформацией некоторых упругих звеньев, например валов, подшипников качения и т.д., что повышает количество степеней свободы и порядок системы дифференциальных уравнений математической модели [3, 8]. Впоследствии, по возможности, производится упрощение динамической системы.

Если жесткость звеньев механической системы достаточно велика и собственные частоты парциальных подсистем существенно выше частот внешних возмущений, то деформативность упругих элементов обычно не учитывают и в соответствии с рассматриваемым числом степеней свободы движение системы описывают таким же количеством дифференциальных уравнений второго порядка. Более точные методы редукции упруго-диссипативных систем даны, например, в [24, 25].

В нелинейном случае для составления уравнений движения обычно пользуются уравнениями Лагранжа второго рода, если все связи идеальные и голономные. Итоговое уравнение для двигателя (по рис. 1) с недеформируемыми звеньями и одной степенью свободы будет иметь вид [1]

$$I_{\Pi} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi_1} = M_{\Pi}. \quad (18)$$

Здесь I_{Π} и M_{Π} – приведенные к звену I момент инерции и момент сил (движущих и сопротивления) – для механизма с одной степенью свободы

$$I_{\Pi} = \sum_{i=1}^n m_i u_{i1}^2 + \sum_{j=1}^{\ell} I_j u_{j1}^2; \quad M_{\Pi} = \sum_{k=1}^r M_k u_{k1} + \sum_{q=1}^s P_q u_{q1}. \quad (19)$$

В (19) u_{i1} , а также u_{j1}, u_{k1} – кинематические передаточные функции между звеньями i , а также j, k и выходным звеном I , равные отношению скоростей (угловых или линейных) перечисленных звеньев к скорости выходного звена I (ввиду голономности системы u_{vw} являются функциями обобщенной координаты, в данной системе – φ_1). В рассматриваемом случае

$$u_{i1} = \dot{x}_i / \dot{\varphi}_1, \quad u_{j1} = \dot{\varphi}_j / \dot{\varphi}_1, \quad u_{q1} = \dot{x}_q / \dot{\varphi}_1, \quad (20)$$

где m_i – массы поступательно или плоскопараллельно движущихся звеньев; I_i – моменты инерции звеньев, участвующих во вращательном движении; M_k – моменты движущих сил и сил сопротивления; P_k – внешние усилия, действующие на поступательно движущиеся звенья.

Входящий в (18) множитель определяется равенством

$$\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi_1} = 2 \sum_{i=1}^n m_i u_{i1} u'_{i1} + 2 \sum_{j=1}^{\ell} I_j u_{j1} u'_{j1}, \quad (21)$$

где

$$u'_{i1} = \frac{d}{d\varphi_1} u_{i1}; \quad u'_{j1} = \frac{d}{d\varphi_1} u_{j1}.$$

Если передаточные функции u_{vw} постоянны, то их производные по координате φ_1 равны нулю ($u'_{vw} = 0$) и соответствующие члены в (21) не учитываются.

Вследствие нелинейностей u_{i1} и u'_{i1} , связанных с наличием косо́й шайбы (и аналогов шарниров Гука), единственно приемлемым для решения дифференциального уравнения (18) является численный метод с использованием современных ЭВМ. Недостатком уравнения (18) является то, что оно распространяется только на системы с идеальными связями и непосредственно не включает реакции связей, знание которых необходимо для расчета надежности и долговечности двигателя, а также механического КПД. Поэтому для отмеченных целей целесообразно использование уравнений Лагранжа первого рода. Применительно к рассматриваемому двигателю как системе последовательно соединенных недеформируемых звеньев полученное таким образом уравнение с неидеальной связью в кинематической паре, образованной звеньями a и b [19], имеет вид

$$I_a (\lambda_{\theta,a} + \eta_{ba}^*) \ddot{\varphi}_a = M_a (\lambda_{ba} + \eta_{ba}^*) - I_b u_{ba} u'_{ba} \dot{\varphi}_a^2. \quad (22)$$

В уравнении (22) φ_a – угол поворота звена a ; I_a и I_b – приведенные к звеньям a и b моменты инерции подсистемы звеньев $1, \dots, a$ и b, \dots, k , где 1 и k – начальное и конечное звено полной системы машины; M_a и M_b – приведенные к звеньям a и b моменты внешних сил, действующих на подсистему $1, \dots, a$ и b, \dots, k , соответственно; u_{ba} – кинематическая передаточная функция ($u_{ba} = \dot{\varphi}_b / \dot{\varphi}_a$); инерционный параметр $\lambda_{\theta,a} = I_b u_{ba}^2 / I_a$; силовой параметр $\lambda_{ba} = M_b u_{ba} / M_a$; η_{ba}^* – коэффициент полезного действия в неидеальной кинематической паре a, b с трением [19] в тяговом режиме (определяется на основании отношения виртуальных мощностей N обобщенных реакций в неидеальной кинематической паре при произвольно заданной внешней нагрузке)

$$\frac{N_{ab}}{N_{ba}} = -\eta_{ba}^*. \quad (23)$$

Мощности N_{ab} и N_{ba} обобщенных реакций в условно расчлененной кинематической паре при ведущем a и ведомом b звеньях, определяются согласно зависимостей

$$N_{ab} = R_{ab} \dot{q}_b; \quad N_{ba} = R_{ba} \dot{q}_a, \quad (24)$$

где R_{ij} – обобщенная реакция, действующая со стороны звена i на j ; \dot{q}_a, \dot{q}_b – обобщенные скорости звеньев a и b . В неидеальных кинематических парах всегда $R_{ab} \neq R_{ba}$ и $N_{ab} \neq N_{ba}$.

В зависимости от знака произведения $M_a \dot{\varphi}_a$, указывающего на то, какое из звеньев (a или b) является ведущим, имеем

$$\eta_{ba}^* = \begin{cases} \eta_{ba}; & M_a \dot{\varphi}_a \geq 0; \\ \frac{1}{\eta_{ab}}; & M_a \dot{\varphi}_a < 0. \end{cases} \quad (25)$$

В (25) η_{ba} и η_{ab} – коэффициенты полезного действия, соответственно, при ведущих a и b звеньях; как правило, они отличаются по величине.

Обобщенные реакции в кинематической паре a, b определяются из зависимостей [19]

$$M_{ab} = \frac{M_a (\lambda_{\theta,a} - \lambda_{ba}) \eta_{ba}^*}{u_{ba} (\eta_{ba}^* + \lambda_{\theta,a})}, \quad M_{ba} = - \frac{M_{ab} u_{ba}}{\eta_{ba}^*}. \quad (26)$$

Если необходимо рассматривать две неидеальные кинематические пары в системе, например, a, b и c, d , то угловая скорость и координата звена a вынужденных колебаний могут быть решением [20] следующего дифференциального уравнения:

$$I_{np}\ddot{\varphi}_a = -A\dot{\varphi}_a^2 + M_{np}, \quad (27)$$

где приведенный к звену a момент инерции I_{np} всей динамической системы, а также приведенный момент внешних сил M_{np} и коэффициент A имеют вид

$$\begin{aligned} I_{np} &= I_a + (I_b + I_c) \frac{u_{ba}^2}{\eta_{ba}^*} + \frac{I_d}{\eta_{ba}^* \eta_{dc}^*} u_{dc}^2 u_{ba}^2; \\ M_{np} &= M_a + \frac{(M_b + M_c) u_{ba}}{\eta_{ba}^*} + \frac{M_d u_{ba} u_{dc}}{\eta_{ba}^* \eta_{dc}^*}; \\ A &= \frac{u_{ba} u'_{ba}}{\eta_{ba}^*} + \frac{u_{dc} u'_{dc} u_{ba}^2 + u_{dc}^2 u_{ba} u'_{ba}}{\eta_{ba}^* \eta_{dc}^*}. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28) принято: I_i – приведенные к i -му звену, (т.е. к a, b, c, d), образующему совместно со звеном $i+1$ неидеальную кинематическую пару, моменты инерции связанных с i -ми звеньями кинематических цепей с идеальными связями; M_i – действующие на i -е звенья приведенные моменты внешних сил; u_{ba}, u_{dc} – кинематические передаточные функции между звеньями b и a , d и c , соответственно, равные отношению угловых скоростей ω_b к ω_a и ω_d к ω_c ; u'_{ba} и u'_{dc} – частные производные по координате φ_a ; η_{ba} и η_{dc} – коэффициенты полезного действия в неидеальных кинематических парах, соответственно, при ведущих a и c звеньях.

Для определения реакции в неидеальных кинематических парах имеем формулы

$$\begin{aligned} M_{ba} &= \frac{I_a}{I_{np}} (A\dot{\varphi}_a^2 + M_{np}) - M_a; \quad M_{ab} = -\frac{M_{ba} \eta_{ba}^*}{u_{ba}}; \\ M_{cd} &= \frac{I_d}{I_{np}} \left\{ \dot{\varphi}_a^2 \left[-A u_{bc} u_{dc} + I_{np} (u'_{ba} u_{dc} + u_{ba} u'_{bc}) \right] + u_{bc} u_{dc} M_{np} \right\} - M_d; \\ M_{dc} &= -\frac{M_{cd} u_{dc}}{\eta_{dc}^*}. \end{aligned} \quad (29)$$

Как следует из (22) и (28), в системе с трением в кинематических парах в рабочем режиме приведенный момент инерции I_{np} формально выше, чем при отсутствии трения, что отмечено в [2, 8]. При торможении этот момент инерции оказывается формально меньше, чем в системе без трения.

Следует отметить, что при существенном значении приведенного коэффициента трения скольжения в кинематической паре a, b вместо одного из двух тяговых режимов движения (с η_{ba} или $1/\eta_{ba}$) может возникнуть режим оттормаживания [11, 14, 17, 20], при котором отношение (23) приведенных мощностей и реакций Q_{ab} и Q_{ba} в неидеальной кинематической паре равно некоторому положительному коэффициенту оттормаживания ξ_{ba} ; $Q_{ab} u_{ba} / Q_{ba} = \xi_{ba}$.

Для определения в первом приближении механического коэффициента полезного действия дизеля необходимо использовать уравнения (22) или (27) с трением на элементах кинематических пар.

Описание более сложных, последовательно соединенных кинематических цепей с одной степенью свободы и несколькими неидеальными кинематическими парами может быть сведено к уравнению (27) после того, как общую цепь расчленим по неидеальным парам с приложением реакций вида (26), затем выразить координаты звеньев по проведенным сечениям через принятую обобщенную координату и из полученной системы уравнений определить реакции и ускорение системы в функции приложенных внешних нагрузок, а также скорости и параметров системы. Этот же подход применим для определения реакций в идеальных связях (т.е. без трения) при этом производится расчленение цепи по кинематической паре, а коэффициенты полезного действия принимаются равными единице.

В результате решения уравнения движения при установившемся режиме возможно определить усредненный механический коэффициент полезного действия $\eta_{оес}^{ср}$ двигателя в пределах полного оборота выходного вала

$$\eta_{оес}^{ср} \approx \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{M_1 \dot{\varphi}_1 dt}{\sum_i (P_{\Pi_i} v_{\Pi_i})}. \quad (30)$$

Здесь $T_2 - T_1$ – интервал времени, соответствующий повороту вала I на угол, кратный 2π ; P_{Π_i} и v_{Π_i} – текущие усилия, действующие на поршни, и линейные скорости их движения.

§4. Модельный пример.

В качестве примера возможности использования разработанной модели для анализа динамических процессов примем систему по рис. 1 со следующими параметрами: $I_1 = 1 \text{ кгм}^2$, $m_5 = 6 \text{ кг}$, $m_7 = 1 \text{ кг}$, $I_9 = 0,3 \text{ кгм}^2$, $I_{13} = 0,3 \text{ кгм}^2$, $\alpha = 21,4^\circ$, $R = 0,136 \text{ м}$, $\psi^* = 0,001$.

Принято последовательно работающих 4 поршня ($i = 4$), усилия P_i давления газов, действующие на каждый из них, сформированы в форме смещенных на угол $2\pi/i$ трапеций;

$$P_i = \begin{cases} 0; & \pi \left(-1 + \frac{i-1}{2} \right) + 2n \leq \varphi_1 < \pi \left(\frac{i-1}{2} + 2n \right); \\ k \left[\varphi_1 - \pi \left(\frac{i-1}{2} + 2n \right) \right]; & \pi \left(\frac{i-1}{2} + 2n \right) \leq \varphi_1 < \pi \left(\frac{i-1}{2} + 2n \right) + \varphi_1^*; \\ k \varphi_1^*; & \varphi_1^* + \pi \left(\frac{i-1}{2} + 2n \right) \leq \varphi_1 < \pi \left(\frac{i+1}{2} + 2n \right) - \varphi_1^*; \\ k \left[\varphi_1 - \pi \left(\frac{i+1}{2} + 2n \right) - \varphi_1^* \right]; & \pi \left(\frac{i+1}{2} + 2n \right) - \varphi_1^* \leq \varphi_1 < \pi \left(\frac{i+1}{2} + 2n \right) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; n = 0, 1, 2, 3, \dots, n_k),$$

где n – номер цикла движения i -го поршня, кратный углу поворота вала 1 на угол $\varphi_1 = 2\pi$ от начала первого импульса движения; φ_1^* – константа.

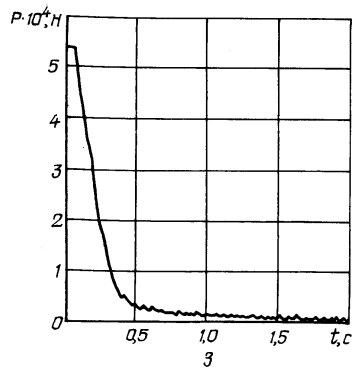
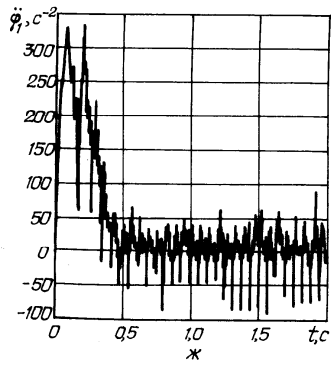
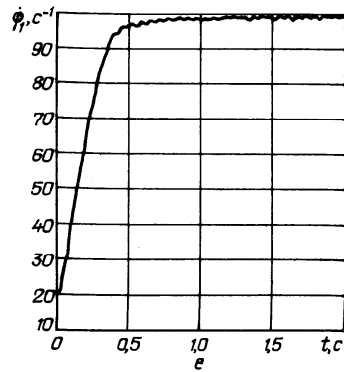
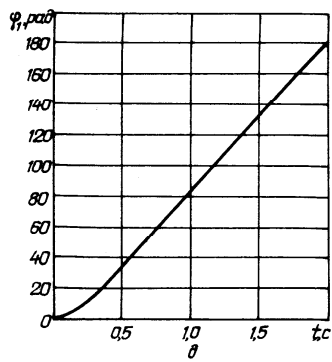
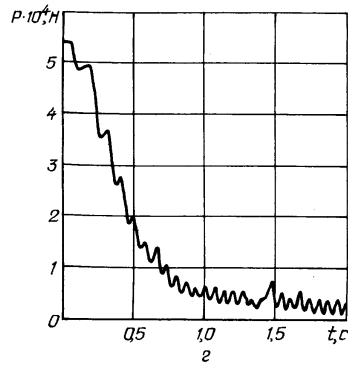
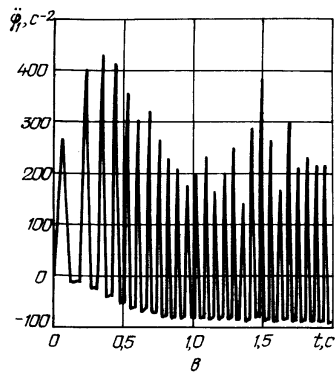
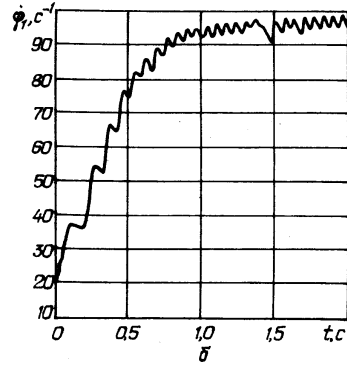
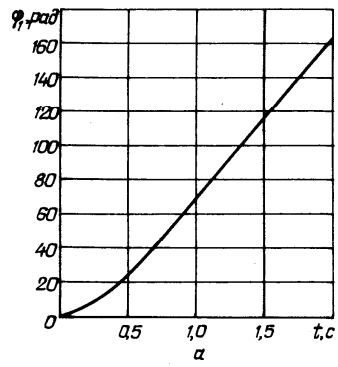


Рис. 5

Входящий в P_i коэффициент k задан зависимостью $k = b_k P_0 / \psi^*$, где P_0 – приведенное усилие с учетом регулятора скорости, принятое в виде

$$P_i = \begin{cases} P_0(a_p - b_p \omega_a); & 0 \leq \dot{\varphi}_1 < \omega_a; \\ P_0(a_p - b_p \dot{\varphi}_1); & \omega_a \leq \dot{\varphi}_1 < \omega_{1c}; \\ 0; & \omega_{1c} \leq \dot{\varphi}_1; \end{cases}$$

параметры ω_a и ω_{1c} – постоянные значения скоростей: на изломе характеристики P_i и максимальное ее значение ($\omega_a < \omega_{1c}$). Коэффициенты a_p и b_p : $a_p = \frac{P_0 \omega_{1c}}{\omega_{1c} - \omega_a}$, $b_p = \frac{P_0}{\omega_{1c} - \omega_a}$, $P_0 = \frac{M_{1,kp}}{r \sin \alpha \cos \alpha}$, $M_{1,kp}$ – ориентировочное статическое значение момента сил сопротивления на валу l . Этот момент в рассматриваемом примере принят в виде $M_{1,kp} = -K_M \dot{\varphi}_1^2 \text{sign} \dot{\varphi}_1$, где K_M – постоянная величина.

Влияние термодинамических процессов и расширения газов в камерах сгорания не учитывались. Начальные условия: $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 10 \text{ c}^{-1}$. Результаты численного исследования на ЭВМ при разгоне данной системы, проведенного с использованием прикладного программного пакета MATLAB, представлены графически: на рис. 5, а – з – для двигателя с одной ($i = 1$) и 5, д, е, ж, з – с четырьмя ($i = 4$) цилиндропоршневыми группами. Как и ожидалось, существенно более плавный характер протекания динамических процессов имеет место при $i = 4$, особенно для скорости ($\dot{\varphi}_1$), углового ускорения ($\ddot{\varphi}_1$) и усилия (P_i) в цилиндро-поршневой группе двигателя.

Заключение.

В данной статье предложена математическая модель и представлены результаты исследования структуры, кинематики и динамики дизельного двигателя с косыми шайбами. Разработана структурная схема кинематической цепи статически определимой силовой системы двигателя. Получены кинематические соотношения с учетом наличия шарниров Гука и косых шайб. Составлена математическая модель динамической системы двигателя. Приведен пример численных исследований кинематики и динамических процессов двигателя.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано математичну модель і наведено результати дослідження структури, кінематики та динаміки дизельного двигуна з косими шайбами. Розроблено структурну схему кінематичної ланки статично визначеної силової системи двигуна. Одержано кінематичні співвідношення з урахуванням наявності шарнірів Гука і косих шайб. Описано математичну модель динамічної системи двигуна. Розглянуто числовий приклад та досліджено кінематику та динамічні процеси двигуна.

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
2. Баранов Г.Г. К вопросу о приведении масс и сил с учетом потерь на трение // Тр. Ин-та машиноведения. – 1952. – 12, вып. 47. – С. 46 – 51.
3. Баранов Г.Г. Крутильные колебания // Вестн. металлопромышленности. – 1931. – № 10. – С. 60 – 76; № 11. – С. 2 – 15.
4. Бужгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1969. – 468 с.
5. Джодж А. Быстроходные дизели. – М.: ОНТИ, 1938. – 308 с.
6. Добровольский В.В. Теория сферических механизмов. – М.: Гос. научн.-техн. изд-во машиностроительной лит-ры, 1947. – 232 с.
7. Дяченко В.Г. Двигуни внутрішнього згорання. – Харків: НТУ «ХПУ», 2008. – 488 с.

8. *Кожневиков С.Н.* Динамика нестационарных процессов в машинах. – К.: Наук. думка, 1986. – 288 с.
9. *Кожневиков С.Н., Есипенко Я.И., Раскин Я.М.* Механизмы. – М.: Машиностроение. – 1976. – 784 с.
10. *Кожневиков С.Н.* Основания структурного синтеза механизмов. – К.: Наук. думка, 1979. – 232 с.
11. *Колчин Н.И.* К вопросу динамики самотормозящихся систем // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1965. – № 254. – С. 5 – 13.
12. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
13. *Машиностроение.* Энциклопедический справочник / Под ред. Е.А. Чудакова. Раздел 4. Конструирование машин. Т. 10. – М.: Гос. научн.-техн. изд-во машиностр. лит., 1948. – 403 с.
14. *Нелинейные задачи динамики и прочности машин* / Под ред. В.Л. Вейца. – Л.: Из-во Ленингр. ун-та, 1963. – 336 с.
15. *Патент* Российской Федерации на изобретение № 2125162, 20 января 1999 г. Поршневой двигатель Сахарнова. (Сахарнов В.А., Шведов Л.Ф., Галян Б.А., Гольдман А.Б., Яковец С.А., Коваль Н.И.).
16. *Патент* України на винахід № 22541А, 17.03.98. Аксиально-поршневий двигун Сахарнова. (Сахарнов В.О., Шведов Л.Ф., Галян Б.О., Гольдман О.Б., Яковец С.О., Коваль М.Й.).
17. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. – М.: ГИИТЛ, 1954. – 316 с.
18. *Решетов Л.Н.* Самоустанавливающиеся механизмы. – М.: Машиностроение, 1979. – 334 с.
19. *Antonyuk E.Ya.* On Models of Dynamic Systems with Dry Friction // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 5. – P. 554 – 559.
20. *Avramov K.V.* Using Nonlinear Normal Modes to Analyze Forced Vibrations // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P. 1405 – 1412.
21. *Larin V.B.* On stabilization of System with Delay // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1148 – 1160.
22. *Larin V.B.* Control of a Compound Wheeled Vehicle with Two Steering Wheels // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P. 1413 – 1420.
23. *Martynuk A.A., Nikitina N.V.* On Chaotic Motions System with Dry Friction // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1056 – 1064.
24. *Moore B.C.* Principal component analysis in linear systems: controllability and model reduction // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – **AC-26**, N 1. – P. 17 – 32.
25. *Nimityongskul S., Kammer D.S.* Frequency domain model reduction based on principal component analysis // Mech. Systems and Signal Processing. – 2010. – **24**. – P. 41 – 51.

Поступила 23.12.2009

Утверждена в печать 15.06.2010