Н.А.Шульга [1], **А.И.Безверхий** [2], **О.И.Макиевский** [3]

О РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТАХ УПРУГОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

[1–3] *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,*
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина,
e-mail: [1, 3] *electr@inmech.kiev.ua;* [2] *o_bezver@ukr.net;*

Abstract. The harmonic elastoelectric vibrations of a thin ring plate are considered. An effect of boundary conditions on the natural frequencies is studied. The asymptotic properties of the frequency spectrum are established. A dependence of the resonance frequencies, current anti-resonance, dynamical coefficient of electro-magnetic coupling on the relative size of plate is analyzed.

Key words: piezoceramic plate, resonance and anti-resonance frequencies, asymptotics of frequency spectrum.

Введение.

Пьезоэлектрические тонкостенные конструктивные элементы круглой формы используются в ультразвуковых устройствах разного функционального назначения. Осесимметричные радиальные колебания тонких пьезокерамических дисков и кольцевых пластин с толщинной поляризацией, начиная со статьи [12], изучены во многих работах [1, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14]. Однако, систематический анализ влияния условий закрепления краев пластины на резонансные частоты колебаний отсутствуют. Этому вопросу и посвящено настоящее исследование.

В данной статье установлены асимптотические свойства частотного спектра и показано, что уже при низких частотах с допустимой погрешностью их можно определить по простым асимптотическим формулам. Выяснено также, какие из условий закрепления соответствуют более жесткой механической системе. Выяснена зависимость частот резонанса, антирезонанса тока, а также динамического коэффициента электромеханической связи (КЭМС) от относительного размера пластины.

§1. Постановка задачи.

Тонкую пьезокерамических пластину толщиной h отнесем к цилиндрической системе координат $or\theta z$, координатная плоскость $z=0$ которой совпадает со срединной плоскостью пластины. При осесимметричных колебаниях пластины с толщинной поляризацией воспользуемся [5, 7] материальными соотношениями в форме

$$\varepsilon_r = s_{11}^E\sigma_r + s_{12}^E\sigma_\theta + s_{13}^E\sigma_z + d_{13}E_z;$$
$$\varepsilon_\theta = s_{21}^E\sigma_r + s_{11}^E\sigma_\theta + s_{13}^E\sigma_z + d_{13}E_z;$$
$$\varepsilon_z = s_{31}^E\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) + s_{33}^E\sigma_z + d_{33}E_z;$$
$$D_z = d_{31}\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) + d_{33}\sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z. \qquad (1.1)$$

Если тонкая пьезокерамическая пластина с электродированными лицевыми плоскостями $z=\pm h/2$ находится в условиях плоского напряженного состояния, то, приняв [5, 7] гипотезы $u_r = u_r(r,t)$, $u_\theta = 0$, $\sigma_z = 0$, $E_z = E_z(r,t)$, из соотношений (1.1) получим формулы

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)\, d_{31} E_z\right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)\, d_{31} E_z\right), \tag{1.2}$$

в которых использованы формулы для деформаций в цилиндрических координатах и $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$.

Из трех уравнений колебаний в цилиндрических координатах в случае осесимметричной плоской задачи используется [6, 8] только одно

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \tag{1.3}$$

При электродированных лицевых плоскостях тонкая пластина находится между эквипотенциальными поверхностями и электрическое поле в ней можно принять независимым от координат r, θ. В таком случае, подставляя (1.2) в (1.3), получаем уравнение колебаний относительно перемещения $u_r(r,t)$ в виде

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1-\nu_E^2)\, s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \tag{1.4}$$

При неэлектродированных лицевых плоскостях пластины из пьезокерамики как диэлектрика с большой относительной диэлектрической постоянной, электрические граничные условия при $z = \pm h/2$ имеют вид [6, 8] $D_z(r, \theta, z = \pm h/2,\ t) = 0$. Поскольку пластина является тонкой, то можно принять $D_z = 0$ по всему объему пластины. Тогда из материальных зависимостей (1.1), пренебрегая σ_z и определив из четвертого уравнения (1.1) $E_z = -(\sigma_r + \sigma_\theta)\, d_{31} / \varepsilon_{33}^T$ и подставив это значение E_z в первые два уравнения (1.1), получим

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^D(1-\nu_D^2)}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_D \frac{u_r}{r}\right); \quad \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^D(1-\nu_D^2)}\left(\nu_D \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right). \tag{1.5}$$

В этих формулах используются такие зависимости для постоянных материала:

$$s_{11}^D = s_{11}^E - d_{31}^2 / \varepsilon_{33}^T, \quad s_{12}^D = s_{12}^E - d_{31}^2 / \varepsilon_{33}^T, \quad \nu_D = -s_{12}^D / s_{11}^D. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) в (1.3), получим уравнение относительно $u_r(r,t)$ в виде

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1-\nu_D^2)\, s_{11}^D\, \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \tag{1.7}$$

которое только коэффициентом отличаются от уравнения (1.4).

§2. Радиальные электромеханические колебания кольцевой пластины (кольца).

Рассмотрим поляризуемую по толщине тонкую кольцевую пьезокерамическую пластину с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r_1, покрытую на лицевых плоскостях тонкими электродами. При гармонических колебаниях $u_r(r,t) = \mathrm{Re}\, u_r^a(r) \exp i\tilde{\omega} t$ с циклической частотой $\tilde{\omega}$ решение уравнения (1.4) относительно амплитуды перемещение $u_r^a(r)$ выражается [6] через цилиндрические функции Бесселя первого и второго рода первого порядка

$$u_r^a(r) = ARJ_1(k_E r) + BRY_1(k_E r). \tag{2.1}$$

где $k_E^2 = (1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho \tilde{\omega}^2$.

Пользуясь (2.1), (1.2), находим следующие выражения для напряжений σ_r, σ_θ:

$$\sigma_r = \mathrm{Re}\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(Aa_1(k_Er)+Bb_1(k_Er)-(1+\nu_E)d_{13}E_z^a\right)e^{i\omega t};$$

$$\sigma_\theta = \mathrm{Re}\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(Aa_2(k_Er)+Bb_2(k_Er)-(1+\nu_E)d_{13}E_z^a\right)e^{i\omega t}, \qquad (2.2)$$

где E_z^a – амплитуда напряженности электрического поля, $E_z = \mathrm{Re}\,E_z^a \exp i\omega t$ и использованы обозначения:

$$a_1(k_Er) = k_ERJ_0(k_Er)-(1-\nu_E)\frac{R}{r}J_1(k_Er);$$

$$b_1(k_Er) = k_ERY_0(k_Er)-(1-\nu_E)\frac{R}{r}Y_1(k_Er);$$

$$a_2(k_Er) = \nu_Ek_ERJ_0(k_Er)+(1-\nu_E)\frac{R}{r}J_1(k_Er);$$

$$b_2(k_Er) = \nu_Ek_ERY_0(k_Er)+(1-\nu_E)\frac{R}{r}Y_1(k_Er). \qquad (2.3)$$

Рассмотрим возможные варианты граничных условий при $r = r_0$ и $r = r_1$.

При граничных условиях на свободных краях кольца

$$\sigma_r(r_0,t)=0; \quad \sigma_r(r_1,t)=0, \qquad (2.4)$$

пользуясь формулами (2.1) для напряжений, получаем систему алгебраических уравнений

$$Aa_1(k_Er_0)+Bb_1(k_Er_0)=(1+\nu_E)d_{13}E_z^a; \quad Aa_1(k_Er_1)+Bb_1(k_Er_1)=(1+\nu_E)d_{13}E_z^a, \qquad (2.5)$$

из которой находим постоянные интегрирования

$$A=(1+\nu_E)d_{13}E_z^a\left(b_1(k_Er_1)-b_1(k_Er_0)\right)\Delta_{\sigma\sigma}^{-1};$$

$$B=(1+\nu_E)d_{13}E_z^a\left(a_1(k_Er_0)-a_1(k_Er_1)\right)\Delta_{\sigma\sigma}^{-1}, \qquad (2.6)$$

где определитель имеет вид

$$\Delta_{\sigma\sigma}=a_1(k_Er_0)b_1(k_Er_1)-a_1(k_Er_1)b_1(k_Er_0). \qquad (2.7)$$

Из формул (2.1), (2.2), (2.6) следует, что резонансные частоты определяются из частотного уравнения

$$a_1(k_Er_0)b_1(k_Er_1)-a_1(k_Er_1)b_1(k_Er_0)=0. \qquad (2.8)$$

При высоких частотах, пользуясь асимптотическими формулами для цилиндрических функций [3, 6]

$$J_n(z)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right); \quad Y_n(z)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \qquad (2.9)$$

для частотного уравнения (2.8) находим асимптотическое выражение

$$\frac{2k_ER^2}{\pi\sqrt{r_0r_1}}\sin k_E(r_1-r_0)\approx 0. \qquad (2.10)$$

Это значит, что с увеличением частот свободных колебаний их можно определить по асимптотической формуле

$$k_E R = \frac{(n-1)\pi R}{r_1 - r_0}, \tag{2.11}$$

в которой целое число $n >> 1$. Частотный спектр (2.11) отвечает колебаниям за радиальными формами, когда на ширине кольца $r_1 - r_0$ укладывается целое число полуволн (полуволновые колебания). Такое свойство частотного спектра без теоретического обоснования было отмечено в статье [4].

При внутреннем жестко закрепленном и внешнем свободном краях кольца

$$u_r(r_0, t) = 0; \quad \sigma_r(r_1, t) = 0 \tag{2.12}$$

постоянные интегрирования определяются из алгебраической системы

$$AJ_1(k_E r_0) + BY_1(k_E r_0) = 0; \quad Aa_1(k_E r_1) + Bb_1(k_E r_1) = (1+\nu_E) d_{13} E_z^a, \tag{2.13}$$

и имеют такой вид:

$$A = -(1+\nu_E) d_{13} E_z^a Y_1(k_E r_0) \Delta_{u\sigma}^{-1}, \; B = (1+\nu_E) d_{13} E_z^a J_1(k_E r_0) \Delta_{r_2}^{-1}, \tag{2.14}$$

где для определителя $\Delta_{u\sigma}$ имеем выражение

$$\Delta_{r_2} = J_1(k_E r_0) b_1(k_E r_1) - Y_1(k_E r_0) a_1(k_E r_1). \tag{2.15}$$

Из формул (2.1), (2.2), (2.14) следует, что резонансные частоты определяются из частотного уравнения

$$J_1(k_E r_0) b_1(k_E r_1) - Y_1(k_E r_0) a_1(k_E r_1) = 0. \tag{2.16}$$

При высоких частотах, пользуясь асимптотическими формулами (2.9) для цилиндрических функций, для частотного уравнения (2.16) находим асимптотическое выражение

$$\frac{2R}{\pi\sqrt{r_0 r_1}} \cos k_E (r_1 - r_0) \approx 0. \tag{2.17}$$

Это значит, что с увеличением частот свободных колебаний их можно определить по асимптотической формуле

$$k_E R = \frac{R(2n-1)\pi/2}{r_1 - r_0}, \tag{2.18}$$

в которой целое число $n >> 1$. Частотный спектр (2.18) отвечает колебаниям по радиальным формам, когда на ширине кольца $r_1 - r_0$ укладывается нечетное число четвертей волны (четвертные колебания).

При свободном внутреннем крае и закрепленном внешнем крае

$$\sigma_r(r_0, t) = 0; \quad u_r(r_1, t) = 0. \tag{2.19}$$

постоянные интегрирования находятся из системы алгебраических уравнений

$$Aa_1(k_E r_0) + Bb_1(k_E r_0) = (1+\nu_E) d_{13} E_z^a; \quad AJ_1(k_E r_1) + BY_1(k_E r_1) = 0, \tag{2.20}$$

и имеют вид

$$A = (1+\nu_E) d_{13} E_{za} Y_1(k_E r_1) \Delta_{r_3}^{-1}; \quad B = -(1+\nu_E) d_{13} E_{za} J_1(k_E r_1) \Delta_{\sigma u}^{-1}; \tag{2.21}$$

$$\Delta_{\sigma u} = a_1(k_E r_0) Y_1(k_E r_1) - b_1(k_E r_0) J_1(k_E r_1). \tag{2.22}$$

Из формул (2.1), (2.2), (2.21) следует, что резонансные частоты определяются из частотного уравнения

$$a_1\left(k_E r_0\right)Y_1\left(k_E r_1\right)-b_1\left(k_E r_0\right)J_1\left(k_E r_1\right)=0\,. \tag{2.23}$$

При высоких частотах, используя асимптотические формулы (2.9), для частотного уравнения (2.23) находим асимптотическое выражение

$$\frac{2R}{\pi\sqrt{r_0 r_1}}\cos k_E\left(r_1-r_0\right)\approx 0, \tag{2.24}$$

которое совпадает с (2.17). Это значит, что с увеличением частот свободных колебаний их можно определить по асимптотической формуле

$$k_E R=\frac{R\left(2n-1\right)\pi/2}{r_1-r_0}, \tag{2.25}$$

в которой целое число $n>>1$. Частотный спектр (2.25), как и частотный спектр (2.18), отвечает колебаниям за радиальными формами, когда на ширине кольца r_1-r_0 укладывается нечетное число четвертей волны (четвертные колебания). Отметим, что асимптотические значения собственных частот колебаний при граничных условиях (2.12) и (2.19), как это следует из формул (2.25) и (2.18), совпадают.

При колебаниях деформируемого тела наряду с резонансными частотами могут появляться частоты, при которых какая-либо из полевых функций превращается в нуль. Такие частоты принято называть антирезонансными частотами соответствующей полевой функции. В электроупругости важное значение имеют антирезонансные частоты тока проводимости.

Для их определения находим амплитуду тока проводимости через электродированное кольцо $r_0<r<r_1$

$$I^a=-i\omega\frac{2\pi R d_{13}}{s_{11}^E\left(1-\nu_E\right)}\Big[A\left(r_1J_1\left(k_E r_1\right)-r_0J_1\left(k_E r_0\right)\right)+$$

$$+B\left(r_1Y_1\left(k_E r_1\right)-r_0Y_1\left(k_E r_0\right)\right)\Big]+i\omega\pi\left(r_1^2-r_0^2\right)h^{-1}\varepsilon_{33}^T U\left(1-k_p^2\right), \tag{2.26}$$

где $\pi(r_1^2-r_0^2)h^{-1}\varepsilon_{33}^T=C^T$ – диэлектрическая емкость пластины, $2d_{13}^2/(1-\nu_E)s_{11}^E\varepsilon_{33}^T=k_p^2$ – планарный КЭМС [1, 2]; U – разность потенциалов на электродах при $E_z^a=-Uh^{-1}$.

Пользуясь формулой (2.26) и значениями постоянных интегрирования при различных граничных условиях (2.4), (2.12), (2.19), которые сокращенно представим в виде

$$A=\left(1+\nu_E\right)d_{13}E_z^a a\left(k_E R\right);\quad B=\left(1+\nu_E\right)d_{13}E_z^a b\left(k_E R\right), \tag{2.27}$$

для проводимости при различных граничных условиях получим следующую формулу:

$$Y=i\omega C^T\left(1-k_p^2+\frac{Rk_p^2}{r_1^2-r_0^2}(1+\nu_E)\big[a(k_E R)\left(r_1J_1(k_E r)-r_0J_1(k_E r_0)\right)+\right.$$

$$\left.+b(k_E R)\left(r_1Y_1(k_E r_1)-r_0Y_1(k_E r_0)\right)\big]\right). \tag{2.28}$$

Таким образом, антирезонанс тока $I^a=YU$ определяется из условия равенства проводимости нулю

$$Y\equiv i\omega C^T\left(1-k_p^2+\frac{Rk_p^2}{r_1^2-r_0^2}(1+\nu_E)\big[a(k_E R)\left(r_1J_1(k_E r_1)-r_0J_1(k_E r_0)\right)+\right.$$

$$+b(k_E R)\left(r_1 Y_1(k_E r_1) - r_0 Y_1(k_E r_0)\right)\Big]\Bigg) = 0. \tag{2.29}$$

При обоих жестко закрепленных краях

$$u_r\left(r_0, t\right) = 0; \quad u_r\left(r_1, t\right) = 0 \tag{2.30}$$

из соответствующей системы алгебраических уравнений

$$AJ_1\left(k_E r_0\right) + BY_1\left(k_E r_0\right) = 0; \quad AJ_1\left(k_E r_1\right) + BY_1\left(k_E r_1\right) = 0 \tag{2.31}$$

следует, что вынужденные колебания в этом случае электрическим потенциалом не возбуждаются, а частоты свободных (собственных) колебаний определяются из равенства нулю

$$J_1\left(k_E r_0\right) Y_1\left(k_E r_1\right) - Y_1\left(k_E r_0\right) J_1\left(k_E r_1\right) = 0 \tag{2.32}$$

определителя системы (2.31) $\Delta_{uu} = J_1\left(k_E r_0\right) Y_1\left(k_E r_1\right) - Y_1\left(k_E r_0\right) J_1\left(k_E r_1\right)$.

При высоких частотах, пользуясь асимптотическими формулами (2.9) для цилиндровых функций для частотного уравнения (2.32) находим асимптотическое выражение

$$\frac{2}{\pi k_E \sqrt{r_0 r_1}} \sin k_E\left(r_1 - r_0\right) \approx 0. \tag{2.33}$$

Это значит, что с увеличением частот свободных колебаний их можно определить по асимптотической формуле

$$k_E R = \frac{\pi n R}{r_1 - r_0}, \tag{2.34}$$

в которой целое число $n >> 1$. Частотный спектр (2.8) отвечает колебаниям по радиальным формам, когда на ширине кольца $r_1 - r_0$ укладывается целое число полуволн (полуволновые колебания).

§3. Анализ результатов.

Результаты расчетов резонансных частот для кольцевых пластин $r_0 < r < r_1 = R$ из пьезокерамики ЦТС-19 при физико-механических параметрах [2] $\rho = 7740\,\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $s_{11}^E = 15{,}2\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $s_{12}^E = 5{,}8\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$ $s_{13}^E = -5{,}3\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $s_{33}^E = 16{,}9\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $s_{44}^E = 42{,}6\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $d_{13} = -125\cdot 10^{-12}\,\text{Кл}\cdot\text{Н}^{-1}$, $d_{33} = 304\cdot 10^{-12}\,\text{Кл}\cdot\text{Н}^{-1}$ $d_{51} = 450\cdot 10^{-12}\,\text{Кл}\cdot\text{Н}^{-1}$, $\varepsilon_{11}^T = 1490\varepsilon_0$, $\varepsilon_{33}^T = 1380\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\Phi\cdot\text{м}^{-1}$ для различных условий закрепления и отношении радиусов $r_0/R = 0{,}35$ приведены в табл. 1.

В табл. 1 для каждой частоты (N) указаны точные (над чертой) и асимптотические (под чертой) значения. Из результатов таблицы следует, что кольцевая пластина с закрепленной внешней границей (условия (2.19)) является более жесткой механической системой, чем с закрепленной внутренне границей (условия (2.12)), хотя при граничных условиях (2.12) и (2.19) собственные частоты, за исключением первых двух частот, практически совпадают.

Как ранее отмечалось электромеханические колебания, при жестком закреплении обоих краёв (граничные условия (2.30)), не возбуждаются. Собственные частоты при жестком закреплении обоих краёв (2.30) согласно проведенным расчетам по (2.32) имеют значение: 5,4277, 10,5707, 15,7642, 20,9744, 26,1917, 31,4129, 36,6361, 41,8607, 47,0863, а их асимптотические значения вычисленные по (2.35) равны 5,2289, 10,4577, 15,6866, 20,9154, 26,1443, 31,3731, 36,6020, 41,8308, 47,0597.

Таблица 1

N	Граничные условия		
	(2.4)	(2.12)	(2.19)
1	1,6266	2,8073	3,3778
	–	–	–
2	5,5784	7,9602	8,0946
	5,2289	7,8433	7,8433
3	10,6221	13,1479	13,2183
	10,4577	13,0722	13,0722
4	15,7939	18,3564	18,4042
	15,6866	18,3011	18,3011
5	20,9953	23,5734	23,6097
	20,9154	23,5299	23,5299
6	26,2079	28,7945	28,8239
	26,1443	28,7588	28,7588
7	31,4200	34,0179	34,0426
	31,3731	33,9877	33,9877
8	36,6472	39,2428	39,2641
	36,6020	39,2166	39,2166
9	41,8704	44,4686	44,4873
	41,8308	44,4454	44,4454
10	47,0948	49,6950	49,7117
	47,0597	49,6743	49,6743

В зависимости от условий закрепления (граничных условий) первые собственные частоты значительно отличаются – приблизительно в два раза при закреплении по внешнему контуру (условия (2.19)) по отношению к незакрепленным (свободным) краям (условия (2.4)), и более чем в три раза при закреплении по обоим краям (условия (2.30)) по отношению к свободным краям (условия (2.4)). С ростом номера частоты отличие в собственных частотах уменьшается до 5% для десятой частоты. Асимптотические формулы дают хорошее(с точностью до 5%) приближение уже для третьих частот.

Для пьезокерамических кольцевых пластин из PZT-4 при физико-механических параметрах [2, 5] $\rho = 7500\,\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $s_{11}^E = 12{,}3\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $s_{12}^E = -4{,}05\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$ $s_{13}^E = -5{,}31\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $s_{33}^E = 15{,}5\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $s_{44}^E = 39{,}0\cdot 10^{-12}\,\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$, $d_{13} = -123\cdot 10^{-12}\,\text{Кл}\cdot\text{Н}^{-1}$, $d_{33} = 289\cdot 10^{-12}\,\text{Кл}\cdot\text{Н}^{-1}$ $d_{51} = 496\cdot 10^{-12}\,\text{Кл}\cdot\text{Н}^{-1}$, $\varepsilon_{11}^T = 1475\varepsilon_0$, $\varepsilon_{33}^T = 1300\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\Phi\cdot\text{м}^{-1}$ при условиях закрепления краёв (2.12) в табл. 2 приведены первые резонансные ω_r и антирезонансные ω_{ar} частоты при различных отношениях r_0/R. Так как на резонансной частоте механические величины и электрический ток достигают максимальных значений, а на антирезонансной частоте электрический ток минимален, то «расстояние» между этими частотами характеризует эффективность электромеханического преобразования энергии (динамический КЭМС) определяется по формуле Мезона $k_d^2 = (\tilde{\omega}_{ar}^2 - \tilde{\omega}_r^2)/\tilde{\omega}_{ar}^2$ [11]).

Отметим, что при малых отношениях r_0/R (0,001; 0,1) резонансные ω_r и антирезонансные ω_{ar} чатоты практически совпадают с аналогичными частотами для сплошного диска [2, 4]. С ростом отношения r_0/R растут как резонансные, так антирезонансные частоты. Так, первая резонансная частота при $r_0/R = 0{,}6$ возрастает в 1,9 раза, а антирезонансная частота – в 1,89 раза по сравнению с частотами при $r_0/R = 0{,}001$. Вторая резонансная частота – при $r_0/R = 0{,}6$ возрастает в 2,19 раза, а антирезонансная частота в 2,17 раза по сравнению с частотами при $r_0/R = 0,001$. Динамический КЭМС на первом резонансе при $r_0/R = 0,001$ равен: $k_d^2 = 0,626$, а при $r_0/R = 0,6$ – $k_d^2 = 0,23$, на втором резонансе при $r_0/R = 0,001$ КЭМС равен: $k_d^2 = 0,041$, при $r_0/R = 0,6$ – $k_d^2 = 0,036$, т.е. с ростом отношения r_0/R значение КЭМС падает.

Таблица 2

N	r_0/R											
	0,001		0,1		0,2		0,4		0,5		0,6	
	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}
1	2,19	2,525	2,24	2,57	2,35	2,71	2,89	3,33	3,39	3,88	4,18	4,76
2	5,714	5,835	5,93	6,06	6,46	6,595	8,39	8,56	10,02	10,21	12,48	12,71
3	9,08	9,16	9,55	9,63	10,555	10,64	13,914	14,012	16,662	16,774		
4	12,423	12,484	13,18	13,25	14,675	14,736	19,445	19,516				
5	15,77	15,81	16,84	16,89	18,81	18,858						
6	19,10	19,136										

Из данных, приведенных в табл. 2 следует, что при малых отношениях r_0/R (0,001; 0,1) динамический коэффициент электромеханической связи с ростом частоты быстро падает, в то время как при средних отношениях r_0/R (0,4; 0,5; 0,6) динамический коэффициент понижается медленнее.

Р Е З Ю М Е В задачах для гармонічних пружноелектричних коливань тонкої кільцевої пластини досліджено вплив граничних умов на власні частоти, встановлено асимптотичні властивості частотного спектру, проаналізовано залежність частот резонансу, антирезонансу струму та динамічного коефіцієнта електромеханічного зв'язку від відносного розміру пластини.

1. *Исследование* коэффициента электромеханической связи в круглых пьезокерамических пластинах / Андрущенко В.А., Вовкодав И.Ф., Карлаш В.Л., Улитко А.Ф. // Прикл. механика. – 1975. – **11**, № 4. – С. 42 – 48.
2. *Кикучи Е.* Ультразвуковые преобразователи. – М.: Мир, 1972. – 424 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.
4. *Лазуткин В.Н., Цыганов Ю.В., Клюшниченко Е.Р.* Радиальные колебания и электрический импеданс пьезокерамических колец с поляризацией по высоте // Пьезоэлектрические материалы и преобразователи. – Ростов на Дону. Изд-во РГУ: 1971. – С. 4 – 9.
5. *Механика* связанных полей в элементах конструкций. В 6-ти т. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
7. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
8. *Karlash V.L.* Resonant Electromechanical Vibrations of Piezoelectric Shells of Revolution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 4. – P. 361 – 387.
9. *Karlash V.L.* Admittance-Frequency Response of a Thin Piezoceramic Half-Disk // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1120 – 1126.
10. *Kirichok I.F.* Resonant Vibration and Heating of Ring Plates with Piezoactuators under Electromechanical Loading and Shear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 215 – 224.
11. *Kirichok I.F., KarnaukhovM.V.* Monoharmonic Vibrations and Vibrational Heating of an Electromechanically Loaded Circular Plate with Piezoelectric Actuators Subject to Shear Strain // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1041 – 1049.
12. *Mason W.P.* Electrostrictive effect in barium titanate ceramics // Phys. Rev. – 1948. – **74**. – P. 215 – 222.
13. *Mason W.P.* Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – **70**, № 6. – P. 1561 – 1566.
14. *Onoe M.* Contour vibrations of isotropic circular plates // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – **28**. – P. 1158 – 1162.

Поступила 14.05.2009 Утверждена в печать 15.06.2010