

Чепорова Г.С.

## МОДЕЛЬ МАКСИМІЗАЦІЇ ПЕРЕЛІКУ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ У ВИЩОМУ НАВЧАЛЬНОМУ ЗАКЛАДІ

Щоб стати спеціалістом, студент повинен отримати знання у певній галузі (за певною спеціальністю) у достатньому обсязі. З цієї точки зору продуктом університету, що передається студентам, являється навчальний план у вигляді переліку навчальних дисциплін, які повинні бути викладені студентам у певному обсязі.

Розглянемо навчальний план за  $n$ -ою спеціальністю.

$$H_n = \sum \delta_{nk} h_{nk}, \quad n=1, N \quad (1)$$

де  $H_n$  – загальний обсяг годин, які повинні бути виконані за навчальним планом за певну кількість років,

$h_{nk}$  – обсяг годин за  $k$ -ою дисципліною для  $n$ -ої спеціальності,

$L$  – загальна кількість дисциплін, які можуть викладатись у ВЗО,

$\delta_{nk}$  – ознака того, що дисципліна є в навчальному плані і може приймати значення 0 або 1.

Нехай у кожному конкретному році навчаються за даним навчальним планом студенти усіх курсів. Тоді для підготовки студента за  $n$ -ою спеціальністю необхідно виконати  $H_n$  – годин за рік. Нехай в університеті працюють  $P$  викладачів з річним навантаженням у годинах –  $TR_p$ , що володіють сукупним людським капіталом  $S$  ( $S = \sum s_p$ , де  $s_p$  – капітал окремого викладача), а також університет володіє  $Q$  одиницями устаткування з капіталом  $E = \sum e_q$ . Кожна одиниця устаткування може використовуватись  $TQ_q$  годин на рік. Як правило, одиницею устаткування являється аудиторія, а капіталом – її місткість, наявність у ній спеціалізованого устаткування (комп'ютерного, лабораторного та ін.).

Нехай  $tr^*_{pk}$  – максимальний час, який  $p$  – викладач може витратити на навчання або наукову роботу з  $k$  – ої дисципліни. Цілком зрозуміло, що для кожного викладача повинна виконуватись умова:

$$\sum tr^*_{pk} \geq TR_p, \quad (2)$$

де  $TR_p$  – максимальний можливий час роботи викладача згідно контракту, при цьому може статись, що викладач не надасть студентам максимально можливу кількість свого людського капіталу, тому що він може бути спеціалістом за дисциплінами, що не входять до навчального плану даної спеціальності, тобто реальна точка на площині двох продуктів (освітнянського та дослідницького) знаходиться нижче лінії виробничих можливостей.

Саме так може неефективно використовуватись і устаткування. Наприклад, проведення семінарських занять у комп'ютерному класі знижує ефективність використання устаткування. Але по аналогії з (2) для обладнання можна записати:

$$\sum tq^*_{qk} \geq TQ_q, \quad (3)$$

де  $tq^*_{qk}$  – максимальний час, який  $q$  – обладнання може бути використаним для  $k$  – дисципліни в навчанні або науці.

Наявність інших навчальних планів може дозволити наблизити реальну точку до лінії виробничих можливостей, тобто підвищити ефективність використання ресурсів університету.

Розглянемо множину навчальних планів  $\{H_n\}$  ( $n=1, N$ ), яка визначається стандартами освіти. Тоді

$$\sum H_n = \sum \sum \delta_{nk} h_{nk}, \quad (4)$$

$\epsilon$  – загальна кількість годин з усіх навчальних планів протягом терміну навчання, а також мінімальна загальна кількість годин на рік, необхідних для виконання усіх навчальних планів для не менш  $Y^*N$  студентів, які навчаються за  $N$  навчальними планами (на кожній спеціальності навчається 1 студент, або 1 група при кількості років навчання  $Y$ ). Ми припускаємо, що на всіх спеціальностях термін навчання однаковий. Зрозуміло, що в даній ситуації може не вистачити ресурсів, або при виключенні ряду спеціальностей ресурси будуть використовуватись неефективно.

Нехай для спрощення  $H_n = H$ , тобто обсяг годин для всіх спеціальностей відповідно стандарту освіти на даному рівні однаковий, тоді розділивши на  $H$ , (3.41) можна записати у вигляді:

$$1 = \sum \delta_{nk} h_{nk} / H. \quad (5)$$

Величина  $h_{nk}/H$  показує частку  $k$ -ої дисципліни в одній годині навчального плану  $n$ -ої спеціальності упродовж терміну навчання для кожного студента. З іншого боку, при виконанні навчального плану потрібно, щоб одночасно здійснювалась підготовка на всіх курсах, тоді величина  $h_{nk}/H$  є часткою  $k$ -ої дисципліни в одній годині навчального плану  $n$ -ої спеціальності впродовж одного року для усіх років навчання.

Введемо  $N$  булівських функцій  $X_n$ , кожна з яких може приймати значення 0 або 1 у залежності від того, чи присутня в даному університеті  $n$ -а спеціальність. Тоді кожний університет може максимізувати кількість спеціальностей для підвищення ефективності використання ресурсів університету, тобто

$$\sum X_n \rightarrow \max. \quad (6)$$

Безумовно, необхідно додати обмеження на ресурси, якими володіє університет. Помножимо (5) на  $X_n$  і представимо у вигляді:

$$X_n = X_n \sum \delta_{nk} h_{nk} / H = X_n * \sum \delta_{nk} (\alpha_{nk} h_{nk} + (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H, \quad (7)$$

де  $\alpha_{nk}$  – частка навчального плану за  $n$ -ою спеціальністю для  $k$ -ої дисципліни, що виділяється на аудиторні заняття, а відповідно  $(1 - \alpha_{nk})$  – на самостійну роботу. За стандартами освіти України  $1/3 \leq \alpha_{nk} \leq 2/3$ .

Під час виконання самостійної роботи студентами може використовуватись устаткування університету (бібліотека), а може і не використовуватись (практика на підприємствах або заняття вдома). З урахуванням розподілення аудиторного навантаження на лекційні і практичні заняття (7) набуває наступного вигляду:

$$X_n = X_n * \sum \delta_{nk} (\alpha_{nk} h_{nk} + (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H = \\ = X_n * \sum \delta_{nk} (\alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} + \alpha_{nk} (1 - \beta_{nk}) h_{nk} + (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H, \quad (8)$$

де перший доданок є інтенсивністю лекційних занять, другий - інтенсивністю практичних занять, а третій – інтенсивністю самостійної роботи за k-ою дисципліною в одній годині навчального плану n-ї спеціальності впродовж одного року при одночасному навчанні на всіх курсах, при цьому  $0 \leq \beta_{nk} \leq 1$ .

Розглянемо k-у дисципліну. Інтенсивність лекційних занять за цією дисципліною по всіх спеціальностях за весь термін навчання в одній годині роботи університету за рік складає:

$$\sum X_n \delta_{nk} \alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} / H, \quad \forall k=1, L. \quad (9)$$

Тут L – загальна кількість дисциплін по всіх навчальних планах.

Для того, щоб університет був спроможний забезпечити наявність викладачів для проведення цих лекційних занять, повинна виконуватись наступна умова:

$$\sum X_n \delta_{nk} \alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} / H \leq \sum \lambda_{pk} t_{pk} / H, \quad \forall k=1, L, \quad (10)$$

де  $\lambda_{pk}$  – частка годин лекційної роботи р- викладача k – дисципліни в загальній кількості аудиторного навантаження  $t_{pk}$ .

Аналогічно можна записати:

$$\sum X_n U_n \delta_{nk} \alpha_{nk} (1 - \beta_{nk}) h_{nk} / H \leq \sum \mu_{pk} t_{pk} / H, \quad \forall k=1, L \quad (11)$$

де  $U_n$  – кількість груп студентів на n-ій спеціальності,  $\mu_{pk}$  – частка годин групової праці р - викладача k – дисципліною у загальній кількості аудиторного навантаження.

Для спрощення вважаємо, що на кожному курсі n-го фаху навчається однакова кількість груп.

Обмежень типу (10) і (11) для самостійної роботи студентів або може не вимагатись і тоді  $\lambda_{pk} + \mu_{pk} = 1$ , або студенти частину часу самостійної роботи проводять індивідуально з викладачем, і тоді можна записати:

$$\sum X_n \delta_{nk} * W(G_n, U_n, (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H \leq \sum \gamma_{pk} t_{pk} / H, \quad \forall k=1, L, \quad (12)$$

де  $\gamma_{pk}$  – частка індивідуальної роботи зі студентами, що проводиться під керівництвом викладача у загальній кількості аудиторного навантаження;  $G_n$  – кількість студентів на n-ій спеціальності;  $W$  – кількість годин індивідуальної роботи, що проводиться з усіма студентами за k-ою дисципліною.

До обмежень (10) - (12) необхідно додати обмеження на загальну кількість годин праці викладача, яка визначається законодавством і контрактом з університетом:

$$\sum t_{pk} \leq T_{Pp}, \quad \forall p=1, P, \quad (13)$$

$$t_{pk} \leq t_{pk}^*, \quad \forall p=1, P, \forall k=1, L. \quad (14)$$

Обмеження (10)-(14) не враховують можливостей обладнання, і час для наукової роботи викладача визначається за залишковим принципом ( $T_p - \sum t_{pk}$ ).

Нехай в самому загальному випадку на проведення занять за L – дисциплінами потребується  $3*L$  типів обладнання, тоді цілком зрозуміло, що повинна виконуватись умова  $3*L \leq Q$ , інакше для навчання за всіма n спеціальностями буде недостатньо обладнання. Тоді до обмежень (10)-(14) необхідно додати обмеження на обладнання, які у випадку взаємооднозначної відповідності між дисциплінами і обладнанням будуть мати вигляд:

$$\sum X_n \delta_{nk} \alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} / H \leq T_{Q\lambda k} / H, \quad \forall k=1, L, \quad (15)$$

$$\sum X_n U_n \delta_{nk} \alpha_{nk} (1 - \beta_{nk}) h_{nk} / H \leq T_{Q\mu k} / H, \quad \forall k=1, L, \quad (16)$$

$$\sum X_n \delta_{nk} * W(G_n, U_n, (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H \leq T_{Q\gamma k} / H, \quad \forall k=1, L, \quad (17)$$

де  $T_{Q\lambda k}$ ,  $T_{Q\mu k}$ ,  $T_{Q\gamma k}$  – відповідно річний обсяг годин можливого використання різного типу обладнання для лекційної, семінарської та індивідуальної праці викладача за k – дисципліною.

Загальна кількість одиниць обладнання (сума по k,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ) не повинна перебільшувати Q, у протилежному випадку необхідно виключити з кількості можливих спеціальностей ті, для яких хоча б за однією дисципліною немає обладнання.

Відмітимо, що (10) і (15) можуть бути об'єднані у одне обмеження:

$$\sum X_n \delta_{nk} \alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} / H \leq \min\{\sum \lambda_{pk} t_{pk} / H, T_{Q\lambda k} / H\}, \quad \forall k=1, L, \quad (18)$$

тобто може залишитись завідомо невикористаною або праця викладача, або ресурси обладнання.

Аналогічно можна об'єднати пари (11):(16) і (12):(17):

$$\sum X_n U_n \delta_{nk} \alpha_{nk} (1 - \beta_{nk}) h_{nk} / H \leq \min\{\sum \mu_{pk} t_{pk} / H, T_{Q\mu k} / H\}, \quad \forall k=1, L \quad (19)$$

$$\sum X_n \delta_{nk} * W(G_n, U_n, (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H \leq \min\{\sum \gamma_{pk} t_{pk} / H, T_{Q\gamma k} / H\}, \quad \forall k=1, L \quad (20)$$

Таким чином, навіть без розв'язання задачі (6) можна стверджувати, що у випадку

$$\sum \lambda_{pk} t_{pk} \neq T_{Q\lambda k}, \quad \forall k=1, L, \quad (21)$$

$$\text{або } \sum \mu_{pk} t_{pk} \neq T_{Q\mu k}, \quad \forall k=1, L, \quad (22)$$

$$\text{або } \sum \gamma_{pk} t_{pk} \neq T_{Q\gamma k}, \quad \forall k=1, L, \quad (23)$$

ресурси університету будуть використані неефективно.

Нереалізовану степінь невідповідності трудових ресурсів і обладнання можна виміряти величинами:

$$K_{нп} = \sum \text{abs}\{\sum \lambda_{pk} t_{pk} / H - T_{Q\lambda k} / H\} / \sum\{\sum \lambda_{pk} t_{pk} / H + T_{Q\lambda k} / H\}, \quad (24)$$

$$K_{nc} = \sum \text{abs} \{ \sum \mu_{pk} t_{pk} / H - TQ_{\mu k} / H \} / \sum \{ \sum \mu_{pk} t_{pk} / H + TQ_{\mu k} / H \}, \quad (25)$$

$$K_{ni} = \sum \text{abs} \{ \sum \gamma_{pk} t_{pk} / H - TQ_{\gamma k} / H \} / \sum \{ \sum \gamma_{pk} t_{pk} / H + TQ_{\gamma k} / H \}, \quad (26)$$

Тут (24) відображає степінь такої невідповідності для лекційних занять: (25) – для семінарських і (26) – для індивідуальних у випадку взаємнооднозначної відповідності між дисципліною і обладнанням.

Можна спробувати керівництву університету мінімізувати ці різниці за рахунок підбору параметрів  $t_{pk}$ ,  $\lambda_{pk}$ ,  $\mu_{pk}$ ,  $\gamma_{pk}$  при врахуванні обмежень (13)-(14). Однак є сенс зробити це після модифікації обмежень (18)-(20) з урахуванням того, що частина дисциплін обираються університетом або студентами, тобто вони можуть бути однаковими для різних фахів як по рішенню університету, так і з самого початку співпадати у переліку обов'язкових дисциплін; а також одні й ті ж самі ресурси обладнання можуть використовуватись для різних дисциплін.

Математично це записується більш слабкими обмеженнями (15)-(17) для деяких з них відносно обладнання, тобто:

$$\sum \sum X_n \delta_{nk} \alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} / H \leq \sum TQ_{\lambda k} / H, \quad L_j \leq L, \quad \forall j=1, J, \quad (27)$$

$$\sum \sum X_n U_n \delta_{nk} \alpha_{nk} (1 - \beta_{nk}) h_{nk} / H \leq \sum TQ_{\mu k} / H, \quad L_j \leq L, \quad \forall j=1, J, \quad (28)$$

$$\sum (k) \sum (n) X_n \delta_{nk} * W(G_n, U_n, (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H \leq \sum (k) TQ_{\gamma k} / H, \quad L_j \leq L, \quad \forall j=1, J, \quad (29)$$

Тут  $J$  – кількість груп однотипного обладнання (аудиторій),  $L_j$  – кількість обладнання у  $j$  – групі (обладнання пронумероване по групах),  $k$  сумується від  $L_{j-1}+1$  до  $L_j$ .

З урахуванням можливості варіювання необов'язковими дисциплінами обмеження (10)-(12) для таких дисциплін можуть мати той же вигляд, однак  $\delta_{nk}$  стає параметром при збереженні загальної рівності  $H = \sum \delta_{nk} h_{nk}$ .

Таким чином, задача максимізації кількості спеціальностей зводиться до рішення знаходження максимуму функції (6) з урахуванням частини обмежень у вигляді (18)-(20), а частини – у вигляді (15)-(17) або (27)-(29), (10)-(14) з заданими або підібраними значеннями  $\delta_{nk}$ , а також (5).

Параметрами в цій задачі являються  $t_{pk}$ ,  $\lambda_{pk}$ ,  $\mu_{pk}$ ,  $\gamma_{pk}$ ,  $\alpha_{nk}$ ,  $\beta_{nk}$ ,  $U_n$ ,  $G_n$ ,  $h_{nk}$ ,  $TP_p$ ,  $TQ_{\lambda k}$ ,  $TQ_{\mu k}$ ,  $TQ_{\gamma k}$ ,  $H$ , а також інформація про уніфікованість обладнання або загальності вибіркового курсів для різних спеціальностей (параметр  $\delta_{nk}$ ).

Задача про оптимальну структуру спеціальностей практично може виникнути при створенні ВЗО, для перевірки оптимальності існуючої структури, для визначення додаткових спеціальностей, які дозволять ефективніше використовувати наявні ресурси, при визначенні Міністерством переліку ліцензованих спеціальностей.

Оскільки відомо, що розв'язання задачі лінійного програмування знаходиться в оптимальному куті, необхідно визначити те обмеження, яке знижує оптимальне рішення, і спробувати послабити це обмеження.

Нехай університет має право на підготовку студентів за всіма  $N$  спеціальностями. Тоді повинні виконуватись нерівності, як сліdstва нерівностей (18)-(20) з урахуванням (27)-(29), а саме:

$$\sum \sum \delta_{nk} \alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} / H \leq \min \{ \sum \sum \lambda_{pk} t_{pk} / H, \sum TQ_{\lambda k} / H \}, \quad L_j \leq L, \quad \forall j=1, J, \quad (30)$$

$$\sum \sum \delta_{nk} U_n \alpha_{nk} (1 - \beta_{nk}) h_{nk} / H \leq \min \{ \sum \sum \mu_{pk} t_{pk} / H, \sum TQ_{\mu k} / H \}, \quad L_j \leq L, \quad \forall j=1, J, \quad (31)$$

$$\sum \sum \delta_{nk} W(G_n, U_n, (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H \leq \min \{ \sum \sum \gamma_{pk} t_{pk} / H, \sum TQ_{\gamma k} / H \}, \quad L_j \leq L, \quad \forall j=1, J, \quad (32)$$

Тут  $\delta_{nk}$  приймає певні значення.

Аналогічно (24)-(26), реалізовану степінь невідповідності трудових ресурсів і обладнання можна виміряти величинами, не меншими, ніж:

$$K_{унл} = \sum \sum \text{abs} \{ \sum \lambda_{pk} t_{pk} - TQ_{\lambda k} \} / \sum \{ \sum \lambda_{pk} t_{pk} + TQ_{\lambda k} \} \quad (33)$$

$$K_{унс} = \sum \sum \text{abs} \{ \sum \mu_{pk} t_{pk} - TQ_{\mu k} \} / \sum \{ \sum \mu_{pk} t_{pk} + TQ_{\mu k} \} \quad (34)$$

$$K_{уни} = \sum \sum \text{abs} \{ \sum \gamma_{pk} t_{pk} - TQ_{\gamma k} \} / \sum \{ \sum \gamma_{pk} t_{pk} + TQ_{\gamma k} \} \quad (35)$$

Значення  $K_{унл}$ ,  $K_{унс}$ ,  $K_{уни}$ , реально можуть бути більшими, тому що (30)-(32) являються необхідними, але не достатніми умовами.

Якщо в структурі університету є ізольовані факультети, кожний з яких має свої трудові ресурси і обладнання, і веде підготовку студентів тільки за однією спеціальністю, то обмеження (18)-(20) будуть мати вигляд:

$$X_n \alpha_{nk} \beta_{nk} h_{nk} / H \leq \min \{ \sum \lambda_{pk} t_{pk} / H, TQ_{\lambda k} / H \}, \quad \forall k=1, L, \forall n=1, N, P_j \leq P, \forall j=1, N, \quad (36)$$

$$X_n U_n \alpha_{nk} (1 - \beta_{nk}) h_{nk} / H \leq \min \{ \sum \mu_{pk} t_{pk} / H, TQ_{\mu k} / H \}, \quad \forall k=1, L, \forall n=1, N, P_j \leq P, \forall j=1, N, \quad (37)$$

$$X_n W(G_n, U_n, (1 - \alpha_{nk}) h_{nk}) / H \leq \min \{ \sum \gamma_{pk} t_{pk} / H, TQ_{\gamma k} / H \}, \quad \forall k=1, L, \forall n=1, N, P_j \leq P, \forall j=1, N, \quad (38)$$

тобто праця викладача може залишитись завідомо невикористаною на одному факультеті з причини відсутності обладнання, а зворотнє може статися на іншому. Ефективність використання ресурсів університету в цілому лягає у випадку делегування частини повноважень на факультет. Математично це виражається у більш сильних обмеженнях типу (36)-(38) в задачі оптимізації структури спеціальностей.