

УДК 534.6.615,471:616-073.4-8:389

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ОТКЛИКА БИОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД

Е. А. БАРАННИК

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина**Получено 20.11.2003*

Решения параболического уравнения дифракции для ультразвуковых пучков волн, излучаемых преобразователями с аподизированной апертурой, использованы для оценки доплеровских спектров и определения их ширины при зондировании биологических сред нефокусированными, фокусированными и импульсными волнами. Показано, что при импульсном излучении ширина спектров от линии тока неинвариантна по отношению к глубине зондирования и зависит от взаимного расположения измерительного объема и реального фокуса. Доказана зависимость модальной доплеровской частоты от положения линии тока в измерительном объеме. Найдены спектры доплеровских сигналов для аксиально-симметричных потоков с различным профилем скоростей. Развита теория обобщена на случай пространственно неоднородного движения, что дает возможность оптимизации методов ультразвуковой доплеровской эхоскопии.

Рішення параболического рівняння дифракції для ультразвукових пучків хвиль, що випромінюються перетворювачами з аподизованою апертурою, використані для оцінки доплерівських спектрів і винайдення їх ширини при зондуванні біологічних середовищ нефокусованими, фокусованими та імпульсними хвилями. Показано, що при імпульсному випромінюванні ширина спектру від лінії току неінваріантна по відношенню до глибини зондування і залежить від взаємного розташування вимірювального об'єму і реального фокуса. Доказана залежність модальної доплерівської частоти від розташування лінії току у вимірювальному об'ємі. Винайдені спектри доплерівських сигналів для аксиально-симетричних потоків з різним профілем швидкості. Теорія, що розвинена, узагальнена на випадок просторово неоднорідного руху, що дає можливість оптимізації методів ультразвукової доплерівської ехоскопії.

The closed solutions of parabolic diffraction equation for ultrasound wave beams irradiating by transducers with apodized apertures are used for estimation of Doppler spectra and evaluation of their bandwidth under nonfocused, focused and pulsed probing of biological media. It has been shown that under pulsed irradiation the Doppler spectrum from the flow-line is not invariant with sounding depths and depends on the positional relationship of the sample volume and the real focal point. The spectra of Doppler signals from axially-symmetrical flows with different velocity profiles were established. The developed theory is generalized on the case of spatially nonuniform movement that gives the possibility to optimize the methods of ultrasound Doppler echoscopy.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, ультразвуковые доплеровские методы служат эффективным средством неинвазивного исследования характеристик движения тканей в организме человека и широко применяются в кардиологии и сосудистой диагностике [1,2]. В их основе лежит регистрация частоты доплеровского сдвига волн, рассеянных подвижными неоднородностями исследуемой среды. С точки зрения точности измерения параметров движения (скорости \vec{V} и ее градиентов в заданной области) спектральные свойства доплеровского отклика являются определяющими для всех ультразвуковых доплеровских методик [1–3]. Они зависят не только от физических свойств исследуемой биологической среды [1,4], но и от характеристик ультразвуковых полей, применяемых для зондирования. В частности, помимо градиентов скорости движения, к факторам, определяющим ширину доплеровского спектра, относятся ограниченные размеры реальных пучков волн, дифракционная кривизна их волновых фронтов и величина форми-

руемого пучками измерительного объема. Необходимо подчеркнуть, что все перечисленные факторы с физической точки зрения оказываются следствием неопределенности волновых векторов реальных ультразвуковых полей. На это впервые указано в работе [5]. В соответствии с принципом дополненности, общим для всех волновых процессов, спектральное уширение доплеровского отклика является платой за улучшенную пространственную разрешающую способность, необходимую для медицинской эхоскопии.

Исторически сложилось деление спектрального уширения доплеровского отклика на две части – времяпролетную [6,7] и геометрическую [8,9]. Первая из них связана с локальной ограниченностью участка траектории рассеивающей неоднородности при прохождении ею измерительного объема, что приводит к амплитудной модуляции доплеровского отклика и соответствующему времяпролетному уширению спектра. Под геометрической частью ширины спектра с центральной частотой $\omega_d = 2kV \cos \theta$ понимают составляющую, обусловленную изменением угла θ между направ-

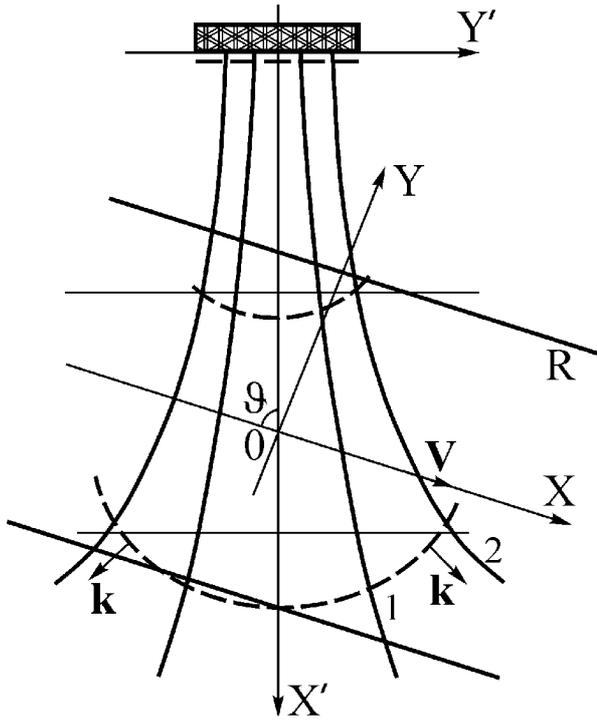


Рис. 1. Взаимное расположение поля преобразователя и линий тока в области движения среды R:

1 – поверхности равной фазы,
2 – поверхности равной амплитуды

лением движения и направлением волнового вектора \vec{k} . Как показано на рис. 1, оно зависит от локальной кривизны волновых фронтов. Волновой вектор нормален к поверхностям равной фазы, поэтому отклонение волн от плоских приводит к уширению спектра из-за частотной модуляции доплеровского отклика.

Частично указанное деление появилось в результате определенных трудностей корректного описания дифракции ультразвуковых пучков волн в широком диапазоне глубин, который используется в медицинских приложениях и включает в себя ближнюю зону излучения. Часть теоретических работ [10–14], в том числе и анализ спектров при фокусировании прямоугольной апертуры [11], выполнена с использованием параксиального приближения для ультразвуковых полей в дальней (фраунгоферовой) зоне излучения. Наиболее общий результат для доплеровского спектра линии тока, полученный в этом приближении [12–14], установил линейную связь между шириной спектра и геометрическими параметрами преобразователя:

$$B_d = 2kV \frac{W}{F} \sin \theta. \quad (1)$$

Здесь W – апертура круглого ультразвукового преобразователя; F – фокусное расстояние. Для случая непрерывного излучения волн была сформулирована гипотеза об инвариантности ширины спектра при различных положениях линии тока, проходящей через ось коаксиальных фокусированных пучков падающих и отраженных волн. Для эхо-импульсных систем такая инвариантность была продемонстрирована экспериментально при больших углах зондирования [15].

Заметим, что приведенные результаты получены в рамках простой физической модели дискретных рассеивателей ультразвука. Кроме того, для медицинских приложений важны не столько спектры от линий тока жидкости (например, крови), сколько полные спектры доплеровского отклика, непосредственно определяющие точность оценки параметров исследуемых движений среды. Наконец, необходимо оценить относительные вклады различных физических факторов в доплеровские спектры и применимость полученных результатов в ближней зоне излучения. С этой целью предложен [16–20] и развит [21–24] подход, основанный на модели неоднородного континуума и использующий известные точные решения параболического уравнения дифракции [25,26]. Принимая во внимание известную связь между параболическим уравнением дифракции и классическим параксиальным приближением в акустике [27], можно утверждать, что получаемые этим способом оценки достоверны в пределах своей применимости и имеют ряд практических преимуществ. В данной работе излагаются основные результаты, полученные в рамках такого подхода, и вытекающие из них рекомендации по оптимизации доплеровских методов.

1. ДОПЛЕРОВСКАЯ ЭХОСКОПИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Как отмечено в [28, 29], теоретические и практические задачи акустической интроскопии самым непосредственным образом связаны с различными решениями обратной задачи рассеяния (ОЗР) [30]. По сути, ОЗР является задачей удаленного зондирования. Это важно для большинства практических приложений, включая томографические [31–34], в которых рассеянное поле измеряется в некоторой области Y , удаленной от исследуемой области R (рис. 2). Определяемые параметры исследуемой среды могут быть весьма различными по физическому содержанию (это зависит исключительно от характера взаимодействия волн со средой и полноты его учета). В линейном приближении развитые подходы к решению ОЗР

и вытекающие из них методы ультразвуковой интроскопии позволяют идентифицировать неоднородности плотности и сжимаемости среды. Однако если под рассеянным понимать также поле волн, обусловленных нелинейным взаимодействием ультразвука со средой, то к числу определяемых параметров добавляется коэффициент нелинейности среды [28].

Распространение звуковых волн в несопротивляющейся сдвигу сжимаемой среде описывается одним уравнением, вытекающим из закона сохранения массы, уравнения Эйлера и уравнения термодинамического состояния [35]. В неоднородной среде уравнение для акустического давления имеет вид [30]

$$\begin{aligned} \Delta P(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 P(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \\ = F(\vec{r}, t) + \frac{\nabla \rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})} \left[\nabla P(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho(\vec{r})$ – локальное равновесное значение плотности среды; $c(\vec{r})$ – локальная равновесная фазовая скорость звука; $\vec{f}(\vec{r}, t)$ – внешняя сила; $F(\vec{r}, t) = -\nabla \vec{f}(\vec{r}, t)$ – функция источников первичных волн. Внешняя сила является источником первичного поля $P_X(\vec{r})$, разное задание которого соответствует облучению различными способами – с изменением частоты, ракурса и т. д. Без ограничения общности можно опустить в выражении (2) слагаемое, пропорциональное $\vec{f}(\vec{r}, t)$, поскольку область R ограничена и не пересекается ни с областью Y , ни и с областью локализации источников X .

Для описания двух типов акустических неоднородностей [30], связанных с флуктуациями плотности и сжимаемости среды, локальную скорость распространения ультразвуковых волн выражают через функцию сжимаемости $\beta(\vec{r})$, выделяя в явном виде флуктуации плотности и сжимаемости на фоне их постоянных составляющих ρ_0 и β_0 [1, 36]:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{r}) &= [\rho(\vec{r}) - \rho_0] \rho^{-1}(\vec{r}), \\ \tilde{\beta}(\vec{r}) &= [\beta(\vec{r}) - \beta_0] \beta_0^{-1}. \end{aligned}$$

Некоторая несимметричность определения функций $\tilde{\rho}(\vec{r})$ и $\tilde{\beta}(\vec{r})$ позволяет перейти к дифференциальному уравнению с наиболее простой правой

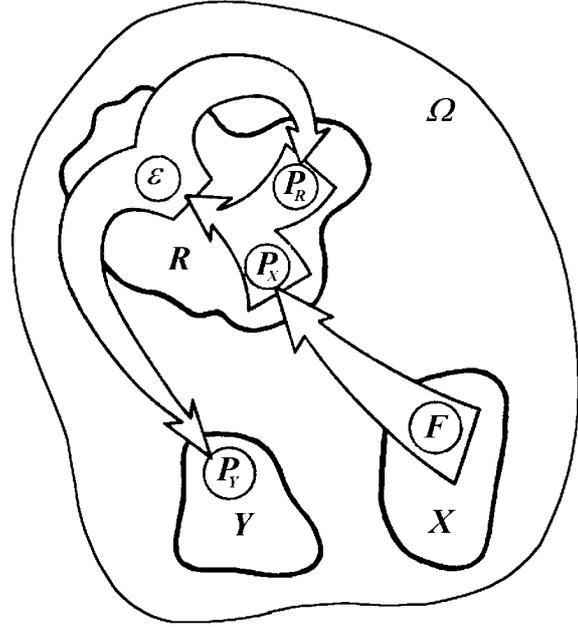


Рис. 2. Общая схема ОЗР [30]: взаимное расположение в объеме Ω источников первичного поля X , исследуемой среды R и области наблюдения Y

частью:

$$\begin{aligned} \Delta P(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \tilde{\beta}(\vec{r}) \frac{\partial^2 P(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \\ + \nabla [\tilde{\rho}(\vec{r}) \nabla P(\vec{r}, t)] + F(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\beta_0 = (\rho_0 c_0^2)^{-1}$ – равновесная сжимаемость в отсутствии неоднородностей. В случае гармонических волн решение уравнения (3) дается формулой Кирхгофа [37]:

$$\begin{aligned} P(\vec{r}) = P_X(\vec{r}) + \int_R G(\vec{r} - \vec{r}') \times \\ \times \left\{ -k^2 \tilde{\beta}(\vec{r}') P_R(\vec{r}') + \nabla' [\tilde{\rho}(\vec{r}') \nabla' P_R(\vec{r}')] \right\} d\vec{r}' + \\ + \int_S [P(\vec{r}') \nabla' G(\vec{r} - \vec{r}') - G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' P(\vec{r}')] d\vec{S}'. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $P_R(\vec{r})$ – акустическое поле в области локализации неоднородностей R ; $G(\vec{r}) = -\exp(ikr)/(4\pi r)$ – функция Грина свободного трехмерного пространства; S и \vec{n} – ограничивающая объем Ω поверхность и ее внешняя нормаль (см. рис. 2). При неограниченном увеличении объема поверхность S удаляется

на бесконечность, где все акустические поля расходятся сферически, поэтому поверхностный интеграл оказывается строго равным нулю. Заметим, что вклад поверхностных интегралов является главным, если стоит задача идентификации ограниченных рассеивателей произвольной формы [30]. Вычисление поверхностных интегралов важно при использовании различных методов акустической голографии [38].

Большинство работ по исследованию прикладных ОЗР посвящено их решению в приближениях однократного рассеяния Борна или плавных возмущений Рытова [30, 34]. Этим условиям хорошо удовлетворяют неоднородности в мягких биологических тканях и жидкостях, являющиеся слабыми рассеивателями [1, 4]. После интегрирования по частям второго слагаемого в подынтегральном выражении уравнения (4) и учитывая принцип взаимности, приходим к выражению для регистрируемого ультразвукового отклика среды в приближении Борна [1, 36]:

$$e_s(t) = e^{-i\omega t} \int_R \left\{ -k^2 \tilde{\beta}(\vec{r}', t) P_X(\vec{r}') P_r(\vec{r}') - \tilde{\rho}(\vec{r}', t) \nabla' P_X(\vec{r}') \nabla' P_r(\vec{r}') \right\} d\vec{r}' \quad (5)$$

В соответствии с принципом взаимности [35, 36] фигурирующая здесь функция чувствительности принимающей системы $P_r(\vec{r})$ с точностью до размерного множителя совпадает с ее полем излучения. В результате доплеровский отклик, получающийся после демодуляции сигнала отклика (5), имеет вид [1]

$$e_d(t) = k^2 \int_R e^{2i(\vec{k}\vec{r}+\varphi)} G'(\vec{r}) \times \left\{ \tilde{\beta}(\vec{r}, t) - \tilde{\rho}(\vec{r}, t) \gamma(\vec{r}) \right\} d^3r, \quad (6)$$

где $\vec{k} = (\vec{k}_r + \vec{k}_t)/2$ – волновой вектор функции распределения чувствительности по полю $G'(\vec{r})$ в приближении плоских волн; $\varphi = (\varphi_t + \varphi_r)/2$ – постоянная фаза. Функция чувствительности $G'(\vec{r})$ представляет собой произведение амплитуды падающих волн $G'_t(\vec{r})$ и функции чувствительности к рассеянным волнам $G'_r(\vec{r})$ с учетом отклонения истинных фаз $\Phi_t(\vec{r})$ и $\Phi_r(\vec{r})$ этих комплексных величин от фазы плоских волн:

$$G'_{t,r}(\vec{r}) = G_{t,r}(\vec{r}) e^{i\Phi'_{t,r}(\vec{r})} = G_{t,r}(\vec{r}) e^{i\Phi_{t,r} - i(\vec{k}_{t,r}\vec{r} + \varphi_{t,r})} \quad (7)$$

($G_{t,r}(\vec{r})$ – действительные функции). Наконец, безразмерный параметр

$$\gamma(\vec{r}) = (\vec{k}_t + \vec{\alpha}_t)(\vec{k}_r + \vec{\alpha}_r) k^{-2}, \quad (8)$$

$$\vec{\alpha}_{t,r} = \vec{\nabla} \Phi'_{t,r}(\vec{r}) - i G_{t,r}^{-1}(\vec{r}) \vec{\nabla} G_{t,r}(\vec{r}), \quad (9)$$

в подынтегральном выражении формулы (6) отличается от единицы малыми добавками, обусловленными дифракционной расходимостью пучков волн и искривлением волновых фронтов.

Отметим, что выражение (6) представляет собой доплеровский отклик в случае, когда отражение формируется не дискретными рассеивателями, а флуктуациями плотности и сжимаемости среды (континуальная модель). Для определения спектров отклика при отражении ультразвука совокупностью дискретных рассеивателей с малыми размерами достаточно просуммировать вклады каждого из них и задать закон движения при помощи аргумента $\vec{r} - \vec{V}t$ в δ -функциях, описывающих пространственное распределение рассеивателей. После этого вычисление спектров сводится к прямому преобразованию Фурье выражения (6). Дискретная модель в принципе пригодна также для описания движущихся поверхностей структур сердца, пульсирующих стенок кровеносных сосудов и т. п. Для описания же полного спектра мощности доплеровского сигнала при движении крови или мягких тканей можно воспользоваться известной связью спектров с Фурье-образом автокорреляционной функции $e_d^*(t) e_d(t + \tau)$. Подставляя в это выражение соотношение (6), заменяя усреднение по времени усреднением по статистическому ансамблю и полагая, что рассеиватели ультразвука взаимодействуют лишь с ближайшими соседями, для спектра мощности от линии тока находим

$$S(\omega, y, z) = k^4 v V \left\{ \langle \tilde{\beta}^2 \rangle |TF[e^{2ikVt \cos \theta} G'(Vt, y, z)]|^2 - 2 \langle \tilde{\beta} \tilde{\rho} \rangle \mathbf{Re} \left\{ TF[e^{2ikVt \cos \theta} G'(Vt, y, z)] \times TF^*[e^{2ikVt \cos \theta} \gamma(Vt, y, z) G'(Vt, y, z)] \right\} + \langle \tilde{\rho}^2 \rangle |TF[e^{2ikVt \cos \theta} \gamma(Vt, y, z) \times G'(Vt, y, z)]|^2 \right\}. \quad (10)$$

Здесь $TF[f(t)]$ – Фурье-образ функции $f(t)$; v – постоянная, определяющая радиус корреляции рас-

сеиваючих неоднородностей (она имеет размерность m^3 и по порядку величины равна их объему); $\langle \tilde{\rho}^2 \rangle$ – среднеквадратическая по ансамблю величина флуктуаций плотности среды (по аналогии введены также $\langle \tilde{\beta}^2 \rangle$ и $\langle \tilde{\beta}\tilde{\rho} \rangle$). В выражении (10), описывающем физическую модель биологической среды в виде неоднородного континуума, под характерной величиной v для крови можно понимать объем эритроцита, хотя возможна агрегация таких клеток, изменяющаяся со временем в течение кардиоцикла и определяющая радиус корреляции [1]. В частности, случайные пульсации скорости в турбулентных потоках крови увеличивают диапазон концентраций элементов среды и радиусов корреляции.

2. ДОПЛЕРОВСКИЕ СПЕКТРЫ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ИЗЛУЧЕНИИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН

2.1. Составляющая спектра от линии тока

Для получения одноэлементных ультразвуковых преобразователей с амплитудно-частотной характеристикой, имеющей выраженный резонанс на частоте излучения, жесткое закрепление активного пьезоэлемента производят только по краевой области [27]. Поэтому амплитуда колебаний на рабочей поверхности реальных преобразователей падает по мере приближения к краю пьезоэлемента и хорошо аппроксимируется гауссовой кривой. Для многоэлементных преобразователей с электронным фазированием с целью подавления боковых лепестков функции чувствительности и получения более гладкого распределения поля вдоль акустической оси в последнее время обычно применяют апертурную аподизацию [27]. Поэтому при вычислении спектров доплеровского отклика целесообразно использовать известное решение параболического уравнения дифракции, полученное для пучков волн с гауссовым профилем амплитуды колебаний на излучающей поверхности [25, 26]:

$$G_t(\vec{r}) = \frac{P_0}{\sqrt{1 + x'^2/l_F^2}} \times \exp \left\{ -\frac{y'^2 + z'^2}{\alpha^2 b^2} \frac{1}{1 + x'^2/l_F^2} \right\}, \quad (11)$$

$$\Phi'_t(\vec{r}) = \frac{y'^2 + z'^2}{\alpha^2 b^2} \frac{x/l_F}{1 + x'^2/l_F^2} - \arctg \frac{x'}{l_F}.$$

Здесь “штрихованная” система координат связана с преобразователем (см. рис. 1); P_0 – амплитуда

волн в центре излучающей поверхности; $\alpha \leq 1$ – постоянный коэффициент, связывающий ширину начального гауссовского распределения с радиусом физической апертуры b и определяющий ее эффективную величину $W = 2a = 2\alpha b$ ($l_F = \pi a^2/\lambda$ – длина зоны Френеля). В рассматриваемом случае $\Phi'_r(\vec{r}) = \Phi'_t(\vec{r})$, $\vec{k}_r = \vec{k}_t = \vec{k}$, а функция $G_r(\vec{r})$ равна $G_t(\vec{r})$ с точностью до постоянного размерного множителя.

Для гауссовых пучков волн (11) каждый из фигурирующих в формуле (10) Фурье-образов можно вычислить, используя методы асимптотической оценки интегралов и, в частности, метод перевала [39]. Большим параметром, обуславливающим применимость метода, является величина $l_F^2/a^2 \gg 1$, поскольку отношение радиуса к длине волны всегда составляет $a/\lambda \geq 10$. Тогда

$$\begin{aligned} TF[e^{2ikVt \cos \theta} G'(Vt, y, z)] &= \\ &= \frac{A}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(w) e^{f(w) l_F^2/a^2} dw \approx \\ &\approx \frac{A}{V} \frac{a}{l_F} e^{f(w_0) l_F^2/a^2} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(w_0)|}} \psi(w_0) e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (12)$$

где A – постоянная, с точностью до размерного множителя пропорциональная P_0 . Функции комплексного переменного $\psi(w)$ и $f(w)$ имеют вид

$$\psi(w) = \frac{l_F^2}{l_F^2 + x'^2(w, y)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f(w) = 2 \left\{ \frac{y'^2(w, y) + z'^2}{l_F^2 + x'^2(w, y)} \left[-1 + i \frac{x'(w, y)}{l_F} \right] - \right. \\ \left. - i \frac{a^2}{l_F^2} \arctg \frac{x'(w, y)}{l_F} - 2i\Omega \cos \theta \frac{w}{l_F} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_d} - 1 = \frac{\omega}{2kV \cos \theta} - 1.$$

Величина w_0 в выражении (12) является корнем уравнения $f'(w) = 0$, а угол θ определяет линию наибольшего ската $\mathbf{Im} f(w) = \text{const}$ в плоскости комплексного переменного w , проходящую через точку перевала w_0 . Оценка всех Фурье-образов в формуле (10) проводится аналогично, поэтому в результате получаем

$$\begin{aligned} S(\omega, y, z) &= \\ &= 2\pi \left(Ak^2 \frac{a}{l_F} \right)^2 \frac{v}{V} e^{2\mathbf{Re} f(w_0) l_F^2/a^2} \frac{|\psi(w_0)|^2}{|f''(w_0)|} \times \\ &\times \left\{ \langle \tilde{\beta}^2 \rangle - 2\langle \tilde{\beta}\tilde{\rho} \rangle \mathbf{Re} \gamma(w_0) + \langle \tilde{\rho}^2 \rangle |\gamma(w_0)|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Решения уравнения для определения точки пере-
вала w_0

$$\frac{1}{X'^2 + 1} \left[(Y'^2 + Z^2) \frac{X' + i}{X' - i} + \alpha^2 B^2 \right] \cos \theta - 2Y' \frac{X' + i}{X'^2 + 1} \sin \theta + 2\Omega \cos \theta = 0, \quad (16)$$

записанного в безразмерных переменных $X' = x'/l_F$, $Y' = y'/l_F$, $Z = z/l_F$, $\alpha B = a/l_F$, в общем случае неизвестны. Однако задача сильно упрощается для области частот $|\Omega \cos \theta| \ll 1$ вблизи центральной доплеровской частоты ω_d спектра мощности от линии тока. Такое ограничение не является очень жестким. В самом деле, как будет показано ниже, наибольший вклад в низкочастотную часть полного спектра вносят не “хвосты” быстропадающих функций $S(\omega, y, z)$, а те части области R , в которых движение среды характеризуется малыми скоростями и соответственно малыми центральными частотами спектров линий тока. Для не слишком протяженных в направлении оси Oz областей R справедливо неравенство $|Z| \ll 1$. Тогда искомое решение удовлетворяет неравенству $|Y'| \ll 1$. Действительно, удерживая в выражении (16) члены первого порядка малости, находим

$$Y' = \left(L_0 - \frac{1}{\sin \theta} Y - i \right) \Omega \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (17)$$

где $L_0 = l_0/l_F$ – безразмерное расстояние до начала системы координат (x, y, z) в области R . В соответствии с соотношением (17) неравенство $|Y'| \ll 1$ выполняется, по крайней мере, для не слишком малых углов θ . В результате из формулы (17) получаем

$$w_0 = -y \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \left(l_0 - \frac{y}{\sin \theta} - il_F \right) \Omega \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (18)$$

В то же время, из соотношения (14) видно, что величина $\text{Re } f(w_0)$ квадратична по малым Z , $\Omega \cos \theta$ и B . Следовательно, показатель экспоненты в выражении (15) с учетом множителя B^{-2} имеет в рассматриваемом приближении нулевой порядок малости. Поэтому при вычислении $\gamma(w_0)$, $\psi(w_0)$ и $f''(w_0)$ малыми дифракционными добавками можно пренебречь. В результате находим окончательное выражение для спектра мощности

доплеровского сигнала от линии тока [16]:

$$S(\omega, y, z) = \frac{\pi}{2} \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \right\rangle \times \frac{(Aak^2)^2 v}{\sin^2 \theta} \frac{l_F^3}{\left[l_F^2 + (l_0 - y/\sin \theta)^2 \right]^{3/2}} \times \exp \left\{ -\frac{4l_F^2}{a^2} \text{ctg}^2 \theta \times \left[\Omega^2 + \frac{z^2 \text{tg}^2 \theta}{l_F^2 + (l_0 - y/\sin \theta)^2} \right] \right\}, \quad (19)$$

которое для дальнейшего анализа удобно записать в виде

$$S(\omega, y, z) = S(\omega_d, y, z) e^{-\Omega^2/(2\sigma_0^2)}, \quad (20)$$

$$\sigma_0^2 = \text{tg}^2 \theta = \frac{a^2}{8l_F^2} \text{tg}^2 \theta = \frac{W^2}{32l_F^2} \text{tg}^2 \theta.$$

Функция $S(\omega_d, y, z)$ определяет только зависимость амплитуды доплеровского спектра от положения линии тока относительно зондирующего пучка волн. Из выражения (20) следует, что центральная часть доплеровского спектра линии тока, сформированного пучками волн с гауссовым профилем амплитуды колебаний на излучающей и принимающей поверхности, имеет гауссову форму с шириной

$$B_d = 4\sigma_0 \omega_d = 2kV \frac{W}{2^{1/2} l_F} \sin \theta, \quad (21)$$

не зависящей от глубины залегания линии тока, если линейные размеры рассеивающей области в направлении, перпендикулярном к линии тока и оси пучков волн, существенно меньше длины зоны дифракции. Ширина спектра определяется отношением начальной ширины гауссовского распределения амплитуды к длине волны и углом падения волн. Физически этот результат объясняется тем, что увеличение ширины спектра с ростом глубины из-за дифракционного искривления волнового фронта в точности компенсируется уменьшением времяпролетного уширения. При этом глубина залегания линии тока $l_0 - y/\sin \theta$ влияет лишь на амплитуду спектра.

2.2. Полный спектр мощности для аксиально-симметричных течений

Выражение (19) существенно упрощается, если размеры области R в направлении оси Oy также ограничены длиной зоны дифракции. В

частности, для аксиально-симметричных потоков $V=V(\rho)$, где $\rho=\sqrt{y^2+z^2}\leq R\ll l_F$, малость поперечных размеров области R позволяет при вычислении полного спектра $S(\omega)$ пренебречь зависимостью от координаты y и произвести интегрирование по угловой переменной цилиндрических координат (ρ, φ) [16]:

$$S(\omega) = \int_0^R \int_0^{2\pi} S(\omega, \rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= v \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle \frac{(\pi ARak^2)^2}{\sin^2 \theta} \times$$

$$\times \frac{l_F^3}{(l_F^2 + l_0^2)^{3/2}} \int_0^1 \frac{1}{V(x)} I_0 \left(\frac{2R^2}{a^2} \frac{l_F^2}{l_F^2 + l_0^2} x \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{4l_F^2}{a^2} \text{ctg}^2 \theta \left[\Omega^2 + \frac{x R^2 \text{tg}^2 \theta}{2 l_F^2 + l_0^2} \right] \right\} dx. \quad (22)$$

Здесь $x=\rho^2/R^2$; $I_0(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка. В общем случае параметром, обрезающим интегрирование по глубине x' и соответственно координате y , является длина затухания ультразвука.

Далее рассмотрим доплеровские спектры для потоков вида $V(x)=V_0(1-x^{n/2})$, где V_0 – максимальная скорость; $n \geq 2$ ($n=2$ соответствует течению Пуазейля). Тогда после очевидной при $l_F/(\alpha b) \gg 1$ замены

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2l_F}{a} \exp \left[-\left(\frac{2l_F}{a} \text{ctg} \theta \Omega \right)^2 \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \delta(\text{ctg} \theta \Omega) = \frac{1}{\text{ctg} \theta} \delta(\Omega) \quad (23)$$

и интегрирования с δ -функцией находим [16]

$$S(\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{n} \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle a \frac{(\pi ARk^2)^2}{\omega_0 \sin \theta} \times$$

$$\times \frac{l_F^3}{(l_F^2 + l_0^2)^{3/2}} \frac{v}{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1-2/n}} \times$$

$$\times I_0 \left(\frac{2R^2}{a^2} \frac{l_F^2}{l_F^2 + l_0^2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/n} \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{2R^2}{a^2} \frac{l_F^2}{l_F^2 + l_0^2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/n} \right\}, \quad (24)$$

где $\omega_0=2kV_0 \cos \theta$ – “максимальная” частота доплеровского сдвига, отвечающая максимальной

скорости течения V_0 . Согласно общему выражению (24) ширина спектра слабо зависит от глубины l_0 и при неизменном l_0 как функция безразмерной переменной ω/ω_0 не зависит от угла падения волн.

Из формулы (24) следует также, что при соизмеримых величинах R и a скорость роста спектральной плотности мощности по мере приближения частоты к “максимальному” значению ω_0 определяется либо острой степенной функцией (при $n > 2$), либо медленно изменяющимся с частотой и конечным при $\omega=\omega_0$ произведением экспоненциальной и бесселевой функций (течение Пуазейля). Такое отличие спектральных характеристик доплеровского отклика для течения Пуазейля связано с тем, что течения с $n > 2$ характеризуются более наполненными профилями скорости по поперечному сечению. Лишь малая часть объема на периферии таких течений имеет низкие скорости (рис. 3, а).

В предельном случае широких пучков волн $R/a \rightarrow 0$ общее выражение (24) переходит в формулу спектральной мощности доплеровского сигнала

$$S(\omega) = 2\sqrt{\pi} \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle a \frac{(\pi ARk^2)^2}{\omega_0 \sin \theta} \times$$

$$\times \frac{l_F^3}{(l_F^2 + l_0^2)^{3/2}} \frac{v}{n \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1-2/n}}, \quad (25)$$

которая отличается от приведенной в [1] только размерным множителем. В соответствии с этим выражением спектр для течения Пуазейля равен мерен вплоть до “максимальной” частоты.

С ростом радиуса потока низкочастотные составляющие спектра уменьшаются из-за частичной потери мощности сигнала от медленно движущихся краевых областей с большими значениями z . В результате слабая зависимость от частоты (для течения Пуазейля) сменяется для более наполненных профилей более острой степенной зависимостью с показателем степени $1/n-1$. Действительно, подставляя в формулу (24) асимптотику функции Бесселя мнимого аргумента при больших значениях аргумента [40]

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \times$$

$$\times \left[q1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8x} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{128x^2} - \dots \right]$$

и ограничиваясь главным членом разложения, на-

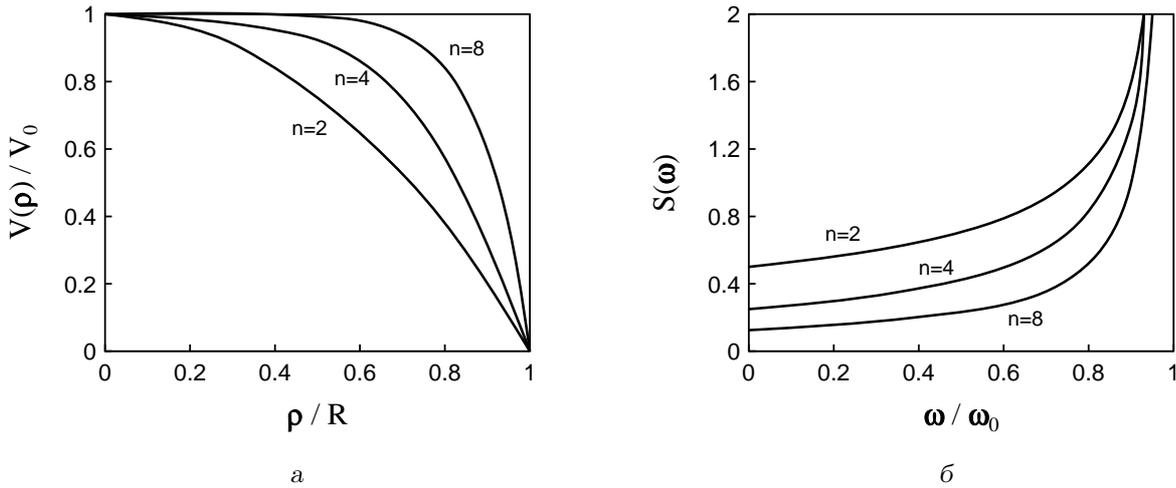


Рис. 3. Профили скорости потока вида $V(\rho) = V_0[1 - (\rho/R)^n]$ при значениях $n = 2, 4, 8$ (а) и соответствующие им формы нормированных спектров (26) для узких пучков волн (б)

ходим [16]

$$S(\omega) = \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle R \frac{(\pi A a k^2)^2}{\omega_0 \sin \theta} \times \frac{l_F^2}{l_F^2 + l_0^2} \frac{v}{n \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1-1/n}}. \quad (26)$$

Спектральные кривые (26) при разных значениях n показаны на рис. 3, б.

Отметим, что для области частот $\omega \geq \omega_0$ асимптотическая оценка интеграла (22) по методу Лапласа приводит к экспоненциальному убыванию спектральной плотности мощности $S(\omega)$ [16]. Наличие в спектре составляющих с частотой выше “максимальной” является проявлением локальных дифракционных эффектов распространения волн, а именно, конечной ширины спектра линии тока с максимальной скоростью. Физически понятен также результат, который может быть получен из выражения (22) для “поршневого” потока с постоянной по сечению скоростью V_0 . В этом случае величина Ω в показателе подынтегральной экспоненты не зависит от переменной интегрирования. Остающийся интеграл есть некоторая константа, не зависящая от частоты, поэтому спектр мощности может быть записан как

$$S(\omega) = S(\omega_0) e^{-\Omega^2/(2\sigma_0^2)}, \quad (27)$$

где $S(\omega_0)$ – амплитудное значение спектра. Легко видеть, что ширина полного спектра тем больше, чем уже начальный пучок волн и соответственно

больше его дифракционная расходимость. С ростом ширины пучка спектр сужается. В частности, приближению геометрической акустики соответствует предельный случай $l_F/a = \pi a/\lambda \rightarrow \infty$. Тогда для “поршневого” потока спектр мощности (27) переходит в δ -функцию на частоте $\omega = \omega_0$. Это соответствует классическому рассмотрению эффекта Доплера для плоских волн [35].

2.3. Зависимость спектра линии тока от взаимной конфигурации падающего и рассеянного пучков волн

Для доплеровских методов с использованием непрерывного излучения, наряду с эффектами дифракции, наиболее существенным является влияние на спектры конфигурации применяемых ультразвуковых пучков волн. Это связано с тем, что изменение, например, угла Φ между осями падающего и отраженного пучков приводит к изменению величины образованного ими в области движения R измерительного объема и конфигурации волновых фронтов в нем (рис. 4). Если измерительный объем внутри области пересечения ультразвуковых пучков выходит за пределы области R , то его границы включают в себя соответствующий участок ее границы. Иными словами, измерительный объем оказывается локально ограниченным не только в поперечном, но и (до некоторой степени) в продольном направлении. При этом спектр сигнала доплеровского отклика зависит от угла Φ и разности $l_0 - f$, характеризующей взаимное расположение движущейся среды и точки пересечения f осей падающего и отраженного

пучков волн.

Записывая функцию распределения чувствительности по полю в виде произведения амплитуды падающих волн и функции чувствительности преобразователя к рассеянным волнам в приближении параболического уравнения дифракции, несложно получить выражения для функций $\psi(w)$ и $f(w)$. Обе эти величины в рассматриваемом случае являются функциями координат \vec{r}' и \vec{r}'' , причем начало отсчета “штрихованной” системы координат находится в центре излучающего элемента преобразователя, а дважды “штрихованной” – в центре принимающего элемента. Безразмерная частотная переменная

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_d} - 1 = \frac{\omega}{2kV \cos \theta \cos(\Phi/2)} - 1$$

определяется в данном случае через частоту доплеровского сдвига ω_d , которая равна нулю при встречном расположении ультразвуковых пучков волн ($\Phi = \pi$).

С целью упрощения выкладок и нахождения аналитических выражений для спектров будем полагать Y' , Y'' , $Z \ll 1$. Тогда согласно формулам (8), (9) безразмерная величина $\gamma(\vec{r}', \vec{r}'')$ отличается от $\cos \Phi$ лишь малыми дифракционными добавками. Поэтому разность $\gamma(\vec{r}', \vec{r}'') - \cos \Phi$ имеет порядок малости величин Y' , Y'' и Z . Неравенство $Z \ll 1$ накладывает ограничения только на поперечные размеры области R . Более сложна ситуация с условиями Y' , $Y'' \ll 1$, поскольку Y' и Y'' зависят от величины w_0 , которая сама определяется из уравнения, содержащего Y' и Y'' ввиду зависимости от этих величин функции $f(w)$. Как результат, требуется найти самосо согласованное решение $W_0 = w_0/l_F$ уравнения для точки перевала вида

$$\begin{aligned} & \left[(Y'^2 + Z^2) \frac{X' + i}{X' - i} + \alpha^2 B^2 \right] \frac{\cos(\theta + \Phi/2)}{X'^2 + 1} + \\ & + \left[Y''^2 + Z^2 \right] \frac{X'' + i}{X'' - i} + \alpha^2 B^2 \left] \frac{\cos(\theta - \Phi/2)}{X''^2 + 1} - \\ & - 2Y' \frac{X' + i}{X'^2 + 1} \sin(\theta + \Phi/2) - \\ & - 2Y'' \frac{X'' + i}{X''^2 + 1} \sin(\theta - \Phi/2) + \\ & + 4\Omega \cos \theta \cos(\Phi/2) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В линейном по малым Y' , Y'' , Z и B приближении решение уравнения (28) несложно найти для

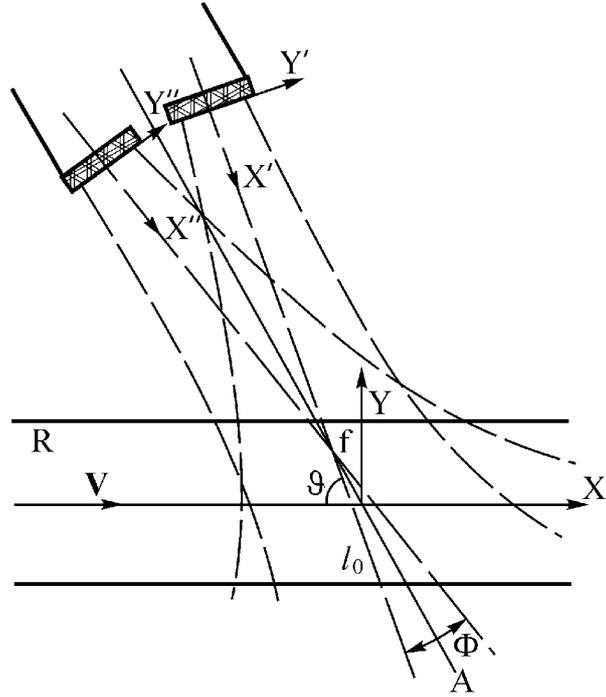


Рис. 4. Двухэлементный ультразвуковой преобразователь и конфигурация формируемого им в области движения среды измерительного объема

области частот вблизи центральной частоты доплеровского сдвига ω_d . Например, для величины Y' в этом случае имеем

$$\begin{aligned} Y' &= (L_0 - F) \sin(\Phi/2) \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{2 \sin(\theta + \Phi/2) \cos \theta \sin(\Phi/2)}{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)} \right\} - \\ & - \frac{Y \sin(\theta - \Phi/2) \sin \Phi}{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)} + \\ & + 2\Omega \sin(\theta + (\Phi/2)) \times \\ & \times \frac{(L_0 - i \cos(\Phi/2)) \cos \theta}{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение для Y'' получается из выражения для Y' заменой $\Phi \rightarrow -\Phi$.

Из выражения (29) следует, что условие самосо согласования Y' , $Y'' \ll 1$ выполняется, если $L_0 - F$, $Y \ll 1$. Таким образом, условие применимости решения и вытекающих из него выражений для спектров мощности оказывается независимым от угла Φ и сводится к малости поперечных размеров области R и величины $l_0 - f$ по сравнению с дли-

ной зоны Френеля. В результате с учетом квадратичности $\mathbf{Re} f(w_0)$ по малым $Y, Z, \alpha B, L_0 - f$ и Ω из формулы (15) находим [17]

$$\begin{aligned}
 S(\omega, y, z) &= \frac{\pi(Aak)^2}{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)} \times \\
 &\times \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho} \cos \Phi)^2 \right\rangle \frac{l_F^3 \cos^3(\Phi/2)}{[l_F^2 \cos^2(\Phi/2) + l_0^2]^{3/2}} \frac{v}{V} \times \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{8l_F^2}{a^2} \frac{\cos^2 \theta \cos^2(\Phi/2)}{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)} \times \right. \\
 &\quad \times \left[\Omega^2 + \frac{z^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{l_F^2 \cos^2(\Phi/2) + l_0^2} \times \right. \\
 &\quad \times \frac{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)}{2 \cos^2 \theta} + \\
 &\quad \left. \left. + \frac{[y - (l_0 - f) \sin \theta]^2}{l_F^2 \cos^2(\Phi/2) + l_0^2} \frac{\sin^2 \Phi}{4 \cos^2 \theta} \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Особенностью спектра мощности от линии тока (30), имеющего гауссову форму (20), является зависимость его ширины от угла Φ :

$$B_d = 4\sigma\omega_d = 2kV \frac{a}{l_F} \times
 \tag{31}$$

$$\times [\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)]^{1/2}.$$

Непосредственное дифференцирование по Φ показывает, что для всех углов $0 < \Phi < \pi$ безразмерная ширина спектра σ с ростом Φ увеличивается: $\partial\sigma/\partial\Phi > 0$. Для размерной ширины спектра из формулы (31) получаем

$$\frac{\partial}{\partial\Phi} B_d = kV \frac{a}{l_F} \frac{\cos 2\theta \sin \Phi}{[\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)]^{1/2}}.$$

При $0 < \theta < \pi/4$ с ростом угла Φ между падающим и отраженным пучками волн монотонно убывает величина измерительного объема и, как следствие, время пролета рассеивателей ультразвука. При неизменной кривизне волновых фронтов это означает увеличение временипролетной составляющей ширины спектра. Наоборот, при $\pi/4 < \theta < \pi/2$ с ростом угла Φ измерительный объем в направлении движения рассеивателей увеличивается, а ширина доплеровского спектра уменьшается.

При увеличении разности $l_0 - f > 0$ (например, посредством смещения преобразователя как целого вдоль оси A , см. рис. 4), можно было бы ожи-

дать сужения спектра в результате дифракционного увеличения измерительного объема. Однако при этом кривизна волновых фронтов, пересекаемых одной и той же линией тока, также увеличивается. Таким образом, полная ширина спектра формируется под действием двух противоположных тенденций, что приводит к ее независимости от параметра $l_0 - f$ и глубины залегания линии тока $l_0 \sin \theta - y$. Заметим, наконец, что амплитуда спектра линии тока экспоненциально зависит от положения $(l_0 - f) \sin \theta - y$ линии тока относительно точки пересечения пучков волн f , причем сама зависимость определяется в основном углом Φ . В результате максимален доплеровский отклик от линии тока, проходящей через точку f , где максимальна функция чувствительности.

2.4. Влияние взаимной конфигурации пучков волн на полный спектр

Свойства полного спектра $S(\omega)$ хорошо видны на примере аксиально-симметричных течений. В этом случае при интегрировании спектра (30) по объему возникает интеграл по углу φ цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{4l_F^2 \cos^2(\Phi/2)}{l_F^2 \cos^2(\Phi/2) + l_0^2} \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2 \varphi - \right. \\
 &\quad - \frac{2l_F^2 \cos^2 \Phi/2}{l_F^2 \cos^2(\Phi/2) + l_0^2} \frac{R^2}{a^2} \left(\frac{\rho}{R} \cos \varphi - \frac{l_0 - f}{R} \sin \theta \right)^2 \times \\
 &\quad \left. \times \frac{\sin^2 \Phi}{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)} \right\} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Аналитическое его вычисление в общем виде не представляется возможным, поэтому ограничимся рассмотрением двух важных предельных случаев. Если расстояние от точки пересечения осей пучков волн до начала системы координаты невелико по сравнению с радиусом потока $|l_0 - f| \ll R$, то искомый интеграл I несложно свести к табличному для цилиндрической функции Бесселя мнимого аргумента. Переходя аналогично выражению (23) к δ -функции в подынтегральном выражении и интегрируя по ρ с δ -функцией, приходим к следующе-

му выражению для спектра [17]:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{2\sqrt{2\pi} \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho} \cos \Phi)^2 \rangle a(\pi ARk^2)^2}{[\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)]^{1/2}} \times \\
 &\times \frac{l_F^3}{(l_F^2 + l_0^2)^{3/2}} v \frac{I_0 \left\{ a_- \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/n} \right\}}{n\omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1-2/n}} \times \\
 &\times \exp \left\{ -a_+ \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/n} \right\} \equiv \\
 &\equiv C \frac{I_0 \left\{ a_- \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/n} \right\}}{n\omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1-2/n}} \times \\
 &\times \exp \left\{ -a_+ \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/n} \right\},
 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 a_{\pm} &= \frac{l_F^2 \cos^2(\Phi/2)}{l_F^2 \cos^2(\Phi/2) + l_0^2} \frac{R^2}{a^2} \times \\
 &\times \left[2 \pm \frac{\sin^2 \Phi}{\sin^2(\theta + \Phi/2) + \sin^2(\theta - \Phi/2)} \right],
 \end{aligned}$$

где C – размерная постоянная величина.

Выражение (32) является прямым обобщением формулы (24) на случай конечных углов Φ . Понятно, что очень широкие пучки волн при любых углах пересечения формируют в области пересечения измерительный объем достаточно больших размеров. Следовательно, в этом предельном случае функциональная зависимость спектра мощности от частоты по-прежнему описывается формулой (25), что и вытекает непосредственно из выражения (32) при $R/a \rightarrow 0$. Главной отличительной чертой спектра (32) является более эффективное вырезание низкочастотных составляющих при увеличении радиуса потока. Действительно, после подстановки в формулу (32) асимптотики функции Бесселя при больших значениях аргумента находим

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{C}{\sqrt{2\pi a_-}} \times \\
 &\times \frac{\exp \left\{ -(a_+ - a_-) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/n} \right\}}{n\omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1-1/n}}.
 \end{aligned} \quad (33)$$

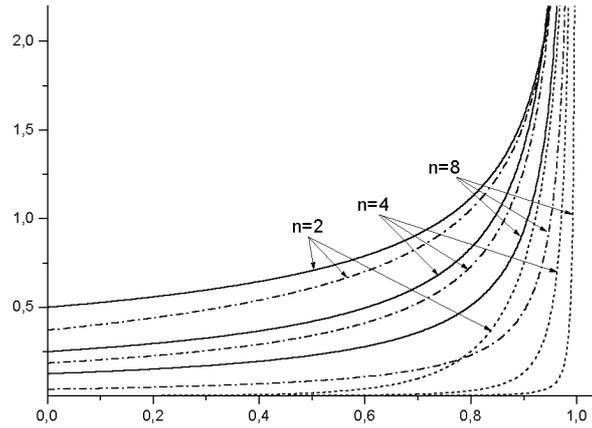


Рис. 5. Формы нормированных спектров (33) для пучков непрерывных волн различной ширины:

сплошные – $R/a=0$, штриховые – $R/a=1$, штрих-пунктирные – $R/a=5$

Спектральные кривые (33) при разных значениях n представлены на рис. 5. При этом нормировка выбрана так, чтобы кривые с $R/a=0$ совпадали при разных n с соответствующими кривыми на рис. 3, б. При расчете принято $l_0/a=20$, $l_F/a=50$, $\theta=60^\circ$, $\Phi=30^\circ$. В соответствии с выражением (33) величина низкочастотных составляющих спектра определяется не только и не столько степенной функцией, как это было при $\Phi=0$, сколько экспоненциальной. Такой результат является прямым следствием большей локализации измерительного объема, в который в основном попадают высокоскоростные линии тока крови вблизи оси сосуда. В данном случае уменьшается вклад в спектр не только линий тока с большой координатой z , но и линий тока, находящихся на большом расстоянии от точки f вдоль оси A' . Экспоненциальное убывание в низкочастотной области тем заметнее, чем больше отношение R/a и (для не слишком больших углов Φ) величина $\sin^2 \Phi$.

В целом же изменения относительной ширины доплеровского спектра при $\Phi=0$ и $\Phi \neq 0$ с уменьшением отношения R/a идентичны – спектр сужается и его сужение сильнее при $\Phi \neq 0$ (см., например, иллюстрацию в [2] при доплеровском зондировании пучком непрерывных волн бедренной, подколенной и икроножной артерий, которые имеют в норме существенно различные диаметры).

Рассмотрим теперь обратный предельный случай $|l_0 - f| \gg R$, когда точка пересечения осей пучков ультразвуковых волн находится вдали от области R . Тогда при достаточно больших углах Φ в показателе экспоненты интеграла I можно пренебречь членами, пропорциональными ρ^2 . Остав-

шийся интеграл по φ сводится к функции Бесселя, что приводит к выражению вида

$$S(\omega) = C \exp \left\{ -(a_+ - a_-) \frac{(l_0 - f)^2}{R^2} \sin^2 \theta \right\} \times I_0 \left\{ 2(a_+ - a_-) \frac{l_0 - f}{R} \sin \theta \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/n} \right\} \times \frac{1}{n\omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1-2/n}}. \quad (34)$$

Прежде всего отметим, что аналогично формуле (32) выражение (34) при $a \gg |l_0 - f| \gg R$, когда измерительный объем полностью охватывает область течения, переходит в спектр мощности доплеровского сигнала для широких пучков волн. Однако, в отличие от соотношения (32), сужение пучков волн $a \sim R \ll |l_0 - f|$ не приводит к потере мощности сигнала от медленно движущихся периферийных частей потока и эффективно вырезанию низкочастотной части спектра (33). Наоборот, имеет место общее уменьшение мощности сигнала с одновременным экспоненциальным ростом низкочастотных составляющих. Заменяя функцию Бесселя ее асимптотикой, находим, что спектр мощности с точностью до постоянного размерного множителя описывается функцией вида

$$\frac{\exp \left\{ 2(a_+ - a_-) \frac{|l_0 - f|}{R} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/n} \right\}}{n\omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1-3/(2n)}}. \quad (35)$$

Существенное увеличение вклада низкочастотных составляющих спектра (35), определяемое отношением $(l_0 - f)/R$ и углами θ и Φ , свидетельствует о резком уменьшении доли той части течения, которая находится в быстро движущейся центральной области потока. Иными словами, наибольший вклад в полный спектр здесь дают наиболее близкие к точке пересечения пучков волн линии тока с малой скоростью. Ввиду четности функции Бесселя этот вывод справедлив при любом знаке разности $l_0 - f$. Эффект резкого возрастания вклада низкочастотных составляющих при зондировании потоков крови вблизи медленно движущейся стенки сосуда получил название “отклика стенки”, представляющего собой мощную помеху [1, 2].

3. ИМПУЛЬСНАЯ ДОПЛЕРОВСКАЯ ЭХОСКОПИЯ

3.1. Спектральные характеристики при импульсном излучении

В приближении классического потенциала скоростей для акустических волн различной конфигурации показано, что зависимость времяпролетного и полного уширения спектра от длительности зондирующих импульсов тем сильнее, чем меньше угол θ [9, 11, 12]. Применение развитого подхода позволяет непосредственно установить относительный вклад каждого из физических факторов в ширину спектра доплеровского отклика, выяснить критерий применимости полученных предельных результатов и повысить информативность такого параметра как дисперсия спектров.

Будем полагать, что зондирующие импульсы имеют достаточно большую длительность и, соответственно, относительно узкий спектр. В этом случае распространение и рассеяние любого участка излучаемого импульса происходит так же, как при непрерывном излучении. Это дает возможность использовать выражение (6). Зависимость же амплитуды доплеровского сигнала от времени, связанную с импульсным характером излучения, можно учесть, переопределив соответствующим образом функцию чувствительности по полю $G'(\vec{r})$ [1]:

$$G'_p(\vec{r}) = G'(\vec{r})b \left(T_0 - \frac{2x'(\vec{r})}{c} \right), \quad (36)$$

где $b(t)$ – огибающая зондирующих импульсов. Здесь подразумевается общепринятый алгоритм обработки доплеровских сигналов, при котором демодулированный сигнал стробируется с некоторой задержкой по времени T_0 относительно каждого момента излучения импульсов. Величина задержки определяет точку зондирования $l_0 = cT_0/2$, в которую удобно поместить начало системы координат $\vec{r} = (x, y, z)$.

При нахождении доплеровских спектров воспользуемся выражением (10), ограничимся рассмотрением импульсов с гауссовой огибающей $b(t) = \exp\{-(2ct/(N\lambda))^2\}$ (N – число периодов колебаний в импульсе по уровню e^{-1}) и применим метод перевала. Тогда с учетом выражения (36)

уравнение для точки перевала есть

$$\frac{1}{X'^2 + 1} \left[(Y'^2 + Z^2) \frac{X' + i}{X' - i} + \alpha^2 B^2 \right] - 2Y' \frac{X' + i}{X'^2 + 1} \operatorname{tg} \theta + i \left(\frac{4}{\pi N \alpha B} \right)^2 (L_0 - X') + 2\Omega = 0. \quad (37)$$

Для центральной части спектра решение уравнения (37) в линейном относительно Y' приближении при малых Y , Z и αB имеет вид

$$W_0 = \frac{1}{\frac{2l_F}{l_0 - il_F} \sin^2 \theta + i \left(\frac{4l_F}{\pi Na} \right)^2 \cos^2 \theta} \times \left\{ 2\Omega \cos \theta - y \sin \theta \cos \theta \times \left[\frac{2}{l_0 - il_F} - \frac{i}{l_F} \left(\frac{4l_F}{\pi Na} \right)^2 \right] \right\}. \quad (38)$$

Проводя с помощью формулы (38) асимптотическую оценку Фурье-образов в выражении (10), приходим к следующему выражению для доплеровского спектра от линии тока [18]:

$$S(\omega, y, z) = \frac{\pi \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle (Aa^2 k^2)^2}{16 \cos^2 \theta [\sigma_0^4 + (\pi N)^{-4} (l_0/l_F)^2]^{1/2}} \frac{v}{V} \times \frac{l_F}{(l_F^2 + l_0^2)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\Omega^2}{2\sigma_0^2} - \frac{4l_F^2}{l_F^2 + l_0^2} \frac{z^2}{a^2} - \frac{4\sigma^2 (\pi N)^{-2}}{\sigma_0^4 + (\pi N)^{-4} (l_0/l_F)^2} \times \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{y}{a} - \frac{\operatorname{tg} \theta a l_0}{8l_F^2 \sigma_0^2} \Omega \right]^2 \right\}, \quad (39)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{a^2}{8l_F^2} \operatorname{tg}^2 \theta + (\pi N)^{-2}. \quad (40)$$

Полный спектр мощности доплеровского сигнала при зондировании среды на глубине l_0 находим интегрированием по линиям тока. Если характерный масштаб изменения скорости движения V существенно больше величин a и $N\lambda$, характеризующих размеры измерительного объема, то интегрирова-

ние приводит к простому результату [18]:

$$S(\omega) = \frac{\pi \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle (\pi Aa^2 k^2)^2}{64\sigma_0 |\cos \theta|} \times \frac{v}{V} \frac{Na^2}{l_F^2 + l_0^2} \exp \left(-\frac{\Omega^2}{2\sigma_0^2} \right). \quad (41)$$

Выражение (40) для дисперсии спектра мощности (41) дает ясное представление о соотношении дифракционной и времяпролетной импульсной составляющих ширины спектра. Прежде всего отметим, что для рассматриваемых нефокусированных пучков волн эта величина не зависит от глубины зондирования. В пределе непрерывных волн ($N \gg 1$) ширина спектра (40) совпадает с выражением, описывающим ширину спектра при “поршневом” течении. Если же зондирование производится короткими импульсами при небольших углах θ , то ширина спектра для однородных по скорости потоков определяется только их длительностью. Особенностью выражения (40) является то, что оно в принципе позволяет по экспериментально измеренным значениям ω_d и σ_0 однозначно найти угол зондирования θ и абсолютное значение скорости, что весьма важно для медицинских систем ультразвуковой доплеровской диагностики.

3.2. Влияние фокусирования на доплеровские спектры

В импульсно-доплеровских системах ультразвуковой медицинской диагностики, как правило, применяется фокусированный ультразвук, что позволяет улучшить поперечную разрешающую способность. Это означает, что изменение направления волнового вектора и ширины пучков, обусловленные эффектами дифракции, имеет более сложную зависимость от глубины зондирования (рис. 6). Граничному условию с гауссовой аподизацией амплитуды колебаний и сферическим фокусированием волн отвечает решение параболического уравнения вида [26, 41]

$$G'_t(\vec{r}) = \frac{P_0}{\{(1 - \gamma x'/l_F)^2 + x'^2/l_F^2\}^{1/2}} \times \exp \left\{ -i \operatorname{arctg} \frac{x'}{l_F - \gamma x'} - i\pi H(x' - R) \right\} \times \exp \left\{ \frac{l_F^2}{\alpha^2 b^2} \frac{y'^2 + z'^2}{(l_F - \gamma x')^2 + x'^2} \right\} \times \left[-1 + i \left(\frac{x'}{l_F} + \gamma^2 \frac{x'}{l_F} - \gamma \right) \right], \quad (42)$$

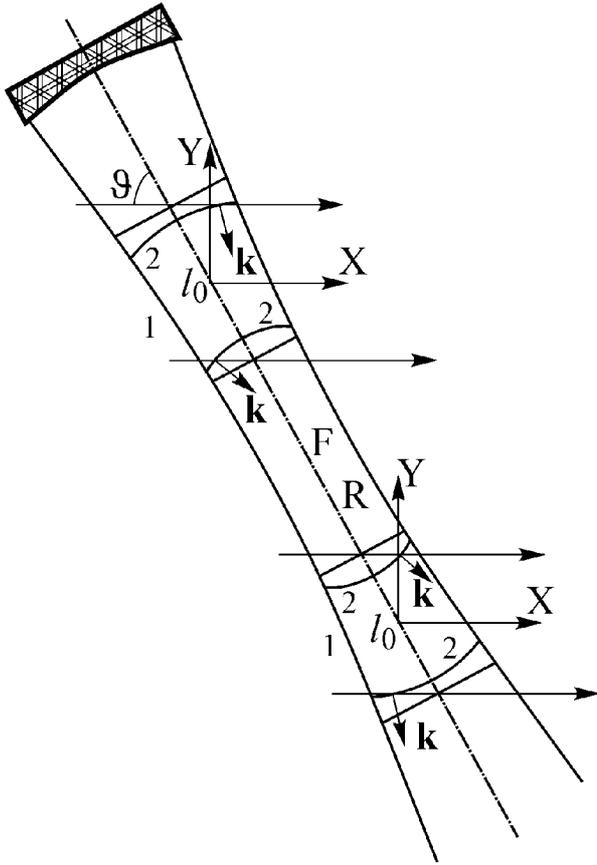


Рис. 6. Схематическое изображение зондирующего импульсного пучка волн, показывающее различное возможное положение линий тока со скоростью V относительно измерительного объема (1) и волновых фронтов (2)

где $\gamma = l_F/R$ – степень фокусирования пучка; R – радиус кривизны излучающей поверхности; $H(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Заметим, что наличие разрывной функции Хевисайда в формуле (42) вытекает из характера области определения арктангенса и не свидетельствует об истинном разрыве фазы ультразвуковых волн.

Функция распределения чувствительности $G'(\vec{r})$ может быть по-прежнему записана в виде (36). Поэтому в соответствии с выражением (42) имеем

$$G'(\vec{r}) = A \frac{\exp\left\{-2i \operatorname{arctg} \frac{x'}{l_F - \gamma x'}\right\}}{(1 - \gamma x'/l_F^2)} \times \exp\left\{\frac{2l_F^2}{\alpha^2 b^2} \frac{y'^2 + z'^2}{(l_F - \gamma x')^2 + x'^2}\right\} \times \left[-1 + i \left(\frac{x'}{l_F} + \gamma^2 \frac{x'}{l_F} - \gamma\right)\right]. \quad (43)$$

Здесь предполагается, что излучает и принимает волны одна и та же апертура W . Выражение (43) определяет функции $f(w)$ и $\psi(w)$, что дает возможность вычислить спектр от линии тока с помощью формулы (15) после решения уравнения для точки перевала,

$$\frac{1}{X'^2 + (1 - \gamma X')^2} \left[(Y'^2 + Z^2) \times \frac{[X' - \gamma(1 - \gamma X') + i]^2}{(1 - \gamma X')^2 + X'^2} + \alpha^2 B^2 \right] - 2Y' \frac{X' - \gamma(1 - \gamma X') + i}{(1 - \gamma X')^2 + X'^2} \operatorname{tg} \theta + i \left(\frac{4}{\pi N \alpha B} \right)^2 (L_0 - X') + 2\Omega = 0.$$

В результате, по аналогии с выражением (39) и в том же приближении, приходим к следующему выражению для спектральной плотности мощности линии тока [19]:

$$S(\omega, y, z) = \frac{\pi \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle (1 + \gamma^2)^{1/2} (Aa^2 k^2)^2}{16 \cos^2 \theta [\sigma_0^4 + (\pi N)^{-4} (l_0/l_F)^2]^{1/2}} \times \frac{v}{V} \frac{l_F}{\{(l_F - \gamma l_0)^2 + l_0^2\}^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\Omega^2}{2\sigma_0^2}\right\} - \frac{4(1 + \gamma^2)\sigma_0^2 (\pi N \cos \theta)^{-2}}{\sigma_0^4 + (\pi N)^{-4} [(1 + \gamma^2)l_0/l_F - \gamma]^2} \times \left\{ \frac{y}{a} - \frac{\sin \theta [(1 + \gamma^2)l_0/l_F - \gamma] a}{8l_F \sigma_0^2} \Omega \right\}^2 - \frac{4}{(1 - \gamma l_0/l_F)^2 + l_0^2/l_F^2 \frac{z^2}{a^2}} \}. \quad (44)$$

Здесь

$$\sigma_0^2 = \frac{a^2}{8l_F^2} (1 + \gamma^2) \operatorname{tg}^2 \theta + (\pi N)^{-2}. \quad (45)$$

Выражения (44) и (45) представляют собой полное решение задачи о влиянии фокусирования ультразвуковых волн на доплеровский спектр сигнала линии тока. Выражение (45) позволяет без специального рассмотрения получить ширину спектра при непрерывном излучении фокусирован-

ных волн:

$$B_d = 4\sigma_0\omega_d = 2kV \frac{W}{2^{1/2}l_F} (1 + \gamma^2)^{1/2} \sin \theta. \quad (46)$$

В отличие от выражения (1), эта формула при слабом фокусировании переходит в соотношение (21) и предсказывает отличную от нуля ширину спектра. Как известно, истинная фокальная длина F отличается от геометрической R и совпадает с ней только в пределе геометрической акустики [27]. Из выражения (42) следует, что амплитуда пучка с гауссовой аподизацией максимальна в точке $F = \gamma l_F (1 + \gamma^2)^{-1}$, поэтому выражение (46) может быть представлено в виде, аналогичном (1):

$$B_d = 2kV \frac{W}{(2RF)^{1/2}} \sin \theta. \quad (47)$$

Зависимость ширины полного спектра доплеровского отклика от глубины зондирования появляется только при динамическом фокусировании: $F = l_0$. Тогда при сильном фокусировании и больших углах зондирования из формулы (45) получаем выражение $\sigma_0 = W \operatorname{tg} \theta / (4\sqrt{2}l_0)$, которое достаточно хорошо согласуется, например, с результатом $\sigma_0 = W \operatorname{tg} \theta / (2\sqrt{10}l_0)$, полученным для дальней зоны излучения многоэлементного линейного фокусирующего преобразователя с гауссовой аподизацией [11]. Несколько меньшая ширина этого спектра объясняется более слабым цилиндрическим фокусированием, приводящим к уменьшению времяпролетного уширения.

Решение (44) справедливо для центральной части спектра мощности доплеровского сигнала от линии тока, расположенной на небольшом по сравнению с l_F расстоянии от точки зондирования l_0 . В отсутствие градиентов скорости движения такой точности достаточно для вычисления полного спектра ввиду экспоненциального убывания $S(\omega, y, z)$ с расстоянием [19]:

$$S(\omega) = \frac{\pi \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle (\pi A a^2 k^2)^2}{64\sigma_0 |\cos \theta|} \frac{v}{V} \times \quad (48)$$

$$\times \frac{N a^2}{(l_F - \gamma l_0)^2 + l_0^2} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2\sigma_0^2}\right).$$

В ультразвуковой диагностике импульсно-доплеровские методы используют для измерения скорости движения крови в выделенном объеме кровеносного сосуда, где градиенты скорости невелики (например, вблизи его оси). Ширина спектра в этом случае зависит только от параметров ультразвукового излучения и благодаря

минимальному влиянию градиентов скорости оказывается меньше, чем при непрерывном излучении ультразвука за исключением случая (26) узких пучков волн [2].

Выражения (48) и (45) переходят соответственно в (41) и (40) в предельном случае слабого фокусирования. Фокусирование ультразвуковых волн, динамическое и статическое, приводит к увеличению дисперсии из-за уменьшения измерительного объема. Весьма интересной и важной с точки зрения ультразвуковой диагностики особенностью полученного результата является то, что при статическом фокусировании выражение для дисперсии в пределах своей применимости не зависит от глубины зондирования. Иными словами, статическое фокусирование и импульсный режим излучения не нарушают инвариантности ширины полного спектра.

3.3. Модальная частота доплеровского сдвига

Для анализа свойств спектра линии тока (44) амплитуда спектрального распределения несущественна, поэтому перепишем это выражение в виде

$$S(\omega, y, z) = S_0 \exp\left\{-\frac{\Omega^2}{2\sigma_0^2} - \frac{4(1 + \gamma^2)(\pi N \cos \theta)^{-2} \sigma_0^2}{\sigma_0^4 + (\pi N)^{-4} [(1 + \gamma^2)l_0/l_F - \gamma]^2} \times \right. \quad (49)$$

$$\left. \times \left\{ \frac{y}{a} - \sin \theta [(1 + \gamma^2)l_0/l_F - \gamma] \frac{a\Omega}{8l_F \sigma_0^2} \right\}^2 - \frac{4}{(1 - \gamma l_0/l_F)^2 + l_0^2/l_F^2} \frac{z^2}{a^2} \right\},$$

где $S_0 = S(\omega_d, 0, 0)$ – максимальное значение величины $S(\omega, 0, 0)$. Из второго слагаемого в показателе экспоненты следует, что доплеровский спектр линии тока при импульсном излучении зависит от положения измерительного объема, задаваемого глубиной l_0 , и от координаты линии тока. Дифференцируя выражение (49) по частоте и приравнявая нулю производную, получаем выражение для

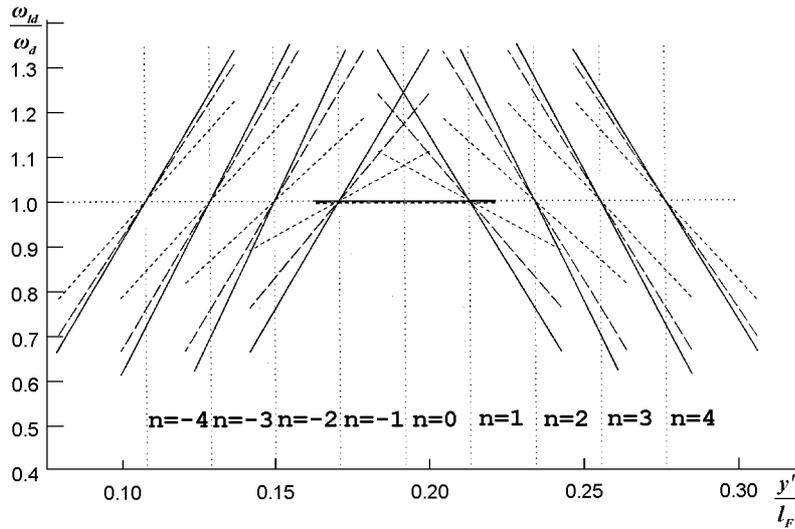


Рис. 7. Зависимость нормированной на ω_d модальной частоты доплеровского сдвига (50) от координаты линии тока при различной глубине зондирования и длительности зондирующих импульсов [21] ($\gamma=5, l_F/a=50$):

сплошные – $N=4$, крупный штрих – $N=8$,
мелкий штрих – $N=16$

моды ω_{ld} спектрального распределения [21]:

$$\omega_{ld} \equiv \omega_d(1 + \Omega_{ld}) = \omega_d \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{\gamma \operatorname{tg} \theta}{\pi N}\right)^2 (l_0 - F)}{F^2 \sigma_0^2 + \left(\frac{\gamma}{\pi N}\right)^2 (l_0 - F)^2 \sin^2 \theta} \frac{y}{\sin \theta} \right\} \quad (50)$$

По сравнению с классической доплеровской частотой ω_d это выражение содержит дополнительный член, который исчезает при $N \rightarrow \infty$ и изменяет свой знак в соответствии с изменением знака произведения $(l_0 - F)y$. Таким образом, при импульсном излучении классическое выражение частоты доплеровского сдвига справедливо только для линии тока с равной нулю координатой y . Исключение из этого правила представляет собой специальный случай совмещенных в пространстве центра измерительного объема и реального фокуса ультразвуковых пучков волн: $l_0 = F$. На рис. 6 показаны два альтернативных положения линии тока относительно центра измерительного объема при двух его различных положениях относительно реального фокуса. Вне центра измерительного объема траектория рассеивающих неоднородностей проходит через ту область объема, где среднее значение угла между вектором \vec{k} и линией тока существенно отличается от угла зондирования θ на оси пучка. Легко видеть, что знак этого отклонения симметричен относительно точки F и анти-

симметричен внутри измерительного объема относительно его центра. Только при совпадающих фокусе и центре измерительного объема величина разности углов равна нулю. Иными словами, в рассматриваемом приближении волновые фронты являются плоскими только в фокальной области.

При больших углах зондирования $\theta \rightarrow \pi/2$, когда согласно формуле (45)

$$\frac{W}{4(2RF)^{1/2}} \operatorname{tg} \theta \gg (\pi N)^{-1}, \quad (51)$$

из разложения (50) находим

$$\omega_{ld} - \omega_d = 2kV \frac{2W^2}{RF} \frac{l_0 - F}{(N\lambda)^2} y \cos \theta. \quad (52)$$

В обратном предельном случае малых углов $\theta \rightarrow 0$ эта разность имеет вид

$$\omega_{ld} - \omega_d = 2kV \frac{\gamma^2(l_0 - F)}{F^2 + \gamma^2(l_0 - F)^2} y \sin \theta. \quad (53)$$

Из выражений (52) и (53) следует, что в обоих предельных случаях зависимость разности частот от глубины зондирования становится пренебрежимо малой. При произвольных значениях угла между осью пучков волн и линиями тока величина разности $\omega_{ld} - \omega_d$ оказывается порядка доплеровской частоты ω_d , по крайней мере, вдали от точки реального фокуса системы. В частности, на рис. 7 показана зависимость модальной частоты Доплера от координаты линии тока $y' = l_0 - y/\sin \theta$ вдоль

оси преобразователя при $\theta = \pi/4$ и для различных положений по глубине l_0 центра измерительного объема, задаваемых формулой

$$l_0^{(n)} = F\{1 + 2\pi\gamma^{-1}\sigma_0(N=4)n\}, \quad -4 \leq n \leq 4.$$

Градиент выражения (50) как функции l_0 достигает максимума при

$$l_0 = F\{1 \pm \pi\gamma^{-1}\sigma_0(N=4)N\}.$$

Таким образом, при длительности импульсов $N=4$ модальная доплеровская частота изменяется с удалением от центра измерительного объема наиболее быстро при глубине зондирования $l_0 = l_0^{(\pm 2)}$, что хорошо видно на рис. 7 [21].

Вариативность частоты доплеровского сдвига для линии тока представляет собой наиболее явное проявление влияния кривизны волновых фронтов. Приведенное объяснение смысла полученных результатов, по сути, основано на свойствах функции чувствительности для формируемых ультразвуковых полей, поэтому все другие случаи могут быть физически интерпретированы аналогичным образом. Например, существование боковых лепестков функции чувствительности может привести к дополнительным спектральным максимумам из-за отличия направления вектора \vec{k} внутри боковых лепестков от его направления на оси пучка. Два дополнительных пика такого рода, симметричных относительно “основной” модальной доплеровской частоты, устойчиво наблюдались в экспериментах при угле зондирования линий тока $\theta = 90^\circ$, когда модальная доплеровская частота для главного лепестка функции чувствительности равна нулю [15]. Судя по достаточно большой ширине, эти спектральные максимумы обусловлены именно узкими боковыми лепестками функции распределения чувствительности по полю.

3.4. Теорема инвариантности для доплеровского спектра линии тока

Зависимость дисперсии доплеровского спектра линии тока от глубины зондирования и фокусного расстояния несложно получить, выражая спектр (49) непосредственно через введенную посредством соотношения (50) величину Ω_{ld} [21]:

$$S(\omega, y, z) = S(\omega_{ld}, y, z) \exp\left\{-\frac{(\Omega - \Omega_{ld})^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \sigma_0^2 - \frac{W^2}{32RF} \operatorname{tg}^2 \theta \times \\ \times \frac{\gamma^2 (\pi N)^{-2} (l_0 - F)^2}{F^2 \sigma_0^2 + \gamma^2 (\pi N)^{-2} (l_0 - F)^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Функция $S(\omega_{ld}, y, z)$ определяет зависимость амплитуды доплеровского спектра линии тока от ее координат относительно измерительного объема. Из формулы (55) следует, что в точке фокуса величина дисперсии достигает своего максимального значения, несмотря на то, что вклад кривизны волновых фронтов минимизируется, как это следует из проведенного выше анализа. Следовательно, этот результат обусловлен наименьшей шириной пучков волн в фокусе, что приводит к наибольшему времяпролетному уширению спектра.

При больших углах зондирования (51) из выражения (55) получаем

$$\begin{aligned} B_d = 4\sigma\omega_d = 2kV \left\{ \frac{W^2}{2RF} \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + 16(\pi N)^{-2} \left[1 - \gamma^2 \left(\frac{l_0}{F} - 1 \right)^2 \right] \cos^2 \theta \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (56)$$

В обратном предельном случае, когда время пролета определяется не шириной пучков волн, а длительностью зондирующих импульсов, ширина спектра будет

$$\begin{aligned} B_d = 2kV \left\{ \frac{W^2}{2RF} \left[1 + \gamma^2 \left(\frac{l_0}{F} - 1 \right)^2 \right]^{-1} \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \theta + 16(\pi N)^{-2} \cos^2 \theta \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Таким образом, ширина доплеровского спектра не зависит от глубины зондирования в обоих предельных случаях, остается конечной и определяется либо шириной пучков волн, либо длительностью зондирующих импульсов.

Результаты численного расчета величины дисперсии спектра (55) приведены на рис. 8. Зависимость дисперсии от положения измерительного объема относительно точки фокуса при $\gamma = 2.5$, $\gamma = 5$ и $\gamma = 10$ показана при том же угле θ и отношении l_F/a , что и на рис. 7. Из рисунка видно, что длина зондирующих импульсов N , равно как и степень фокусирования γ , определяет не только скорость изменения модальной доплеровской частоты, но и скорость изменения дисперсии спектра линии тока в окрестности точки экстремума $l_0 = F$. Таким образом, инвариантность спектральной ширины при использовании импульсно модулированных фокусированных пучков не является свойством спектра каждой отдельной линии тока, а лишь свойством интегрального спе-

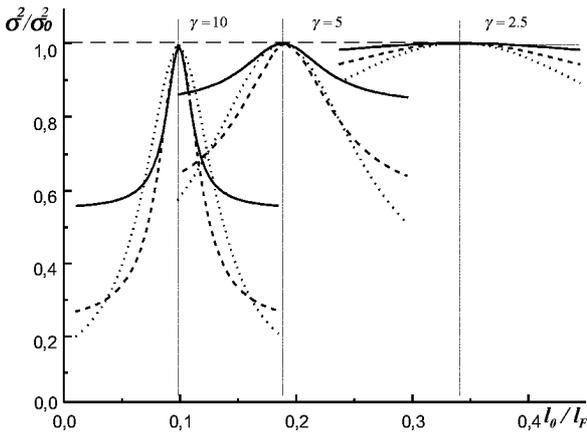


Рис. 8. Нормированная дисперсия σ^2/σ_0^2 доплеровского спектра линии тока, вычисленная по формуле (54) при различной длительности зондирующих импульсов [21]:
 сплошные – $N=4$, крупный штрих – $N=8$,
 мелкий штрих – $N=16$

тра. Развитая теория позволяет точно сформулировать [21] теорему инвариантности для линии тока при импульсном режиме излучения фокусированных волн: ширина спектра линии тока инвариантна относительно ее положения в измерительном объеме, если не изменяется относительное положение фокуса и измерительного объема. В работе [15] с помощью известного метода подвижного нитевидного фантома [42] сделана попытка экспериментально доказать теорему инвариантности в том виде, в котором она была сформулирована в [12, 13]. Было показано, что ширина спектра от линии тока не зависит от глубины зондирования при угле $\theta = 90^\circ$, но уже при $\theta = 70^\circ$ такая зависимость появляется. Она объяснялась условиями проведения экспериментов и нестабильностью строго линейного движения нитевидного фантома. Если же учесть, что согласно формуле (56) зависимость ширины доплеровского спектра от l_0 в предельном случае $\theta \rightarrow \pi/2$ исчезает, то полученные результаты находят полное объяснение в рамках развитой теории без привлечения дополнительных соображений.

4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДОПЛЕРОВСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

4.1. Критерии оптимальности

Инвариантность ширины спектра при статическом фокусировании упрощает оптимизацию параметров доплеровской системы и обеспечива-

ет стабильность ее работы в широком диапазоне глубин. Например, типическое низкочастотное ультразвуковое зондирование в медицинских приложениях реализуют с помощью ультразвуковых преобразователей с апертурой порядка $W = 16$ мм и длиной волны $\lambda = 0.5$ мм, так что $l_F \approx 40$ см. Следовательно, диапазон положений линий тока, для которого справедливы сделанные выводы, приближенно определяется неравенством $D \approx 2|y| \ll 2l_F \approx 80$ см. Ультразвуковое доплеровское зондирование с указанными параметрами пучков применяют в диапазоне глубин $D \leq 20$ см, который, очевидно, хорошо согласуется с разрешенным диапазоном положений линий тока.

Тем не менее, в импульсных доплеровских диагностических методах все чаще применяют динамическое фокусирование волн, что улучшает пространственное разрешение во всем диапазоне диагностических глубин при наличии градиентов скорости движения. Отсюда вытекает задача о влиянии градиентов на спектральные характеристики при импульсно модулированном излучении и, в более широком плане, связанная с ней проблема выбора оптимальных параметров самой зондирующей системы. В дальнейшем под оптимальной пространственной разрешающей способностью (и, следовательно, под оптимальной апертурой преобразователя и длительностью зондирующих импульсов) будут пониматься такие значения этих величин, при которых обеспечивается достаточная точность измерения средней скорости движения в измерительном объеме.

Одним из главных источников искажений спектров, приводящих к смещенности оценок средней частоты доплеровского сдвига, является ее выход за пределы полосы однозначно определяемых частот (предел Найквиста) [1]. При импульсном излучении появление предела Найквиста связано с частотой стробирования доплеровского сигнала, которая определяется частотой повторения зондирующих импульсов. В этом смысле наиболее точными оказываются результаты оценок, полученных для спектров с минимальной шириной. Точность измерения средней частоты доплеровского спектра обсуждается также исходя из соотношения Рао – Крамера [43]. Согласно ему, при неизменной энергии доплеровского сигнала точность оценки можно повысить:

- 1) увеличивая длительность сигнала от рассеивающих неоднородностей, что означает уменьшение времяпролетной составляющей спектра;
- 2) уменьшая его частотную модуляцию, т. е. гео-

метрическую часть полной ширины спектра.

По смыслу оба подхода (с точки зрения соотношения Рао–Крамера и предела Найквиста) приводят к одному и тому же критерию минимальности ширины спектра. Указанный критерий позволяет непосредственно из выражений для ширины спектра определить, например, оптимальную апертуру в отсутствии градиентов скорости: $W = 2\sqrt{\lambda R/\pi}$ [20]. Поэтому при динамическом фокусировании оптимальная апертура должна уменьшаться с уменьшением l_0 . В то же время, ширина спектра (46) минимальна при $N \rightarrow \infty$. Однако неограниченно увеличивать длительность импульсов на самом деле нельзя не только из-за ухудшения разрешения, но и из-за роста ширины спектра, обусловленного вкладом градиентов скорости движения $V(y, z)$.

4.2. Оптимальная длительность ультразвуковых импульсов

При оценке оптимальных параметров системы в случае неоднородных потоков необходимо учитывать вклад, вносимый в ширину спектра градиентами скорости движения, приводящими к увеличению ширины спектра и ограничению сверху допустимой длительности импульсов. Чтобы упростить рассмотрение, ограничимся наиболее интересным с точки зрения диагностики случаем достаточно больших углов θ . Тогда уширение спектра связано прежде всего с градиентом скорости движения в направлении оси Oy , поэтому без ограничения общности можно пренебречь зависимостью от координаты z величин V и Ω , разложение которых по y имеет вид

$$\begin{aligned} V(y) &= V_0 + V'_0 y + \frac{V''_0}{2} y^2, \\ \Omega(y) &= \Omega_0 + \Omega'_0 y + \frac{\Omega''_0}{2} y^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь V_0 и Ω_0 – скорость движения среды и безразмерная частотная переменная на глубине l_0 . Подставляя разложение (58) в формулу (44) и интегрируя последнюю по линиям тока, находим полный спектр доплеровского отклика с учетом y -

градиента скорости движения [20]:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{\pi \langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \rangle (\pi A a^2 k^2)^2}{64 \sigma_0 |\cos \theta|} \times \\ &\times \frac{v}{V} \frac{N a^2}{(l_F - \gamma l_0)^2 + l_0^2} \times \\ &\times \left\{ 1 + (\Omega'_0 + \Omega_0 \Omega''_0) \frac{a^2 \cos^2 \theta}{8(1 + \gamma^2)} (\pi N)^2 \right\}^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\Omega_0^2 \frac{2\sigma_0^2 + \Omega_0 \Omega''_0 \frac{\sin^2 \theta}{32} (N\lambda)^2}{2\sigma_0^2 + \Omega_0'^2 \frac{\sin^2 \theta}{32} (N\lambda)^2 2\sigma_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Вообще говоря, спектр (59) не является симметричным и не описывается функцией Гаусса ввиду зависимости его “дисперсии” от частоты. В частности, $\Omega'_0 = -\omega V'_0 / \omega_0 V_0$, $\omega_0 = 2kV_0 \cos \theta$. Тем не менее, центральная часть спектра (59), для которой ω близка к ω_0 , по форме практически совпадает с кривой Гаусса. По смыслу разложения (58) предполагается, что пространственный масштаб d , на котором существенно изменяется скорость, велик по сравнению с λ . Поэтому в линейном по $(\lambda/d)^2$ приближении дисперсия спектра (59) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{a^2}{8l_F^2} \left(1 + \frac{l_F^2}{R^2} \right) \text{tg}^2 \theta + \\ &+ \frac{1}{(\pi N)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{64} (N\lambda)^2 \Omega_0'^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Независимость этого выражения от знака градиентного члена означает, что наличие градиента скорости движения всегда приводит к уширению спектра.

Легко показать, что допустимые по точности измерения средней частоты значения длительности зондирующих импульсов находятся в интервале $N_1 \neq N \neq N_2$, где $N_{1,2}$ – положительные корни биквадратного уравнения $\omega_0 \sigma = 2\pi \sigma_{\max}$; σ_{\max} – максимально допустимая ширина спектра. При заданной апертуре излучения – приема меньший из этих двух корней

$$\begin{aligned} N = N_1 &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\lambda \sin \theta |\Omega'_0|)^{-1/2} \times \\ &\times \left\{ g^{-1} - g^{-1} \sqrt{1 - g^2} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$g = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda \sin \theta |\Omega'_0|}{\left(\frac{2\pi \sigma_{\max}}{\omega_0} \right)^2 - \frac{a^2}{8l_F^2} (1 + \gamma^2) \text{tg}^2 \theta}$$

соответствует наилучшей возможной продольной разрешающей способности системы, совместимой с заданной точностью измерения средней частоты в пределах измерительного объема. Как видно, величина N_1 зависит от параметров пучков волн, заданной величины σ_{\max} и предполагаемой величины градиентов скорости.

Длительность зондирующих импульсов, обеспечивающую наивысшую достижимую точность измерения (при худшей разрешающей способности), несложно получить, минимизируя дисперсию (60) по N . В результате находим

$$N = N_{\text{opt}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\lambda \sin \theta |\Omega'_0|)^{-1/2}. \quad (62)$$

Ультразвук с малыми длинами волн используется в медицинской диагностике для исследования кровеносных сосудов с меньшим диаметром, определяющим порядок величины градиентного множителя $|\Omega'_0|$. Поэтому оценка (62) справедлива для всех частот, применяемых в доплеровской диагностике. Например, при исследовании крупных артериальных кровеносных сосудов с внутренним диаметром $D = 10 \div 20$ мм используют частоты в диапазоне $2 \div 4$ МГц. Полагая $\lambda = 0.4$ мм (~ 3.5 МГц) и $\Omega'_0^{-1} \approx D/2 = 8$ мм, из формулы (62) находим $N_{\text{opt}} \approx 7/\sqrt{\sin \theta}$, что соответствует реально применяемым в доплеровских методах значениям и существенно больше принятых длин импульсов $N = 2 \div 4$ для обычной ультразвуковой визуализации.

Отметим, наконец, что в выражения (60)–(62) входит только первая производная частотной переменной. Этот результат объясняется тем, что при равной нулю первой производной профиль скоростей, определяемый вторыми производными, близок к “поршневому” в меру малости параметра $(\lambda/d)^4$.

4.3. Оптимальная апертура излучения

В рассматриваемом случае больших углов θ при оценке оптимальной апертуры преобразователя наиболее важен учет z -градиентов скорости движения. Как и ранее, используя в качестве исходного выражение (44) и ограничиваясь первыми неисчезающими членами в разложениях по z , после интегрирования приходим к дисперсии полного спектра [20]:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \frac{a^2}{8} \left[\left(1 - \gamma \frac{l_0}{l_F}\right)^2 + \frac{l_0^2}{l_F^2} \right] \Omega_0'^2, \quad (63)$$

$$\Omega'_0 = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \Big|_{l_0}.$$

Несложно видеть, что вклад градиентного члена в формуле (63) минимизируется при динамическом фокусировании $l_0 = F$. Поскольку при этом ультразвуковая система характеризуется и наилучшей поперечной разрешающей способностью, рассмотрим вначале динамическое фокусирование, которое в том или ином виде реализуется во всех современных ультразвуковых доплеровских системах диагностики. Как правило, поперечное разрешение хуже продольного даже при наличии динамического фокусирования, поэтому под оптимальной целесообразно понимать апертуру, которая обеспечивает наилучшее поперечное разрешение, совместимое с заданной точностью измерения. Разрешение будет тем выше, чем меньше размеры фокального пятна и, соответственно, больше апертура W . Поэтому необходимо найти больший из двух положительных корней биквадратного уравнения $\omega_0 \sigma = 2\pi \sigma_{\max}$. Для него получаем

$$W = W_2 = 2\sqrt{\frac{\lambda R}{\pi}}(1 + R^2 \Omega_0'^2 \text{ctg}^2 \theta)^{1/4} \times \{g^{-1} + g^{-1} \sqrt{1 - g^2}\}^{1/2}, \quad (64)$$

$$g = \frac{\lambda}{4\pi R} \frac{(1 + R^2 \Omega_0'^2 \text{ctg}^2 \theta)^{1/2}}{\left(\frac{2\pi \sigma_{\max}}{\omega_0}\right)^2 - \frac{1}{(\pi N)^2}} \text{tg}^2 \theta.$$

Наивысшая же возможная точность измерения средней частоты (с худшей разрешающей способностью) достигается при

$$W = W_{\text{opt}} = 2\sqrt{\frac{\lambda R}{\pi}}(1 + R^2 \Omega_0'^2 \text{ctg}^2 \theta)^{1/4}. \quad (65)$$

Формула (65) указывает на необходимость уменьшения (увеличения) излучающей и принимающей апертур по мере уменьшения (увеличения) глубины зондирования при динамическом фокусировании. Принцип выбора оптимальных параметров с использованием выражения (63) в случае статического фокусирования аналогичен:

$$W = W_2 = W_{\text{opt}} \left\{ g^{-1} + g^{-1} \sqrt{1 - g^2} \right\}^{1/2},$$

$$g = \frac{\lambda}{4\pi R} \frac{1}{\left(\frac{2\pi \sigma_{\max}}{\omega_0}\right)^2 - \frac{1}{(\pi N)^2}} \times \left[\text{tg}^2 \theta + (R - l_0)^2 \Omega_0'^2 \right] \times \left[\text{tg}^2 \theta + l_0^2 \Omega_0'^2 \right]^{1/2}, \quad (66)$$

$$W_{\text{opt}} = 2\sqrt{\frac{\lambda R}{\pi}} \left\{ \frac{\text{tg}^2\theta + l_0^2\Omega_0'^2}{\text{tg}^2\theta + (R - l_0)^2\Omega_0'^2} \right\}^{1/4}. \quad (67)$$

Для численных оценок оптимальной апертуры излучения наименьшее значение величины σ_{max} по критерию предела Найквиста может быть принято как $\sigma_{\text{max}} = 400 \text{ Гц} < f_{\text{prf}}/2 = 2 \text{ кГц}$, где f_{prf} – характерная частота повторения зондирующих импульсов. Тогда при $R = 60 \text{ мм}$, $\Omega_0'^{-1} \approx D/2 = 8 \text{ мм}$, $\theta = 75^\circ$ и $V_0 = 2 \text{ м/с}$ из формулы (64) следует $W = 12 \text{ мм}$. Если учесть, что физическая апертура излучения связана с эффективным соотношением $2b = W/\alpha$, то с учетом $\alpha \leq 1$ приходим к величинам порядка $2b = 14 \div 16 \text{ мм}$. Этот результат хорошо согласуется с реальными значениями, используемыми в настоящее время для диапазона частот $2 \div 4 \text{ МГц}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение показывает, что использование точных решений параболического уравнения дифракции для ультразвуковых пучков волн с гауссовой аподизацией излучающей и принимающей апертур позволяет оценить вклад различных физических факторов в ширину доплеровских спектров и установить ее величину при зондировании исследуемой среды нефокусированными, фокусированными и импульсными волнами. Обобщение развитой при таком подходе теории на случай наличия градиентов скорости движения биологической среды позволяет определить оптимальные параметры для методов ультразвуковой доплеровской эхоскопии на основе критерия минимальности ширины полного доплеровского спектра. Удобство оценки различных физических эффектов, характерное для подходов с использованием решений параболического уравнения дифракции и более общего нелинейного уравнения Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова, привели к их широкому применению в биомедицинских приложениях [44].

Проведенное детальное исследование найденных доплеровских спектров от линий тока позволяет утверждать, что, в отличие от полных спектров, ширина спектров линий тока в общем случае неинвариантна по отношению к глубине зондирования и зависит от разности между глубиной залегания исследуемого объема среды и величиной реального фокусного расстояния. Для спектров линий тока доказана также зависимость модальной частоты доплеровского сдвига от положения линии тока в измерительном объеме. Найдены

полные спектры сигналов доплеровского отклика для аксиально-симметричных потоков жидкости с различными профилями скоростей и при различных соотношениях между размерами области движения и геометрией пучков волн. Сопоставление известных экспериментальных данных с результатами теории и предложенными оценками оптимальности указывает на их адекватность физической картине рассмотренных явлений и механизмам формирования спектральных характеристик сигналов доплеровского отклика.

1. *Применение ультразвука в медицине: Физические основы* / Под ред. К. Хилла.– М.: Мир, 1989.– 568 с.
2. Гуч А. А., Дынник О. Б., Сухарев И. И., Вовченко А. Я., Кориченский А. Н. Этюды современной ультразвуковой диагностики.– К.: Укрмед, 2000.– 192 с.
3. Kremkau F.W. Doppler ultrasound: principles and instruments.– Philadelphia: W. B. Saunders Co., 1995.– 373 p.
4. *Физика визуализации изображений в медицине. Том 1.* / Под ред. С. Уэбба.– М.: Мир, 1991.– 407 с.
5. Newhouse V. L., Furgason E. S., Johnson G. F., Wolf D. A. The dependence of ultrasound Doppler bandwidth on beam geometry // IEEE Trans. Son. Ultrason.– 1980.– 27, N 1.– P. 50–59.
6. Newhouse V. L., Bendick P. J., Varner L. W. Analysis of transit time effects on Doppler flow measurement // IEEE Trans. Biomed. Engng.– 1976.– 23, N 2.– P. 381–386.
7. Griffith J. M., Brody W. R., Goodman L. Resolution performance of Doppler ultrasound flowmeters // J. Acoust. Soc. Amer.– 1976.– 60, N 2.– P. 607–610.
8. Bascom P. A. J., Cobbold R. S. C., Roelofs B. H. M. Influence of spectral broadening on continuous wave Doppler ultrasound spectra: a geometric approach // Ultrason. Med. Biol.– 1986.– 12, N 2.– P. 387–395.
9. Ata O. W., Fish P. J. Effect of deviation from plane wave conditions on the Doppler spectrum from an ultrasonic blood flow detector // Ultrasonics.– 1991.– 29, N 2.– P. 395–403.
10. Newhouse V. L., Censor D., Vonts T., Cisneros J. A., Goldberg B. Ultrasound Doppler probing of flows transverse with respect to beam axis // IEEE Trans. Biomed. Engng.– 1987.– 34, N 4.– P. 779–789.
11. Kim Y. M., Park S. B. Modeling of Doppler signal considering sample volume and field distribution // Ultrason. Imaging.– 1989.– 11, N 3.– P. 175–196.
12. Censor D., Newhouse V. L., Vonts T., Ortega H. V. Theory of ultrasound Doppler-spectra velocimetry for arbitrary beam and flow configurations // IEEE Trans. Biomed. Engng.– 1988.– 35, N 4.– P. 740–751.
13. Newhouse V. L., Reid J. Invariance of the Doppler bandwidth with flow displacement in the illuminating field // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– 90, N 5.– P. 2595–2601.
14. Guidi G., Newhouse V. L., Tortoli P. Doppler spectrum shape analysis based on the summation of flow-line spectra // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.– 1995.– 42, N 5.– P. 907–915.

15. Tortoli P., Guidi G., Mariotti V., Newhouse V. L. Experimental proof of Doppler bandwidth invariance // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.- 1992.- **39**, N 2.- P. 196–203.
16. Баранник Е. А. Влияние дифракционной расходимости и ширины пучков волн на спектр доплеровского сигнала // Акуст. ж.- 1992.- **38**, N 2.- С. 237–244.
17. Баранник Е. А. Зависимость спектральных характеристик доплеровского сигнала от геометрии ультразвукового преобразователя // Акуст. ж.- 1992.- **38**, N 5.- С. 798–805.
18. Баранник Е. А. Ширина спектра доплеровского сигнала при импульсном режиме излучения // Акуст. ж.- 1993.- **39**, N 5.- С. 939–941.
19. Баранник Е. А. Влияние фокусирования ультразвуковых волн на дисперсию доплеровского спектра // Акуст. ж.- 1994.- **40**, N 2.- С. 212–214.
20. Barannik E. A. Optimum resolution of pulsed Doppler system // Acoust. Phys.- 1997.- **43**, N 4.- P. 387–390.
21. Barannik E. A. Pulsed Doppler flow-line spectrum for focused transducers with apodized apertures // Ultrasonics.- 2001.- **39**, N 2.- P. 311–317.
22. Bastos C. A. C., Fish P. J., Steel R., Vaz F. Doppler power spectrum from a Gaussian sample volume // Ultrasonics.- 2000.- **37**, N 4.- P. 623–632.
23. Guidi G., Licciardello C., Falteri S. Intrinsic spectral broadening (ISB) in ultrasound Doppler as a combination of transit time and local geometric broadening // Ultrasound Med. Biol.- 2000.- **26**, N 5.- P. 853–862.
24. Tompson R. S., Aldis G. K. Flow spectra from spectral power density calculations for pulsed Doppler // Ultrasonics.- 2002.- **40**, N 1–8.- P. 835–841.
25. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.- М.: Наука, 1975.- 228 с.
26. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика.- Л.: Судостроение, 1981.- 264 с.
27. Кайно Г. Акустические волны. Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов.- М.: Мир, 1990.- 656 с.
28. Буров В. А., Гуринович И. Е., Руденко О. В., Тагунов Е. Я. Реконструкция пространственного распределения параметра нелинейности и скорости звука в акустической нелинейной томографии // Акуст. ж.- 1994.- **40**, N 6.- С. 922–929.
29. Буров В. А., Румянцева О. Д., Сасковец А. В. Акустическая томография и дефектоскопия как обратные задачи рассеяния // Вестн. Моск. Ун-та, Сер. 3. Физика, Астрономия.- 1994.- **38**, N 6.- С. 61–71.
30. Горюнов А. А., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике.- М.: Изд-во МГУ, 1989.- 152 с.
31. Zhang D., Gong X.-F. Experimental investigation of acoustic nonlinearity parameter tomography for excised pathological biological tissues // Ultrasound Med. Biol.- 1999.- **25**, N 2.- P. 593–599.
32. Осетров А. В., Самоленков С. Н. О двух моделях акустических неоднородностей в дифракционной томографии // Акуст. ж.- 1996.- **42**, N 6.- С. 679–687.
33. Devaney A. J. Variable density diffraction tomography // J. Acoust. Soc. Amer.- 1985.- **78**, N 1.- P. 120–130.
34. Kaveh M., Soumekh M., Mueller R. K. Further results on diffraction using Rytov's approximation // Acoust. Imaging.- 1982.- **12**, N 1.- P. 273–280.
35. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.- М.: Наука, 1986.- 736 с.
36. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical acoustics.- New York: McGraw-Hill, 1968.- 927 p.
37. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1966.- 624 с.
38. Бадалян В. Г., Базулин Е. Г., Тихонов Д. С. Визуализация неоднородностей методом обобщенной многочастотной акустической голографии // Акуст. ж.- 1992.- **38**, N3.- С. 396–401.
39. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.- М.: Наука, 1967.- 304 с.
40. Арфкен Г. Математические методы в физике.- М.: Атомиздат, 1970.- 712 с.
41. Rudenko O. V., Sarvazyan A. P., Emelianov S. Y. Acoustic radiation force and streaming induced by focused nonlinear ultrasound in a dissipative medium // J. Acoust. Soc. Amer.- 1996.- **99**, N 5.- P. 2791–2798.
42. Walker A. R., Philips D. J., Powers D. E. Evaluating Doppler devices using a moving string target // J. Clin. Ultrasound.- 1982.- **10**, N 1.- P. 25–30.
43. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том 3: Обработка сигналов в радио- и гидролокации и прием случайных гауссовых сигналов на фоне помех.- М.: Сов. радио, 1977.- 663 с.
44. Руденко О. В., Сарвазян А. П. Нелинейная акустика и биомедицинские приложения // Биомед. радиоэлектрон.- 2000.- N 3.- С. 6–19.