

УДК 534.231

## ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ В НЕОДНОРОДНОМ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ СО СТУПЕНЧАТЫМ ДНОМ

С. О. ПАПКОВ, Ю. И. ПАПКОВА, А. А. ЯРОШЕНКО

*Севастопольский национальный технический университет*

*Получено 26.02.2003*

Для модели волновода с жестким ступенчатым дном и меняющимся по глубине профилем скорости звука исследовано асимптотическое поведение неизвестных в бесконечной системе линейных уравнений, определяющей весовые коэффициенты в Фурье-разложении акустического потенциала. Знание асимптотики неизвестных позволило применить метод улучшенной редукции при вычислении коэффициентов для нормальных мод. Проведено численное исследование звуковых полей при варьировании параметров задачи.

Для моделі хвилеводу з твердим сідчастим дном і змінним по глибині профілем швидкості звуку досліджено асимптотичне поводження невідомих у нескінченній системі, яка визначає вагові коефіцієнти у Фур'є-розкладі акустичного потенціалу. Знання асимптотики невідомих дозволило застосувати метод поліпшеної редукції при обчисленні коефіцієнтів для нормальних мод. Проведено чисельне дослідження звукових полів при варіюванні параметрів задачі.

For the model of waveguide with a rigid stepwise bottom the asymptotic behavior of unknown variables in the infinite system of linear equations, yielding the weighting coefficients in the Fourier decomposition of an acoustic potential, is studied. Knowledge of asymptotics of the variables allowed to use the method of enhanced reduction when determining the coefficients for the normal modes. Numerical investigation of the sound fields is carried out varying the parameters of the problem.

### ВВЕДЕНИЕ

Реальные геофизические волноводы имеют сложную структуру, определяемую как свойствами среды, так и случайными пространственными и временными флуктуациями. Исходя из этого, для их описания используют различные упрощенные модели, в зависимости от области применения. В частности, известно большое количество работ, опирающихся на модели волноводов с жесткими или импедансными границами раздела сред (см., например, [1–4]). При этом предполагается, что свойства морского дна не влияют на звуковое поле в волноводе, а скорость звука считается, как правило, только функцией глубины. В рамках данного подхода наиболее простой является модель гидроакустического волновода с плоскопараллельными границами (сверху – свободная поверхность, снизу – неподатливое дно). Заметим, что даже в таком случае точные решения волнового уравнения удается получить только для некоторых частных профилей скорости звука [1]. В связи с этим широко применяются различные приближенные подходы, такие как приближение ВКБ при условии, что относительные изменения вертикальной компоненты волнового вектора на длине волны малы, а также методы геометрической акустики для плавно меняющегося профиля скорости звука [1, 2].

Для расчета моделей волноводов с неровным дном, как правило, используются численные методы. В работах Ю. В. Завадского [5] для вычисления звуковых полей применен метод сеток, позволяющий учитывать в моделях волноводов изменения параметров среды и границ. Указанный метод основан на аппроксимации дифференциального уравнения конечно-разностным уравнением. В работе А. J. Kalinowski [2] рассматривалось применение метода конечных элементов к горизонтально-неоднородным волноводам с учетом влияния геоакустических свойств дна.

Главный недостаток численных методов состоит в том, что они не учитывают особенности поля скоростей в окрестности ребер и угловых точек, а также не позволяют вычислить звуковое поле вблизи источника. В связи с этим, наряду с построением численных решений, в настоящее время активно развиваются и комбинированные численно-аналитические подходы к расчету звуковых полей. Асимптотические методы для плавно-нерегулярных волноводов, основанные на естественном выделении малого параметра (так называемого “параметра плавности” или френелевского параметра), рассмотрены в монографии [1]. Дальнейшее уточнение асимптотического подхода к построению решений волнового уравнения реализовано, в частности, в модификациях метода плавных возмущений и метода асимптотического

интегрирования волноводных уравнений. В работах Де Санто, Бэра [2], Ф. Д. Ташперта [6] развит метод параболического уравнения для малых изменений параметров волновода. Его преимущество заключается в том, что численное интегрирование параболического уравнения позволяет обойтись меньшим объемом вычислений, по сравнению с другими численными методами.

К аналитическим методам построения решения в задачах излучения и дифракции звука следует отнести метод частичных областей [7], согласно которому область волновода разбивается на элементарные области, в каждой из которых возможно построение аналитического решения волнового уравнения. Последующая сшивка решения на границах частичных областей (выполнение естественных условий непрерывности физических полей) обычно приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений или к системам интегральных уравнений.

Целью данной работы является построение решения в гидроакустическом волноводе со ступенчатым дном на основе метода частичных областей, а также анализ влияния неоднородностей волновода на звуковое поле точечного источника.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим гидроакустический волновод со ступенчатым дном, имеющим радиальную симметрию (рис. 1). Расположим начало цилиндрической системы координат на поверхности волновода над источником звука, имеющим координаты  $(0, z_0)$ . Считаем, что ось  $Oz$  ориентирована в направлении дна. Пусть гидроакустический волновод ограничен свободной поверхностью и абсолютно жестким дном.

Разобьем волновод на  $N+2$  области цилиндрической формы, каждая из которых характеризуется скоростью звука  $c_j(z)$  и постоянной глубиной  $h_j$  (рис. 1). В зависимости от перепада глубины между соседними областями, формируется выступ ( $h_j \leq h_{j+1}$ ) или впадина ( $h_j \geq h_{j+1}$ ).

Соответствующие  $j$ -ой области амплитуды потенциалов скорости удовлетворяют неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \Phi = -\frac{\delta(z - z_0)\delta(r)}{2\pi r} \quad (1)$$

(здесь  $\Phi$  – потенциал скоростей;  $\omega$  – частота;  $c(z)$  – профиль скорости звука;  $\delta$  – дельта-функция Ди-

рака) и граничным условиям

$$\Phi_j(r, 0) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_j(r, h_j)}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_j,$$

$$j = 0, 1, \dots, N + 1.$$

Условия непрерывности звукового поля и условия жесткого дна при  $r=r_j$  (выступ или впадина –  $z \in [h_j; h_{j+1}]$  или  $z \in [h_{j+1}; h_j]$  соответственно) можно объединить следующим образом:

- для выступа –

$$\Phi_{j+1}(z, r_j) = \begin{cases} \Phi_j(z, r_j), & z \in [0; h_j], \\ \Phi_{j+1}(z, r_j), & z \in (h_j; h_{j+1}], \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi_{j+1}(z, r_j)}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_j(z, r_j)}{\partial r}, & z \in [0; h_j], \\ 0, & z \in [h_j; h_{j+1}], \end{cases}$$

- для впадины –

$$\Phi_j(z, r_j) = \begin{cases} \Phi_{j+1}(z, r_j), & z \in [0; h_{j+1}], \\ \Phi_j(z, r_j), & z \in (h_{j+1}; h_j], \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_j(z, r_j)}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{j+1}(z, r_j)}{\partial r}, & z \in [0; h_{j+1}], \\ 0, & z \in [h_{j+1}; h_j]. \end{cases}$$

Построим общее решение краевой задачи (1)–(3) для  $j$ -го интервала ( $j=0, 1, \dots, N+1$ ), удовлетворяющее граничным условиям на горизонтальных стенках волновода и условию излучения, в виде суммы нормальных мод:

$$\Phi_j(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{j,n}(z) [A_n^j J_0(\xi_{j,n} r) + B_n^j H_0^{(1)}(\xi_{j,n} r)], \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

$$\Phi_{N+1}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{N+1} \varphi_{N+1,n}(z) \times H_0^{(1)}(\xi_{N+1,n} r).$$

Здесь  $A_n^j, B_n^j$  – неопределенные коэффициенты;  $\xi_{j,n}, \varphi_{j,n}(z)$  – собственные функции и собственные

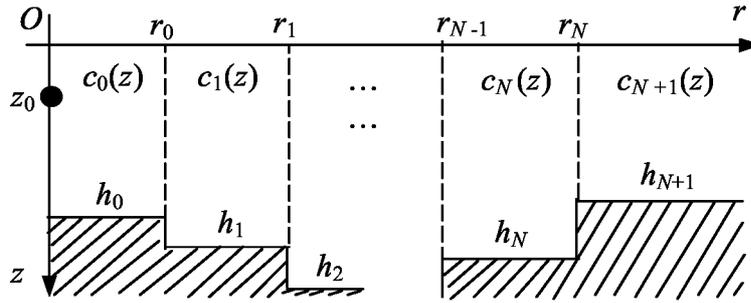


Рис. 1. Гидроакустический волновод со ступенчатым дном

числа соответствующих краевых задач:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_{j,n}}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) \varphi_{j,n} &= 0, \\ \varphi_{j,n}(0, \xi) &= 0, \quad \frac{d\varphi_{j,n}(h_j, \xi)}{dz} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$j = 0, 1, \dots, N + 1.$$

Так как точные решения дифференциального уравнения существуют лишь для немногих зависимостей профиля скорости звука  $c(z)$ , то реальное распределение  $c(z)$  заменим некоторым приближенным, позволяющим получить аналитическое решение краевых задач (5). При этом собственные числа и собственные функции строятся по следующему алгоритму.

Пусть профиль скорости звука  $c(z)$  определен системой опорных точек  $c(z_k) = c_k$ . Рассмотрим случай, когда скорость звука изменяется на отрезке  $[z_k, z_{k+1}]$  по закону

$$\frac{\omega^2}{c_k^2(z)} = a_k + b_k z,$$

$$\begin{cases} a_k = \frac{\omega^2}{z_{k+1} - z_k} \left( \frac{z_{k+1}}{c_k^2} - \frac{z_k}{c_{k+1}^2} \right), \\ b_k = \frac{\omega^2}{z_{k+1} - z_k} \left( \frac{1}{c_{k+1}^2} - \frac{1}{c_k^2} \right). \end{cases}$$

Тогда при  $b_k \neq 0$  линейно-независимые решения вертикального волнового уравнения (5) на данном отрезке выражаются через функции Эйри:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k(z, \xi) &= \text{Ai} \left( \frac{\xi^2 - a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}} - \sqrt[3]{b_k} z \right), \\ \varphi_2^k(z, \xi) &= \text{Bi} \left( \frac{\xi^2 - a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}} - \sqrt[3]{b_k} z \right), \end{aligned}$$

а при  $b_k = 0$  – через показательную и тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k(z, \xi) &= \begin{cases} \cos(\sqrt{a_k - \xi^2} z), & a_k - \xi^2 \geq 0, \\ \exp(\sqrt{\xi^2 - a_k} z), & a_k - \xi^2 < 0, \end{cases} \\ \varphi_2^k(z, \xi) &= \begin{cases} \sin(\sqrt{a_k - \xi^2} z), & a_k - \xi^2 \geq 0, \\ \exp(-\sqrt{\xi^2 - a_k} z), & a_k - \xi^2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения на отрезке имеет вид

$$\varphi_k(z, \xi) = C_1^k \varphi_1^k(z, \xi) + C_2^k \varphi_2^k(z, \xi).$$

Учет условий непрерывности звукового поля на концах отрезков аппроксимации позволяет получить однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_1^k, C_2^k$ . Необходимым условием существования ее нетривиального решения является равенство нулю соответствующего определителя  $\Delta$ . Из этого условия получаем дисперсионное уравнение для определения собственных чисел  $\{\xi_n\}$ :

$$\Delta(\xi) = 0.$$

По найденным собственным значениям находим нетривиальные решения однородной системы  $\{C_1^k(\xi_n), C_2^k(\xi_n)\}$ , позволяющие восстановить собственные функции краевых задач  $\varphi_n(z, \xi_n)$ .

Используя свойство ортогональности собственных функций  $\{\varphi_{0,n}(z)\}_{n=0}^\infty$  на отрезке  $[0; h_0]$  и учитывая функциональное равенство

$$\sum_{n=0}^\infty B_n^0 \varphi_{0,n}(z, \xi_{0,n}) = \frac{i}{4} \delta(z - z_0),$$

получаем значения неопределенных коэффициентов  $B_n^0$ :

$$B_n^0 = \frac{i \varphi_{0,n}(z_0)}{4 \gamma_{0,n}}$$

Здесь и далее

$$\gamma_{j,n} = \int_0^{h_j} (\varphi_{j,n}(z))^2 dz.$$

Подставляя выражения для звуковых потенциалов (4) в соотношения (2), (3) и используя свойство ортогональности собственных функций краевых задач  $\{\varphi_{j,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$  в пространстве  $L_2[0; h_j]$ , строим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, входящих в общее решение рассматриваемой краевой задачи. Конечный вид системы уравнений не приводим ввиду ее громоздкости, отметить только, что неизвестные, входящие в полученную бесконечную систему, и коэффициенты  $A_n^j, B_n^j$  из общего решения краевой задачи связаны следующим образом:

$$x_n^j = A_n^j J_0(\xi_{j,n} r_j), \quad y_n^j = B_n^j H_0^{(1)}(\xi_{j,n} r_{j-1}).$$

## 2. АСИМПТОТИКА НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ $x_n^j, y_n^j$

Следуя подходу, изложенному в монографии [7], воспользуемся тем, что для входящих в бесконечную систему неизвестных характер поведения в окрестности угловых точек задается условием на ребре цилиндрического выступа:

$$|\vec{v}| \sim C_k R^{\pi/\alpha-1} \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0,$$

$$R = \sqrt{(r - r_k)^2 + (z - h_k)^2},$$

где  $\alpha = 3\pi/2$  - внешний угол, охватывающий острую кромку акустически жесткого тела. В этом случае колебательная скорость имеет вблизи ребра степенную особенность порядка  $\sigma = -1/3$ .

В силу граничных условий и условий непрерывности звукового поля, поведение колебательной скорости на границе раздела областей  $r = r_{k-1}$  описывается следующими выражениями:

- для выступа ( $h_{k-1} < h_k$ )

$$v_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow r_{k-1} - 0,$$

$$(v_r)_{k-1} \sim \tilde{C}_{k-1} (h_{k-1} - z)^{-1/3} \sim$$

$$\sim C_{k-1}^* (h_{k-1}^2 - z^2)^{-1/3} \quad \text{при} \quad z \rightarrow h_{k-1} - 0,$$

$$(v_r)_k = \begin{cases} (v_r)_{k-1}, & z \rightarrow h_{k-1} - 0, \\ 0, & z \rightarrow h_{k-1} + 0, \end{cases}$$

- для впадины ( $h_{k-1} > h_k$ )

$$v_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow r_{k-1} + 0,$$

$$(v_r)_{k-1} = \begin{cases} (v_r)_k, & z \rightarrow h_k - 0, \\ 0, & z \rightarrow h_k + 0, \end{cases}$$

$$(v_r)_k \sim C_{k-1}^* (h_k^2 - z^2)^{-1/3} \quad \text{при} \quad z \rightarrow h_k - 0.$$

Тогда в случае выступа между  $(k-1)$ -ой и  $k$ -ой областями особенности не имеют следующие разности:

$$\hat{f}_{k-1} = (v_r)_{k-1} - C_{k-1}^* (h_{k-1}^2 - z^2)^{-1/3},$$

$$\hat{g}_{k-1} = (v_r)_k - \begin{cases} C_{k-1}^* (h_{k-1}^2 - z^2)^{-1/3}, & z < h_{k-1}, \\ 0, & z > h_{k-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Аналогично, для впадины данные функции представляются в виде

$$\check{f}_k = (v_r)_k - C_{k-1}^* (h_k^2 - z^2)^{-1/3},$$

$$\check{g}_{k-1} = (v_r)_{k-1} - \begin{cases} C_{k-1}^* (h_k^2 - z^2)^{-1/3}, & z < h_k, \\ 0, & z > h_k. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно следствию из леммы Римана-Лебега [8] и учитывая известное асимптотическое представление [9]

$$\varphi_{k,n} = \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_k} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

оценим скорость убывания коэффициентов ряда Фурье для функций (6), (7) по системе собственных функций при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\int_0^{h_k} \hat{g}_{k-1} \varphi_{k,n} dz \sim \int_0^{h_k} \hat{g}_{k-1} \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_k} dz = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int_0^{h_k} \check{g}_{k-1} \varphi_{k,n} dz \sim \int_0^{h_k} \check{g}_{k-1} \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_k} dz = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Это дает возможность найти асимптотические оценки поведения неизвестных бесконечной системы  $y_n^k$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Действительно, с учетом соотношений (4) колебательную скорость  $v_r$  в  $k$ -ой области можно записать как

$$(v_r)_k = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{k,n} \xi_{k,n} [A_n^k J_1(\xi_{k,n} r) + B_n^k H_1^{(1)}(\xi_{k,n} r)].$$

При  $h_{k-1} < h_k$ , используя значение табличного интеграла [10]

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\beta-1} \sin bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \mathbf{H}_{\beta-1/2}(ab),$$

$(a, \mathbf{Re} \beta > 0, \quad |\arg b| < \pi)$

$$\begin{aligned} A_n^k J_1(\xi_{k,n} r_{k-1}) &= \\ &= x_n^k \frac{J_1(\xi_{k,n} r_{k-1})}{J_0(\xi_{k,n} r_k)} = x_n^k \frac{J_1\left(\frac{i\pi n}{h_k} r_{k-1}\right)}{J_0\left(\frac{i\pi n}{h_k} r_k\right)} = \\ &= x_n^k i \sqrt{\frac{r_k}{r_{k-1}}} \exp\left(-\frac{\pi n}{h_k} (r_k - r_{k-1})\right) \end{aligned}$$

и асимптотические представления для функций Струве и Бесселя первого и второго родов [11]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\nu(z) &= Y_\nu(z) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)(z/2)^{2k-\nu+1}} + \\ &+ O(|z|^{\nu-2m-1}), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \cos(z - \nu\pi/2 - \pi/4) + \exp(|\mathbf{Im} z|) O(|z|^{-1}) \right),$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \sin(z - \nu\pi/2 - \pi/4) + \exp(|\mathbf{Im} z|) O(|z|^{-1}) \right), \quad z \rightarrow \infty,$$

а также соотношение

$$\xi_{k,n} = \frac{i\pi n}{h_k} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

получим асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} \gamma_{k,n} \xi_{k,n} [A_n^k J_1(\xi_{k,n} r_{k-1}) + B_n^k H_1^{(1)}(\xi_{k,n} r_{k-1})] &= \\ = \hat{b}_k \frac{\pi \sin\left[\frac{\pi h_{k-1}}{h_k} \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right]}{2n^{2/3}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

$n \rightarrow \infty.$

Здесь

$$\hat{b}_k = C_{k-1}^* \left(\frac{2h_k}{\pi}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\pi h_{k-1}^{1/3}}.$$

экспоненциально убывает, т. е. является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $O(1/n)$ . Тогда, с учетом асимптотического соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{k,n} \xi_{k,n} B_n^k H_1^{(1)}(\xi_{k,n} r_{k-1}) &\sim \\ &\sim \frac{i\pi n}{2} y_n^k \frac{H_1^{(1)}(\xi_{k,n} r_{k-1})}{H_0^{(1)}(\xi_{k,n} r_{k-1})} \sim \frac{\pi n}{2} y_n^k, \end{aligned}$$

выражение (8) примет вид

$$\begin{aligned} y_n^k &= \frac{\hat{b}_k \sin\left(\frac{\pi h_{k-1}}{h_k} \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right)}{n^{5/3}} + \\ &+ O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичную оценку поведения неизвестных коэффициентов  $y_n^k$  можно выполнить и для случая  $h_{k-1} > h_k$ . Раскладывая разность

$$(v_r)_k - C_{k-1}^* (h_k^2 - z^2)^{-1/3}$$

в ряд Фурье по системе собственных функций и следуя изложенной выше схеме, получаем следующие асимптотические представления:

$$y_n^k = \check{b}_k \frac{(-1)^n}{n^{5/3}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где

$$\check{b}_k = \frac{C_{k-1}^* h_k^{1/3} \Gamma(2/3)}{2\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2/3}.$$

Применив описанную выше методику нахождения коэффициентов  $y_n^k$  в окрестности сечения волновода  $r = r_k$ , определим поведение неизвестных

коэффициентов бесконечной системы  $x_n^k$ :

$$x_n^k = \frac{\hat{a}_k (-1)^n}{n^{5/3}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

(при  $h_{k+1} > h_k$ ),

$$x_n^k = \frac{\check{a}_k \sin\left(\frac{\pi h_{k+1}}{h_k} \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right)}{n^{5/3}} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

(при  $h_{k+1} < h_k$ ).

Здесь

$$\hat{a}_k = -\frac{C_k^* h_k^{1/3} \Gamma(2/3)}{2\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2/3};$$

$$\check{a}_k = -\frac{C_k^* \Gamma(2/3)}{\pi h_{k+1}^{1/3}} \left(\frac{2h_k}{\pi}\right)^{2/3}.$$

### 3. МЕТОД УЛУЧШЕННОЙ РЕДУКЦИИ. УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ НА ГРАНИЦЕ ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

При численном решении бесконечной системы уравнений, асимптотические свойства коэффициентов которой известны, воспользуемся методом улучшенной редукции [7, 12].

Проиллюстрируем данный метод на примере решения задачи с одним выступом. В этом случае имеем следующую бесконечную систему для определения неизвестных  $x_n$  и  $y_n$ :

$$\left\{ \begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{1,m}} I_{m,n}^1 x_n + y_m - \\ -\frac{1}{\gamma_{1,m}} \sum_{n=0}^{\infty} I_{m,n}^2 y_n = Q_m^1, \\ -\frac{1}{\xi_{1,m} \gamma_{1,m}} \sum_{n=0}^{\infty} I_{m,n}^1 \xi_{0,n} \frac{J_1(\xi_{0,n} r_0)}{J_0(\xi_{0,n} r_0)} x_n + \\ + \frac{H_1^{(1)}(\xi_{1,m} r_0)}{H_0^{(1)}(\xi_{1,m} r_0)} y_m = Q_m^2, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$Q_m^1 = \frac{i}{4\gamma_{1,m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{0,n}(z_0)}{\gamma_{0,n}} I_{m,n}^1 H_0^{(1)}(\xi_{0,n} r_0);$$

$$Q_m^2 = \frac{i}{4\gamma_{1,m} \xi_{1,m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{0,n}(z_0)}{\gamma_{0,n}} I_{m,n}^1 \xi_{0,n} H_1^{(1)}(\xi_{0,n} r_0).$$

(11) Интегралы

$$I_{m,n}^1 = \int_0^{h_0} \varphi_{0,n} \varphi_{1,m} dz, \quad I_{m,n}^2 = \int_{h_0}^{h_1} \varphi_{1,n} \varphi_{1,m} dz$$

в случае  $c_0(z) = c_1(z)$ ,  $z \in [0, h_0]$  вычисляются точно с помощью интегрирования по частям:

$$I_{m,n}^1 = \frac{\varphi'_{1,m}(h_0) \varphi_{0,n}(h_0)}{\xi_{1,m}^2 - \xi_{0,n}^2},$$

$$I_{m,n}^2 = \frac{\varphi_{1,m}(h_0) \varphi'_{1,n}(h_0) - \varphi'_{1,m}(h_0) \varphi_{1,n}(h_0)}{\xi_{1,m}^2 - \xi_{1,n}^2},$$

$$m \neq n.$$

В соответствии с методом улучшенной редукции, неизвестные в бесконечной системе (12), начиная с некоторого номера  $n > N$ , заменяются главными членами их асимптотических представлений (9) – (11). При этом остатки рядов сворачиваются с помощью функции обобщенного полилогарифма

$$Li_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\nu}$$

с последующим численным интегрированием. Данную процедуру рассмотрим на примере остатка одного из рядов, входящих в бесконечную систему (12):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{h_0} \varphi_{0,n} \varphi_{1,m} dz x_n \approx \\ & \approx a_0 \int_0^{h_0} \varphi_{1,m} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{5/3}} \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_0} dz = \\ & = a_0 \int_0^{h_0} \varphi_{1,m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{5/3}} \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_0} dz - \\ & - a_0 \int_0^{h_0} \varphi_{1,m} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^{5/3}} \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_0} dz. \end{aligned}$$

При суммировании первого ряда используем функцию  $\text{Li}_\nu(z)$ :

$$\int_0^{h_0} \varphi_{1,m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{5/3}} \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_0} dz = \int_0^{h_0} \varphi_{1,m} \mathbf{Im} \left[ e^{i\pi z/2h_0} \text{Li}_{5/3}(-e^{i\pi z/h_0}) \right] dz.$$

$$R_m^1 = \int_0^{h_0} \varphi_{1,m} \left\{ \mathbf{Im} \left[ e^{i\frac{\pi z}{2h_0}} \text{Li}_{5/3} \left( -e^{i\frac{\pi z}{h_0}} \right) \right] - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_0}}{n^{5/3}} \right\} dz;$$

$$R_m^2 = \int_{h_0}^{h_1} \varphi_{1,m} \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left[ e^{i(\frac{\pi(z-h_0)}{2h_1} + \frac{\pi}{3})} \text{Li}_{5/3} \left( e^{i\frac{\pi(z-h_0)}{h_1}} \right) - e^{i(\frac{\pi(z+h_0)}{2h_1} - \frac{\pi}{3})} \text{Li}_{5/3} \left( e^{i\frac{\pi(z+h_0)}{h_1}} \right) \right] dz -$$

В результате получим следующую конечную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & - \sum_{n=0}^N \frac{1}{\gamma_{1,m}} I_{m,n}^1 x_n + y_m - \frac{1}{\gamma_{1,m}} \sum_{n=0}^N I_{m,n}^2 y_n - \\ & - \frac{a_0}{\gamma_{1,m}} R_m^1 - \frac{b_0}{\gamma_{1,m}} R_m^2 = Q_m^1, \\ & - \frac{1}{\xi_{1,m} \gamma_{1,m}} \sum_{n=0}^N I_{m,n}^1 \xi_{0,n} \frac{J_1(\xi_{0,n} r_0)}{J_0(\xi_{0,n} r_0)} x_n + \\ & + \frac{H_1^{(1)}(\xi_{1,m} r_0)}{H_0^{(1)}(\xi_{1,m} r_0)} y_m - \frac{a_0}{\xi_{1,m} \gamma_{1,m}} R_m^3 = Q_m^2, \end{aligned} \right.$$

$$- \int_{h_0}^{h_1} \varphi_{1,m} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_1}}{n^{5/3}} \times \sin \left[ \frac{\pi h_0(n+1/2)}{h_1} - \frac{\pi}{3} \right] dz;$$

$$R_m^3 = - \frac{\pi}{h_0} \int_0^{h_0} \varphi_{1,m} \left\{ \mathbf{Im} \left[ e^{i\frac{\pi z}{2h_0}} \text{Li}_{5/3} \left( -e^{i\frac{\pi z}{h_0}} \right) \right] - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_0}}{n^{5/3}} \right\} dz.$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \sum_j (-1)^j j^{5/3} x_j, \quad b_0 = -2 \left( \frac{h_1}{h_0} \right)^{2/3} a_0,$$

$$j = N - L + 1, \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

где интегралы  $R_m^1$ ;  $R_m^2$ ;  $R_m^3$  можно рассчитать по квадратурным формулам с любой требуемой точ-

В работе [7] показано, что наихудшая сходимость рядов, входящих в общее решение, наблюдается на границе раздела частичных областей. Из соотношений (4) и (9)–(11) следует, что в окрестности сечения волновода  $r = r_k$  с ростом номера  $n$  ряды для потенциалов скоростей убывают как  $n^{-5/3}$ , а ряды для колебательных скоростей – как  $n^{-2/3}$ . Сходимость таких рядов можно улучшить по методу В. И. Крылова [13], используя обобщенную функцию полилогарифма. Ниже приведен пример улучшения сходимости рядов для потенциала скорости в случае одного выступа на границе

Табл. 1. Относительная погрешность выполнения условий непрерывности полей на границе частичных областей  $r=r_0$

Вид редукции	$N = 10$	$N = 25$	$N = 50$	$N = 100$
простая	14.01	6.67	4.48	2.90
улучшенная	1.65	0.77	0.62	0.38

Табл. 2. Относительная погрешность выполнения условий непрерывности в точках  $z_k = kh_0/10$

Погрешность	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$\delta_1$	0	0.006	0.002	0.005	0.004	0.006	0.007	0.005	0.015	0.016	0.615
$\delta_2$	0	0.163	0.068	0.217	0.045	0.145	0.231	0.290	0.355	0.510	–

раздела областей  $r=r_0$ :

$$\Phi_0(r_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\varphi_{0,n}(z_0)}{4\gamma_{0,n}} \varphi_{0,n}(z) H_0^{(1)}(\xi_{0,n}r_0) + \sum_{n=0}^N x_n \varphi_{0,n}(z) + a_0 \left\{ \mathbf{Im} \left[ e^{i\frac{\pi z}{2h_0}} \text{Li}_{5/3} \left( -e^{i\frac{\pi z}{h_0}} \right) \right] - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_0}}{n^{5/3}} \right\},$$

$$\Phi_1(r_0, z) = \sum_{n=0}^N y_n \varphi_{1,n}(z) + \frac{b_0}{2} \mathbf{Re} \left[ e^{i\left(\frac{\pi(z-h_0)}{2h_1} + \frac{\pi}{3}\right)} \text{Li}_{5/3} \left( e^{i\frac{\pi(z-h_0)}{h_1}} \right) - e^{i\left(\frac{\pi(z+h_0)}{2h_1} - \frac{\pi}{3}\right)} \text{Li}_{5/3} \left( e^{i\frac{\pi(z+h_0)}{h_1}} \right) \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n^{5/3}} \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h_1} \times \sin \left[ \frac{\pi h_0(n+1/2)}{h_1} - \frac{\pi}{3} \right].$$

Аналогичным образом улучшается сходимость рядов и для колебательной скорости. Теперь локальная особенность в поведении колебательной скорости вблизи кромки акустически жесткого тела заключена в аналитически свернутых остатках рядов, что дает возможность описать звуковое поле в непосредственной близости от ребра.

В табл. 1 представлена относительная погрешность выполнения условий непрерывности полей  $\delta$  на границе частичных областей  $r=r_0$  при решении бесконечной системы уравнений (12) методами простой и улучшенной редукции. При этом  $\delta$  определяется как отношение модуля разности потенциала скорости слева и справа от границы раздела к наибольшей амплитуде потенциала скорости при  $r=r_0$ . Расчеты проведены для  $c=1450$  м/с,  $h_0=0.5h_1$ ,  $r_0=2h_1$ ,  $z_0=0.1h_1$ ,  $h_1=1.1\lambda$  ( $\lambda=91.06$  м – длина волны). Из табл. 1 следует, что при использовании метода улучшенной редукции точность выполнения условий сопряжения на порядок выше, чем при использовании метода простой редукции.

Оценка качества выполнения условий сопряжения на границе областей  $r=r_0$  для  $N=50$  при решении системы уравнений (12) методом улучшенной редукции представлена в табл. 2. Здесь  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – относительные погрешности выполнения условий непрерывности потенциала скорости и нормальной составляющей колебательной скорости соответственно.

#### 4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обратимся к вопросу о влиянии профиля скорости звука на звуковое поле в случае “мелкой воды” (толщина водного слоя составляет порядка длины волны). На рис. 2 представлены графики изолиний модуля амплитуды потенциала скоростей для волновода с одним выступом ( $h_0=0.5h_1$ ,  $r_0=2h_1$ ,  $z_0=0.1h_1$ ,  $h_1=h=100$  м) в зависимости от профиля скорости звука (рис. 3) при частоте  $\omega=100$  Гц.

Видно, что различия между графиками, представленными на рис. 2, невелики. Это согласуется

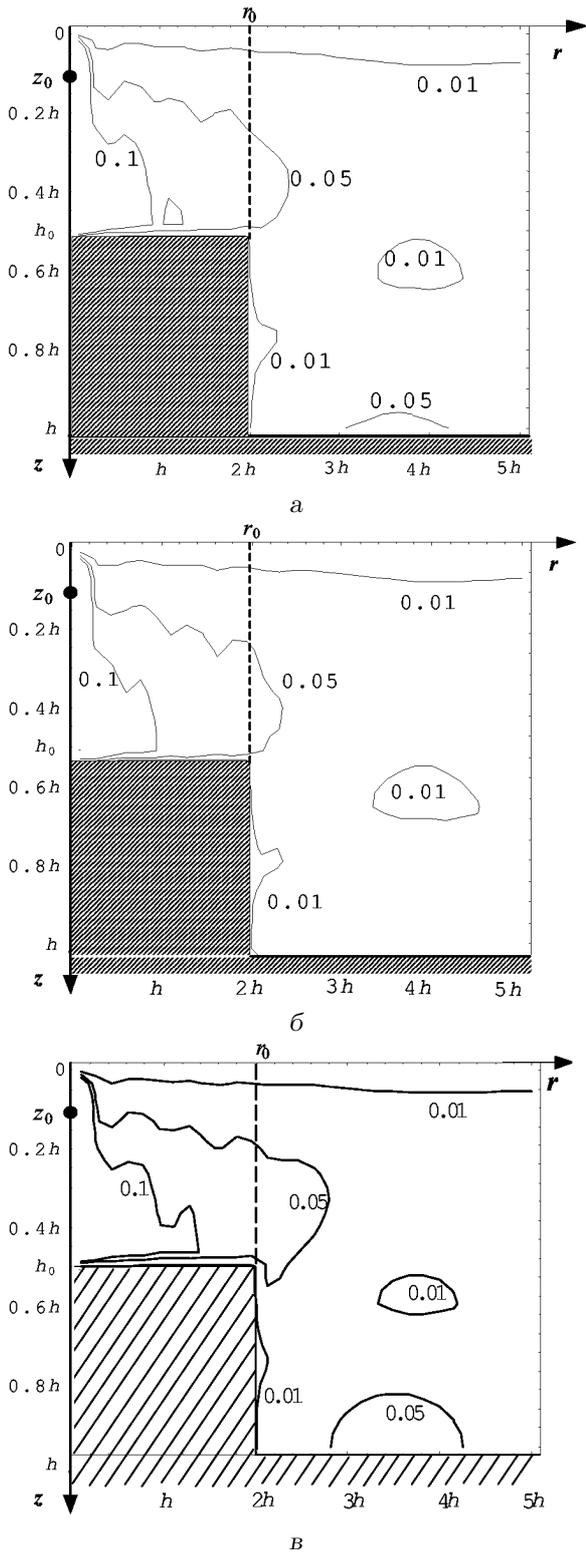


Рис. 2. Изолинии модуля потенциала скорости  $|\Phi|$  при  $f = 100$  Гц:  
 а – для профиля  $c(z)$ , изображенного на рис. 3, а;  
 б – для профиля  $c(z)$ , изображенного на рис. 3, б;  
 в – для  $c(z) = 1450$  м/с ( $\lambda = 91.06$  м)

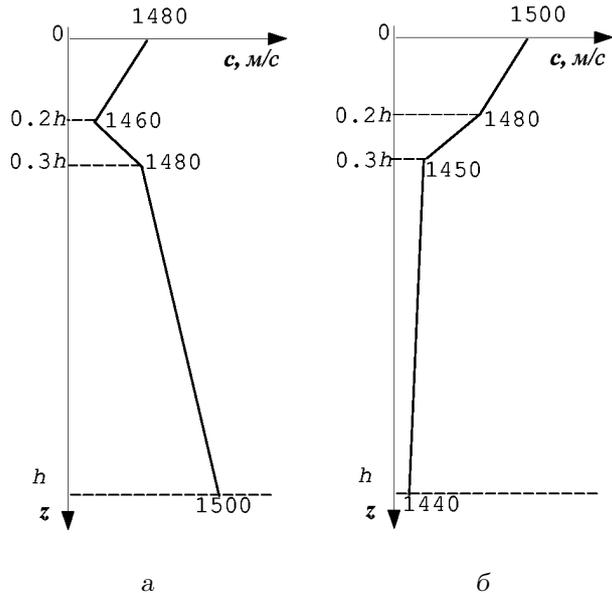


Рис. 3. Профили скорости звука, принятые в расчетах

с теоретическим утверждением о том, что в случае мелкой воды для расчета звукового поля вместо  $c(z)$  можно принять некоторое среднее постоянное значение [14], позволяющее описать поле в первом приближении. Отметим, что наибольшие отличия акустических полей друг от друга наблюдаются в непосредственной близости от дна.

На рис. 4 показано изменение нулевой моды с глубиной при тех же параметрах волновода для частоты  $\omega = 1000$  Гц. Так как теперь волновая толщина водного слоя возрастает на порядок, данный случай можно рассматривать как случай “глубокой воды”. Расчет нулевой моды для волновода с переменным профилем скорости звука проводился согласно алгоритму, описанному выше. Следует отметить, что для профиля скорости звука, представленного на рис. 3, а, подводный звуковой канал существует только на высоких частотах. При этом анализ кривых в частных областях показывает, что на оси звукового канала значения нулевой моды достигают максимума. Здесь же для сравнения приведена зависимость, соответствующая случаю волновода с постоянным профилем скорости звука. Анализ рис. 4 позволяет заключить, что в случае “глубокой воды” профиль скорости звука существенно влияет на звуковое поле неоднородного волновода. Что касается волновода с постоянным профилем скорости звука, для него наибольшее звуковое давление всегда достигается у дна. На рис. 5 представлен модуль амплитуды

потенциала скорости для волновода с выступом на оси подводного звукового канала, где достигается максимум звукового давления. На графике видны длиннопериодные осцилляции, обусловленные интерференцией нескольких первых мод.

Для наглядности на рис. 6 представлен модуль амплитуды потенциала скорости для волноводов с выступом и с ровным дном при относительно небольших изменениях расстояния. При данном профиле скорости звука (см. рис. 3, а) наличие выступа не влияет на факт существования подводного звукового канала (ср. с рис. 5). Несмотря на это, в звуковом канале происходит смещение максимумов и минимумов амплитуды потенциала и изменение их по абсолютной величине.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

1. Численно-аналитический алгоритм расчета звукового поля неоднородного гидроакустического волновода со ступенчатым дном дает возможность получить решение с требуемой точностью в достаточно широком диапазоне частот ( $\lambda \geq 0.1h$ ).
2. Найденные асимптотические оценки для неизвестных в бесконечной системе линейных алгебраических уравнений позволяют применить метод улучшенной редукции, сходимость которого на порядок выше, чем метода простой редукции.
3. Проведено улучшение сходимости рядов на границе частичных областей, что позволило аналитически выделить особенность в поведении колебательной скорости вблизи кромки акустически жесткого дна.
4. Численные исследования показали, что на длинах волн, соизмеримых с глубиной волновода, профиль скорости звука слабо влияет на звуковое поле, определяемое, главным образом, формой дна.
5. В случае “глубокой воды” ( $\lambda \approx 0.1h$ ) на звуковое поле существенное влияние оказывают как профиль скорости звука, так и форма дна. При этом наличие подводного выступа не влияет на существование звукового канала для рассмотренного профиля скорости звука (меняется лишь структура акустического поля).

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана.– Л.: Гидрометеиздат, 1982.– 264 с.

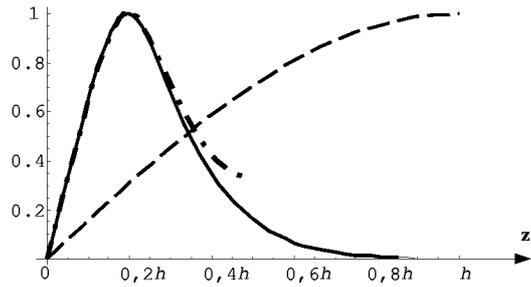


Рис. 4. Нулевая нормальная мода при  $f = 1000$  Гц:  
 сплошная – на глубине  $h_1$  для профиля  $c(z)$ , изображенного на рис. 3, а;  
 штрих-пунктирная – на глубине  $h_0$  для профиля  $c(z)$ , изображенного на рис. 3, а;  
 штриховая – на глубине  $h_1$  для  $c(z) = 1450$  м/с ( $\lambda = 91.06$  м)

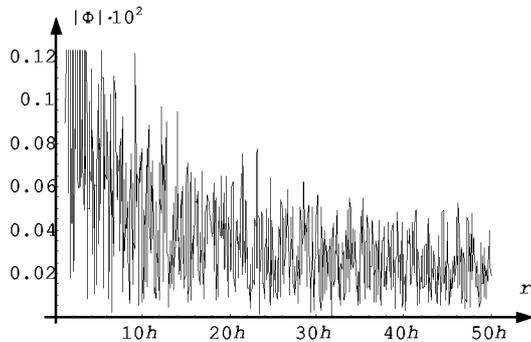


Рис. 5. Модуль амплитуды потенциала на оси звукового канала для волновода с выступом

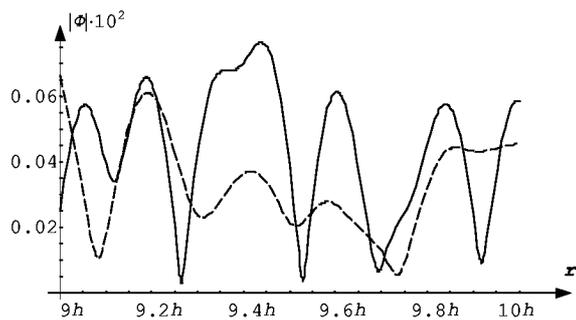


Рис. 6. Зависимость модуля амплитуды потенциала скорости  $|\Phi|$  на оси звукового канала ( $z = 0.2h$ ) от формы дна:  
 сплошная – волновод с выступом,  
 штриховая – волновод с ровным дном

2. Акустика океана / Под ред. Дж. Де Санто.– М.: Мир, 1982.– 318 с.
3. Шендеров Е. Л. Дифракция звуковой волны на открытом конце волновода с импедансными стенками и импедансными фланцами // Акуст. ж.– 2000.– 46, N 6.– С. 816–828.
4. Barton P. G., Rawlins A. D. Acoustic diffraction by semi-infinite plane with different face impedances // Quart. J. Mech. Appl. Math.– 1999.– 52, N 3.– P. 469–487.
5. Завадский В. Ю. Алгоритм быстрого вычисления волновых полей и его применение в задачах акустики океана // Акустические волны в океане / Под ред. Л. М. Бреховских, И. Б. Андреевой.– М.: Наука, 1987.– С. 52–62.
6. Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса.– М.: Мир, 1980.– 229 с.
7. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
8. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды.– М.: Наука, 1987.– 544 с.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– 576 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Марычев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.
11. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
12. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
13. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.– М.–Л.: ГИТТЛ, 1952.– 695 с.
14. Толстой И., Клей К. С. Акустика океана. Теория и эксперимент в подводной акустике.– М.: Мир, 1969.– 301 с.