Матвеев В.В., Титаренко Д.В., Титаренко В.Н. **УДК: 519.852.3+519.86**

О ПОСТРОЕНИИ СОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ С ДВУХСТОРОННИМИ НЕРАВЕНСТВАМИ

Аннотация. *В статье рассмотрена актуальная проблема построения совместной системы линейных ограничений для экономико–математических моделей, задач с двухсторонними ограничениями на переменные. Приведены примеры и сформулированы условия совместности линейных систем.*
Ключевые слова: *задача линейного программирования, экономико–математическое моделирование.*

Анотація. *У статті розглянута актуальна проблема побудови спільної системи лінійних обмежень для економіко–математичних моделей задач із двосторонніми обмеженнями на змінні. Наведені приклади і сформульовані умови спільності лінійних систем.*
Ключові слова: *задача лінійного програмування, економіко–математичне моделювання.*

Summary. *This article deals to the actual problem of building a joint system of linear constraints for economic and mathematical models problems with bilateral constraints on the variables. In applications of the economic models of production systems, lower and upper limits of the values correspond to the minimum and maximum possible values of variables and constraints which are specified explicitly. Such a statement, compared with the traditional when variables imposed only non–negativity condition, is more common and necessary in the construction of econometric models and the solution of practical problems of management and decision–making. Building a joint system of linear constraints and bilateral inequalities carried out on the basis of verification of the fulfillment of conditions:*
Consistency of a system of linear constraints in R^n *(Kronecker – Capelli theorem) ;*
Consistency of a system of linear constraints in R^n *and in* $X \geq 0$*, by constructing and solving linear programming problem, which determines the consistency in area where* $X \geq 0$*;*
Consistency of a system of linear constraints in the $X \geq X_{min}$*, by linear coordinate transformations (change of variables* $X=X_{min}+Z$*,* $Z \geq 0$ *and solving linear programming problem, which determines the consistency at* $Z \geq 0$ *and, that's why, at the area* $X \geq X_{min}$*);*
Consistency of a system of linear constraints at $X \leq X_{max}$*, by checking of the condition* $X_{max}-X_{min}=Z$*,* $Z \geq 0$*.*
There were given examples of solutions of the problem of determining the consistency of systems of linear constraints and restrictions on the variables in the form of bilateral inequalities.
Keywords: *linear programming, economic and mathematical modeling, the consistency of linear systems.*

Введение. В задачах экономико–математического моделирования на переменные могут налагаться ограничения в виде верхней и нижней границы допустимых значений [2]. Применительно к экономическим моделям производственных систем, нижние и верхние границы значений соответствуют минимальным и максимальным возможным значениям переменных и относятся к ограничениям, заданным в явном виде. Такая постановка, по сравнению с традиционной, когда на переменные налагается только условие неотрицательности, является более общей [3], [4] и необходима при построении экономико–математических моделей и решении практических задач управления и принятия решений.

Вопросу построения линейных экономико–математических моделей и решению задач посвящено достаточно публикаций, например [1], [5], [7], [8]. В работе [1] рассмотрен вопрос *совместности* системы линейных ограничений в области $X \geq 0$. В меньшей степени отражены результаты исследований совместности линейных систем с двухсторонними ограничениями.

Основной материал исследования. Цель данной работы заключается в определении условий при которых система линейных ограничений *совместна* в области двухсторонних ограничений на переменные, – $X_{min} \leq X \leq X_{max}$.

Процедура построения системы линейных ограничений *совместной* в области двухсторонних ограничений на переменные проводится поэтапно.

На начальном этапе необходимо провести анализ *совместности* системы линейных ограничений в области неотрицательных значений переменных.

В самом общем виде система линейных ограничений задач экономико–математического моделирования содержит как равенства, так и неравенства. Пусть линейная система ограничений все возможные типы и имеет вид (1):

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = -b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = -b_2 \\
\ldots \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = -b_p
\end{array}\right\} (1.1) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{p+11}x_1 + a_{p+12}x_2 + \ldots + a_{p+1n}x_n \le -b_{p+1} \\
a_{p+21}x_1 + a_{p+22}x_2 + \ldots + a_{p+2n}x_n \le -b_{p+2} \\
\ldots \\
a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n \le -b_q
\end{array}\right\} (1.2) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{q+11}x_1 + a_{q+12}x_2 + \ldots + a_{q+1n}x_n = b_{q+1} \\
a_{q+21}x_1 + a_{q+22}x_2 + \ldots + a_{q+2n}x_n = b_{q+2} \\
\ldots \\
a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = -b_l
\end{array}\right\} (1.3) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{l+11}x_1 + a_{l+12}x_2 + \ldots + a_{l+1n}x_n \le b_{l+1} \\
a_{l+21}x_1 + a_{l+22}x_2 + \ldots + a_{l+2n}x_n \le b_{l+2} \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{array}\right\} (1.4)
\end{array}\right\} \quad (1)
$$

В систему (1) введем вспомогательные переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l \ge 0$, со знаком, совпадающим со знаком при коэффициенте в правой части данного ограничения. Получим систему ограничений (2).

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - \xi_1 = -b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - \xi_2 = -b_2 \\
\ldots \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n - \xi_p = -b_p
\end{array}\right\} (2.1) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{p+11}x_1 + a_{p+12}x_2 + \ldots + a_{p+1n}x_n - \xi_{p+1} \le -b_{p+1} \\
a_{p+21}x_1 + a_{p+22}x_2 + \ldots + a_{p+2n}x_n - \xi_{p+2} \le -b_{p+2} \\
\ldots \\
a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n - \xi_q \le -b_q
\end{array}\right\} (2.2) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{q+11}x_1 + a_{q+12}x_2 + \ldots + a_{q+1n}x_n + \xi_{q+1} = b_{q+1} \\
a_{q+21}x_1 + a_{q+22}x_2 + \ldots + a_{q+2n}x_n + \xi_{q+2} = b_{q+2} \\
\ldots \\
a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n + \xi_l = b_l
\end{array}\right\} (2.3) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{l+11}x_1 + a_{l+12}x_2 + \ldots + a_{l+1n}x_n \le b_{l+1} \\
a_{l+21}x_1 + a_{l+22}x_2 + \ldots + a_{l+2n}x_n \le b_{l+2} \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{array}\right\} (2.4)
\end{array}\right\} \quad (2)
$$

Совместность системы линейных алгебраических уравнений в области действительных чисел устанавливается теоремой Кронекера–Капелли [1], [6]:

Теорема1. Для совместности системы линейных алгебраических уравнений n–го порядка необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы системы совпадал с рангом расширенной матрицы этой системы.

Существование неотрицательных решений $x \in R$, $x \ge 0$, для системы ограничений (1) можно определить на основании решения вспомогательной задачи линейного программирования [1]:

Среди неотрицательных решений (2) найти решение доставляющее минимум линейной функции (3)

$$f = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_l \quad (3)$$

Пусть, найденное решение $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \xi_1^0, \ldots, \xi_l^0$, тогда $f^0 = \xi_1^0 + \ldots + \xi_l^0 \ge 0$. Возможны 2 случая:

1) $f^0 = 0$, если $\xi_1^0 = \ldots = \xi_l^0 = 0$,– система (2) совпадает с (1), и, система (1) *совместна*.

2) $f^0 > 0$, система (1) *несовместна*, т.к. всякое неотрицательное решение, дополненное значениями $\xi_1^0 = \ldots = \xi_l^0 = 0$, является решением (2), для которого значение $f = 0$, что противоречит предположению $\min f > 0$. Приведенные выше рассуждения служат доказательством теоремы 2 [1]:

Теорема 2. Для совместности системы (1) в области неотрицательных значений переменных необходимо и достаточно, чтобы минимум линейной функции (3) при ограничениях (2) равнялся нулю.

Значение $f^0 = \min f$ служит мерой «отклонения» системы (1) от *совместности* в области неотрицательных решений.

Если $f^0 = 0$, то система *совместна*, если $f^0 > 0$, *несовместна.*

Задачу (2)–(3) можно решить симплекс–методом, перейдя в (2.2) и (2.4) к ограничениям типа равенств, введя дополнительные переменные $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{m-l} \geq 0$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{q-p} \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - \xi_1 = -b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - \xi_2 = -b_2 \\
... \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n - \xi_p = -b_p
\end{array}\right\} (4.1) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{p+11}x_1 + a_{p+12}x_2 + ... + a_{p+1n}x_n - \xi_{p+1} + \lambda_1 = -b_{p+1} \\
a_{p+21}x_1 + a_{p+22}x_2 + ... + a_{p+2n}x_n - \xi_{p+2} + \lambda_2 = -b_{p+2} \\
... \\
a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + ... + a_{qn}x_n - \xi_q + \lambda_{q-p} = -b_q
\end{array}\right\} (4.2) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{q+11}x_1 + a_{q+12}x_2 + ... + a_{q+1n}x_n + \xi_{q+1} = b_{q+1} \\
a_{q+21}x_1 + a_{q+22}x_2 + ... + a_{q+2n}x_n + \xi_{q+2} = b_{q+2} \\
... \\
a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n + \xi_l = b_l
\end{array}\right\} (4.3) \\
\left.\begin{array}{l}
a_{l+11}x_1 + a_{l+12}x_2 + ... + a_{l+1n}x_n + \eta_1 = b_{l+1} \\
a_{l+21}x_1 + a_{l+22}x_2 + ... + a_{l+2n}x_n + \eta_2 = b_{l+2} \\
... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \eta_{m-l} = b_m
\end{array}\right\} (4.4)
\end{array}\right\} \quad (4)$$

В решении системы (4) в качестве базисных переменных можно взять $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_l, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{m-l}$, а $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{q-p}$ – как свободные переменные.

Базисное решение:

$x_i = 0(i = 1,2,...,n); \lambda_i = 0(i = 1,2,...,q-p)$

$\xi_i = b_i(i = 1,...,l); \eta_i = b_{i+l}(i = 1,2,...,m-l)$

В силу предположения $b_i \geq 0(i = 1,2,...,m)$ базисное решение является допустимым.

Определение совместности системы линейных ограничений в области неотрицательных значений рассмотрим на следующем примере:

$$\left.\begin{array}{l}
2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\
x_1 - 4x_2 + x_3 \leq -2 \\
-x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1
\end{array}\right\} (5)$$

Для системы (5) построим систему ограничений (6) и линейную функцию (7)

$$\left.\begin{array}{l}
2x_1 - x_2 + x_3 - \xi_1 = -3 \\
x_1 - 4x_2 + x_3 - \xi_2 \leq -2 \\
-x_1 + 3x_2 - x_3 + \xi_3 = 2 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1
\end{array}\right\} (6)$$

$$f = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (7)$$

Вспомогательная задача линейного программирования:

Найти минимум (7) при ограничении (6) и условии $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0$.

Систему ограничений (6) приведем к канонической форме, введя дополнительные переменные λ_1, η_1.

$$\left.\begin{array}{l}
2x_1 - x_2 + x_3 - \xi_1 = -3 \\
x_1 - 4x_2 + x_3 - \xi_2 + \lambda_1 = -2 \\
-x_1 + 3x_2 - x_3 + \xi_3 = 2 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 + \eta_1 = 1
\end{array}\right\} (8)$$

Решая задачу линейного программирования (7), (8) симплекс–методом в среде MathCAD находим допустимое базисное решение:

$$\begin{pmatrix} 2x1 - x2 + x3 - \xi1 = -3 \\ x1 - 4x2 + x3 - \xi2 + \lambda1 = -2 \\ -x1 + 3x2 - x3 + \xi3 = 2 \\ x1 + 3x2 + x3 + \lambda2 = 1 \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} \xi1 \\ \xi2 \\ \xi3 \\ x2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi1 \\ \xi2 \\ \xi3 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}\cdot x1 + \frac{4}{3}\cdot x3 + \frac{1}{3}\cdot\lambda2 + \frac{8}{3} \\ \frac{7}{3}\cdot x1 + \frac{7}{3}\cdot x3 + \frac{4}{3}\cdot\lambda2 + \frac{2}{3} + \lambda1 \\ 2\cdot x1 + 2\cdot x3 + \lambda2 + 1 \\ \frac{-1}{3}\cdot x1 - \frac{1}{3}\cdot x3 - \frac{1}{3}\cdot\lambda2 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Целевая функция достигает минимума т.к.

$$\xi1 + \xi2 + \xi3 \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, \xi1 = \frac{7}{3}\cdot x1 + \frac{4}{3}\cdot x3 + \frac{1}{3}\cdot\lambda2 + \frac{8}{3} \\ \text{substitute}, \xi2 = \frac{7}{3}\cdot x1 + \frac{7}{3}\cdot x3 + \frac{4}{3}\cdot\lambda2 + \frac{2}{3} + \lambda1 \\ \text{substitute}, \xi3 = 2\cdot x1 + 2\cdot x3 + \lambda2 + 1 \end{array} \right. \to \frac{20}{3}\cdot x1 + \frac{17}{3}\cdot x3 + \frac{8}{3}\cdot\lambda2 + \frac{13}{3} + \lambda1 \quad (10)$$

$$f^0 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \frac{13}{3} > 0$$

Следовательно, исходная система (5) в области неотрицательных решений *несовместна*.

Рассмотрим пример *совместностной* системы линейных ограничений и двухсторонних неравенств:

Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &3 + 6\cdot x1 - x2 - x3 + 4\cdot x4 - x5 + 3\cdot x6 = 0 \\ &6 + 3\cdot x1 - x2 + 4\cdot x4 - 2\cdot x5 + 5\cdot x6 = 0 \\ &3 + 7\cdot x1 + 2\cdot x2 + 5\cdot x3 + 6\cdot x4 - x5 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

и двухсторонние ограничения

$$\begin{array}{lll} 0 \le x1 \le 5 & 0 \le x2 \le 6 & 1 \le x3 \le 9 \\ 0 \le x4 \le 7 & 2 \le x5 \le 15 & 2 \le x6 \le 10 \end{array} \quad (11.1)$$

Для проверки совместности системы в области неотрицательных значений введем переменные ξ1, ξ2, ξ3≥0 и решим задачу линейного программирования:

Найти минимум $f = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ при ограничениях (12).

$$\begin{aligned} &3 + 6\cdot x1 - x2 - x3 + 4\cdot x4 - x5 + 3\cdot x6 = \xi1 \\ &6 + 3\cdot x1 - x2 + 4\cdot x4 - 2\cdot x5 + 5\cdot x6 = \xi2 \\ &3 + 7\cdot x1 + 2\cdot x2 + 5\cdot x3 + 6\cdot x4 - x5 = \xi3 \end{aligned} \quad (12)$$

Оптимальное базисное решение системы (12)

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x3 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\cdot\xi1}{28} - \frac{x4}{2} - \frac{3\cdot\xi2}{28} + \frac{\xi3}{28} \\ \frac{x6}{2} - \frac{x4}{4} - \frac{x2}{2} - \frac{11\cdot\xi1}{56} + \frac{\xi2}{56} + \frac{9\cdot\xi3}{56} \\ \frac{5\cdot x4}{4} - \frac{x2}{2} + \frac{5\cdot x6}{2} + \frac{15\cdot\xi1}{56} - \frac{37\cdot\xi2}{56} + \frac{3\cdot\xi3}{56} + 3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Учитывая, что все ξ1, ξ2, ξ3 свободные переменные, получим ξ1=ξ2=ξ3=0 и, следовательно, ξ1+ξ2+ξ3=0. Это означает, что система (11) *совместна* в области неотрицательных значений переменных.

Совместность (11) и (11.1) рассмотрим в два этапа, разбив (11.1) на две группы:

$$0 \le x1 \quad 0 \le x2 \quad 1 \le x3 \quad 0 \le x4 \quad 2 \le x5 \quad 2 \le x6 \quad (11.2)$$

$$x1 \le 5 \quad x2 \le 6 \quad x3 \le 9 \quad x4 \le 7 \quad x5 \le 15 \quad x6 \le 10 \quad (11.3)$$

Проверку совместности (11) в области (11.2) выполним проведя замену переменных x1=z1+0; x2=z2+0; x3=z3+1; x4=z4+0; x5=z5+2; x6=z6+2, где z1,z2,z3,z4,z5,z6≥0. Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \xi1 = 3 + 6\cdot x1 - x2 - x3 + 4\cdot x4 - x5 + 3\cdot x6 \\ \xi2 = 6 + 3\cdot x1 - x2 + 4\cdot x4 - 2\cdot x5 + 5\cdot x6 \\ \xi3 = 3 + 7\cdot x1 + 2\cdot x2 + 5\cdot x3 + 6\cdot x4 - x5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x1 = 0 + z1 \\ \text{substitute}, x2 = 0 + z2 \\ \text{substitute}, x3 = 1 + z3 \\ \text{substitute}, x4 = 0 + z4 \\ \text{substitute}, x5 = 2 + z5 \\ \text{substitute}, x6 = 2 + z6 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} \xi1 = 6\cdot z1 - z2 - z3 + 4\cdot z4 - z5 + 3\cdot z6 + 6 \\ \xi2 = 3\cdot z1 - z2 + 4\cdot z4 - 2\cdot z5 + 5\cdot z6 + 12 \\ \xi3 = 7\cdot z1 + 2\cdot z2 + 5\cdot z3 + 6\cdot z4 - z5 + 6 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Задача линейного программирования, – Найти минимум $f = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ при ограничениях (14) и условии Z≥0.

Оптимальное решение достигается в базисе (z1, z3, z5) (15):

$$\begin{pmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\xi1}{28} - \frac{3\xi2}{28} + \frac{\xi3}{28} - \frac{z4}{2} \\ \frac{\xi2}{56} - \frac{11\xi1}{56} + \frac{9\xi3}{56} - \frac{z2}{2} - \frac{z4}{4} + \frac{z6}{2} \\ \frac{15\xi1}{56} - \frac{37\xi2}{56} + \frac{3\xi3}{56} - \frac{z2}{2} + \frac{5z4}{4} + \frac{5z6}{2} + 6 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Переменные ξ1, ξ2, ξ3 свободные, следовательно, ξ1=ξ2=ξ3=0, ξ1+ξ2+ξ3=0, и, система (11) совместна в области (11.2), – x1≥0, x2≥0, x3≥1, x4≥0, x5≥2, x6≥2.

Действительно, обратное преобразование z1=x1–0; z2=x2–0; z3=x3–1; z4=x4–0; z5=x5–2; z6=x6–2 и подстановка допустимых значений свободных переменных приводит к результату:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x3 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x4}{2} \\ \frac{x6}{2} - \frac{x4}{4} - \frac{x2}{2} - 1 \\ \frac{5 \cdot x4}{4} - \frac{x2}{2} + \frac{5 \cdot x6}{2} - 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

и, при допустимых значениях свободных переменных x2=0, x4=0, x6=4 получим решение:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x3 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{0}{2} \\ \frac{4}{2} - \frac{0}{4} - \frac{0}{2} - 1 \\ \frac{5 \cdot 0}{4} - \frac{0}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Анализ выполнения граничных условий на максимум, минимум для переменных показывает, что базисное решение не выходит за пределы допустимых значений, т.е. система ограничений (11), в области–(11.2)–(11.3) *совместна*, и полученное решение (17) может служить первоначальным допустимым базисом для решения задачи экономико–математического моделирования с двухсторонними ограничениями.

Можно показать, что система (11) *несовместна* в области $X \geq X_{max.}$

Действительно, замена переменных

$$\begin{pmatrix} \xi1 = 3 + 6x1 - x2 - x3 + 4x4 - x5 + 3x6 \\ \xi2 = 6 + 3x1 - x2 + 4x4 - 2x5 + 5x6 \\ \xi3 = 3 + 7x1 + 2x2 + 5x3 + 6x4 - x5 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x1 = 5 + z1 \\ \text{substitute}, x2 = 6 + z2 \\ \text{substitute}, x3 = 9 + z3 \\ \text{substitute}, x4 = 7 + z4 \\ \text{substitute}, x5 = 10 + z5 \\ \text{substitute}, x6 = 10 + z6 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} \xi1 = 6z1 - z2 - z3 + 4z4 - z5 + 3z6 + 66 \\ \xi2 = 3z1 - z2 + 4z4 - 2z5 + 5z6 + 73 \\ \xi3 = 7z1 + 2z2 + 5z3 + 6z4 - z5 + 127 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Допустимое базисное решение (18) для Z≥0, ξ≥0

$$\begin{pmatrix} z6 \\ z5 \\ \xi1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi2}{5} - \frac{2\xi3}{5} + \frac{11z1}{5} + z2 + 2z3 + \frac{8z4}{5} + \frac{181}{5} \\ 7z1 - \xi3 + 2z2 + 5z3 + 6z4 + 127 \\ \frac{3\xi2}{5} - \frac{\xi3}{5} + \frac{28z1}{5} + \frac{14z4}{5} + \frac{238}{5} \end{pmatrix}$$

Целевая функция достигает минимума

$\xi1 + \xi2 + \xi3 \,\text{substitute}, \xi1 = \frac{3\xi2}{5} - \frac{\xi3}{5} + \frac{28z1}{5} + \frac{14z4}{5} \to \frac{8\xi2}{5} + \frac{4\xi3}{5} + \frac{28z1}{5} + \frac{14z4}{5} + \frac{238}{5}$ и, $\xi1 + \xi2 + \xi3 > 0$

Следовательно, данная система несовместна в области $X \geq X_{max.}$

В случае, когда линейная система (11) в области (11.2) совместна, но хотя бы одна из переменных выходит за пределы своих максимально допустимых значений (11.3), то, для построения совместной системы ограничений в области (11.2) и (11.3) необходимо в (11) ввести новую переменную, имеющую смысл дополнительного потребителя, аналогично известному методу приведения открытой транспортной задачи к замкнутой (закрытой) форме.

Теорема 3. Для совместности системы линейных ограничений (1) и двухсторонних неравенств необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Система линейных ограничений (1) *совместна.*
2. Система линейных ограничений (1) *совместна* при $x \in R, x \geq 0$.
3. Система линейных ограничений (1) *совместна* в области $x \geq x_{\min}$.
4. Система линейных ограничений (1) *несовместна* в области $x \geq x_{\max}$.

Доказательство: Схема доказательства

1. Совместность системы линейных ограничений (1) устанавливается на основании утверждения теоремы Кронекера–Капелли (теорема 1).

2. Совместность системы ограничений (1) в области $x \geq 0$ устанавливается на основании утверждения теоремы1 и теоремы 2.

3. Совместность системы линейных ограничений (1) в области $x \geq x_{\min}$ устанавливается с путем замены переменных $x = x_{\min} + z$, где $z \geq 0$ и на основании утверждения теоремы 2. При этом обратное преобразование $z = x - x_{\min}$ не выводит переменные x из области $x \geq x_{\min}$.

4. Система линейных ограничений (1) должна быть *несовместной* в области $x \geq x_{\max}$ так как в ином случае все переменные решения линейной системы (1) $x \geq x_{\max}$.

Несовместность системы линейных неравенств в области $x \geq x_{\max}$ устанавливается на основании утверждения теоремы 2, после замены переменных $x = x_{\max} + z, z \geq 0$.

Если переменные системы (1) в совместной области $x \geq x_{\min}\left(x_i \geq x_{i\ \min}\ i = 1,2,...\right)$ и $x \leq x_{\max}\left(x_i \leq x_{i\ \max}\ i = 1,2,...\right)$, то система (1) совместна в области $\left(x_{i\ \min} \leq x \leq x_{i\ \max}\right)$.

Вывод. Определены условия совместности системы линейных ограничений и явных двухсторонних ограничений на переменные $\left(x_{i\ \min} \leq x \leq x_{i\ \max}\right)$, которые сформулированы в виде необходимых и достаточных условий (теорема 3), совместности системы линейных ограничений и двухсторонних неравенств.

Приведенные в работе примеры определения *совместности* и *несовместности* систем линейных ограничений и двухсторонних неравенств показывают возможность применения полученных в работе результатов для построения экономико–математических моделей линейных систем с подобными ограничениями.

Источники и литература:

1. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский. – М. :Наука, 1965– 312с.
2. Хэмди А. Таха. Введение в исследование операций, 6–е издание. / Таха А. Хэмди – М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
3. Зайченко Ю. П. . Исследование операций: Учебник. 6 изд. перераб. / Ю. П. Зайченко – Киев: Издательский дом «Слово», 2003.– 688 с.
4. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики / Ю. М. Коршунов – М.: Энергоатомиздат, 1987 – 258 с.
5. Ржевский С. В., Александрова В. М. Дослідження операцій / С. В. Ржевский, В. М. Александрова.– Київ: Академвидав, 2006. – 418с.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер – М: Гостехиздат, 1953. – 548с.
7. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем / Л. С. Лэсдон – М.: Наука, 1975.–432с.
8. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных – М.: Издательство «Дело и сервис» , 2001.– 368с.

Матюшенко О.І. **УДК 338.24**

ПРОБЛЕМАТИКА ПІДХОДІВ ДО ВИЗНАЧЕННЯ СТАДІЇ ЖИТТЄВОГО ЦИКЛУ ПІДПРИЄМСТВА

Анотація. *В статті наведено аналіз основних моделей життєвого циклу підприємства, розглянуто основні підходи до визначення підприємства на кривій життєвого циклу, визначено їх недоліки та переваги, запропонована схема оцінки стадії життєвого циклу підприємства, що базується на розрахунку інтегрального показника фінансово–господарської діяльності підприємства та застосуванні економіко–математичних моделей для визначення положення підприємства на кривій життєвого циклу.*
Ключові слова: *життєвий цикл, модель, підприємство, оцінка*

Аннотация. *В статье представлен анализ основных моделей жизненного цикла предприятия, рассмотрены основные подходы к определению предприятия на кривой жизненного цикла, их достоинства и недостатки, предложена схема оценки стадии жизненного цикла предприятия.*
Ключевые слова: *жизненный цикл, модель, предприятие, оценка.*

Summary. *The paper presents an analysis of the basic models of the life cycle of the enterprise, on the basis of which conclusions are drawn about the presence of contradictions in the approaches to the definition of the organizational life cycle . The article also identified and analyzed the main factors that affect the performance of the life cycle of the enterprise. In this study, the basic approaches to the determination on a life cycle curve, defined by their main advantages and disadvantages. On the basis of the analysis of literary sources in the article, a scheme assessment stage of the life cycle of the enterprise, which is based on the calculation of the integral index of financial–economic activity of the enterprise and application of econometric models to determine the position on a life cycle curve . The proposed method for determining the stage of the life cycle of the enterprise allows you to apply a systematic and comprehensive approach, and also to eliminate subjectivity*