

УДК 534.26

# АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛОЯ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ВИБРОВОЗБУЖДЕНИИ

В. Н. ОЛИЙНЫК

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 15.10.2001 ◊ Пересмотрено 14.02.2002*

Методом частичных областей решена задача о локальном вибровозбуждении плоскопараллельного слоя акустической среды, лежащего на абсолютно жестком основании. В качестве источника вибрации выступал приложенный к свободной поверхности слоя круглый жесткий поршень, совершающий гармонические колебания с заданной нормальной скоростью. Такая система предложена в качестве механической модели контактного взаимодействия поверхностных мягких биотканей грудной клетки человека с кинематическими датчиками, применяемыми в медицине и биофизических исследованиях. При этом возможность распространения в тканях поперечных волн игнорировалась. При проведении численного анализа основное внимание было уделено расчету частотных зависимостей импеданса излучения поршня в диапазоне, соответствующем слышимому звуку. Знание этой характеристики необходимо для прогнозирования искажений, вносимых присутствием датчика в колебания грудной клетки в зоне контакта. Полученные результаты свидетельствуют о том, что, пренебрегая распространением поперечных волн, невозможно адекватно смоделировать контактное взаимодействие вибратора (датчика) с биотканью.

Методом частковых областей розв'язано задачу про локальне віброзбудження плоскопараллельного шару акустичного середовища, який лежить на абсолютно жорсткій основі. За джерело вібрації правив прикладений до вільної поверхні шару круглий жорсткий поршень, який здійснює гармонічні коливання із заданою нормальною швидкістю. Таку систему запропоновано як механічну модель контактної взаємодії поверхневих м'яких біотканей грудної клітки людини з кінематичними сенсорами, які застосовуються у медицині й біофізичних дослідженнях. При цьому можливість розповсюдження в тканинах поперечних хвиль ігнорувалась. При проведенні чисельного аналізу основну увагу було приділено розрахунку частотних залежностей імпеданса випромінювання поршня в діапазоні, який відповідає чутному звуку. Знання цієї характеристики необхідне для прогнозування спотворень, які вносяться присутністю сенсора у коливання грудної клітки в зоні контакту. Одержані результати свідчать про те, що, нехтуючи можливістю розповсюдження поперечних хвиль, неможливо адекватно змодельювати контактну взаємодію вибратора (сенсора) з біотканиною.

A problem on local vibrational excitation of a plane-parallel layer of acoustical medium, which is situated on absolutely rigid foundation is solved by the method of partial domains. A circular piston attached to a free surface of the layer and harmonically oscillating with a given normal velocity was considered as a source of vibration. Such system was offered as the mechanical model of a contact interaction between the surface soft tissues of human thorax and a kinematical sensor, like the one used in medicine and biophysical researches. At the same time the possibility of propagation of the transverse waves in the tissues was ignored. When conducting the numerical analysis the main attention was paid to calculating the frequency dependencies of piston's radiation impedance in range corresponding to audible sound. This characteristic is necessary to be known to forecast the distortions introduced by presence of a sensor in vibration of the thorax in a contact zone. Obtained results give evidence that when neglecting the possibility of propagation of the transverse waves it is impossible to simulate properly a contact interaction between the vibrator (sensor) and the biotissue.

## ВВЕДЕНИЕ

Волновые процессы в слое являются традиционным для акустики объектом исследований. В задачах с такой геометрией, как правило, возможна четкая и ясная физическая трактовка результатов в терминах теории волноводов. Поэтому слоистые структуры весьма популярны при моделировании реальных процессов в гидро- и сейсмоакустике, материаловедении и неразрушающем контроле.

Особо следует выделить задачи, связанные со взаимодействием контактных измерительных устройств и поверхностей податливых материалов. В этом случае присутствие измерительного устройства может приводить к существенному искажению ближнего поля, по сравнению со сво-

бодной поверхностью, поскольку создаваемая им механическая нагрузка не является пренебрежимо малой. Наибольшую актуальность проблема такого взаимодействия приобрела в связи с развитием современных методов объективной регистрации звуков дыхания и сердечной деятельности на поверхности грудной клетки человека [1]. Дело в том, что, несмотря на более чем полувековую историю исследований, до сих пор нет достаточно полного и непротиворечивого представления ни о механических свойствах мягких биотканей [2–4], ни о закономерностях поведения контактного датчика на поверхности тела [5–7]. Кроме того, на сегодняшний день до конца не выяснена роль, которую играет в формировании виброакустического поля вблизи зоны контакта тип закрепления датчика на

теле.

Исходя из этого, представляется целесообразным провести решение ряда модельных задач о локальном вибровозбуждении слоя сплошной среды, задаваясь при этом различными ее реологическими моделями. Такой подход должен способствовать выявлению роли различных факторов в формировании картины контактного взаимодействия поверхности тела человека с вибратором или вибродатчиком. Очевидно, что в качестве первого приближения следует взять линейную изотропную упругую среду. Заметим, что упрощающая замена слоистой строения грудной клетки структурой, в которой слой податливых поверхностных тканей расположен на более жесткой подложке, достаточно широко применяется в задачах по моделированию вибровозбуждения поверхности тела [8, 9].

С точки зрения динамической теории упругости, вибратор или датчик естественно рассматривать как жесткий штамп, контактирующий с деформируемой поверхностью. Для того, чтобы охарактеризовать поведение такой системы, широко используется специфическая величина – входной механический импеданс поверхности в зоне контакта. По сути, входной импеданс интегральным образом описывает механические свойства той пространственной области деформируемой среды, которая существенным образом участвует во взаимодействии со штампом [1, 4, 6]. Заметим, что указанная постановка может быть сформулирована и как задача о нахождении импеданса излучения поршня с однородным распределением амплитудной функции скорости, колеблющегося на поверхности податливого слоя.

Целью данной статьи является рассмотрение задачи о вибровозбуждении деформируемого слоя при упрощающем предположении об отсутствии в среде поперечных волн.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫБОР РАССЧЕТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим задачу о колебаниях плоскопараллельного слоя толщиной  $h$ , лежащего на неподвижном абсолютно жестком основании. Верхнюю поверхность слоя будем считать свободной от напряжений, за исключением круговой площадки радиуса  $r_0$ , на которой задана гармонически изменяющаяся во времени по закону  $V_0 e^{-i\omega t}$  колебательная скорость (рис. 1). Предположим, что среда, заполняющая слой, – акустическая и имеет плотность  $\rho$  и скорость звука  $c$ .

Поскольку изначально мы задались целью смоделировать ситуацию вибрационного возбуждения

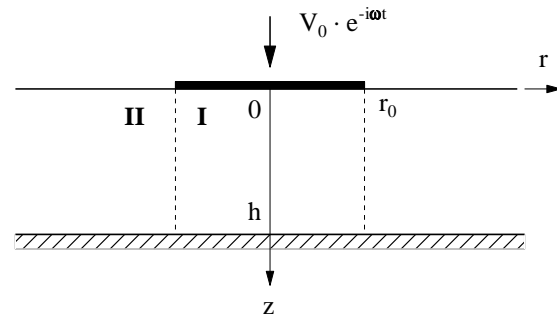


Рис. 1. Слой на жестком основании, возбуждаемый круглым поршнем

поверхности тела человека, то физические константы среды следует выбрать, основываясь на известных экспериментальных данных о свойствах мягких биотканей [2, 5]. Что касается плотности, то она ненамного превышает плотность воды. Поэтому, как и большинство исследователей, будем полагать  $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$ . Измерение скорости звука (продольной волны) также не вызывает особых трудностей. Ее принято считать практически равной скорости звука в воде:  $c = 1500 \text{ м/с}$ .

Строго говоря, предположение о том, что в рассматриваемой среде не могут распространяться поперечные волны, не соответствует действительности. Однако, применительно к мягким биотканям, в которых скорость распространения поперечных волн намного меньше скорости звука<sup>1</sup>, в качестве первого модельного приближения чисто акустическое описание среды выглядит вполне логичным.

Для мягких биотканей характерно значительное затухание упругих волн, но имеющиеся на этот счет количественные данные довольно противоречивы [2, 4, 6]. Оставляя в стороне вопрос об исследовании истинных причин и характера затухания звука в биотканях, в этой работе ограничимся простейшим случаем – декремент затухания  $\delta = 0$ .

Переходя к выбору геометрических параметров, отметим, что рассматриваемая задача характеризуется волновой толщиной слоя  $kh$  (где  $k = \omega/c$ ) и безразмерным отношением  $r_0/h$ .

Будем исходить из того, что для подавляющего большинства людей толщина поверхностных мягких тканей, покрывающих реберный каркас грудной клетки, составляет от 1 до 5 см. Нас интересует вибрационный отклик грудной клетки на частотах звукового диапазона, ведь именно

<sup>1</sup>По разным оценкам, скорость поперечных волн в мышечной ткани и эпителии составляет от 5 до 50 м/с [2, 3, 5].

здесь сосредоточена диагностически значимая информация о состоянии сердца и органов респираторной системы, получаемая посредством их акультации. Принято считать, что верхняя частота слышимых звуков составляет 20 кГц. Тогда в рамках рассматриваемой модели  $kh < 5$ .

Согласно данным, опубликованным в [1, 10, 11], характерные диаметры контактных датчиков, используемых для регистрации сигналов на поверхности грудной клетки, составляют от 2 до 4 см. Следовательно, с учетом принятого предположения о величине  $h$ , следует считать  $0.2 \leq r_0/h \leq 2$ . Заметим, что, в силу малости волновых размеров контактного датчика в интересующем нас диапазоне частот, импедансный подход должен вполне удовлетворительно описывать локальное поведение биоткани с точки зрения особенностей кинематики датчика, закрепленного на поверхности тела.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА И ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В соответствии с принятыми допущениями, акустическое поле в слое описывается потенциалом  $\Phi$ , удовлетворяющим уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

Введенный акустический потенциал однозначно связан с физическими полями давлений и скоростей [12]:

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\omega \rho \Phi, \quad \vec{v} = -\text{grad} \Phi.$$

Заметим, что вследствие радиальной симметрии постановки,  $\Phi = \Phi(r, z)$ , т. е. поле зависит только от радиальной и толщинной координат. При этом оператор Лапласа, записанный в цилиндрической системе координат, упрощается до

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Физической модели рассматриваемой системы соответствует следующий набор граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= V_0, & 0 \leq r \leq r_0, & \quad z = 0, \\ \Phi &= 0, & r_0 < r < \infty, & \quad z = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, & 0 \leq r < \infty, & \quad z = h, \end{aligned} \quad (2)$$

причем первые два относятся к свободной поверхности, возбуждаемой круглым жестким вибратором радиуса  $r_0$ , а последнее описывает контакт слоя с абсолютно жестким основанием. Замыкает математическую формулировку условие при  $r \rightarrow \infty$ , которое можно трактовать, например, как постулирование отсутствия акустических источников на бесконечности [12].

Постановка (1), (2) является задачей со смешанными граничными условиями на поверхности  $z=0$ . Традиционно такие задачи решаются с помощью интегральных преобразований по пространственным координатам, приводящих к весьма громоздким вычислительным процедурам [13]. В связи с этим в биоакустике зачастую используют упрощенную постановку, при которой на площадке контакта считается заданной не скорость, а равномерно распределенные механические напряжения [9, 14]. Ясно, что такая замена не вполне адекватна, поскольку изначальное задание известных напряжений в зоне контакта не позволяет в полной мере исследовать влияние такого важного фактора как степень сцепления штампа с поверхностью слоя в том случае, когда учитывается наличие касательных напряжений.

Альтернативный подход к решению подобных смешанных граничных задач основан на разбиении полной области существования поля на несколько подобластей, которые имеют каноническую форму и не содержат разрывов (в смысле смены типов граничных условий) на гладких частях границ. Предполагается, что в каждой из таких подобластей можно явным образом записать в виде ряда Фурье общее решение, в точности удовлетворяющее условиям на принадлежащей ей части границы исходной области. Для того, чтобы убрать произвол, содержащийся в решениях для каждой из подобластей, на их общих границах дополнительно задаются естественные условия непрерывности (сопряжения) физических полей. Далее, с помощью процедуры ортогонализации, функциональные уравнения, соответствующие условиям сопряжения, трансформируются в бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

На сегодняшний день этот подход, за которым закрепилось название “метод частичных областей”, широко применяется для решения волновых задач акустики, теории волноводов и т. п. [12]. Основными его достоинствами являются методическая простота, а также достаточно большая гибкость при выборе геометрии подобластей [15, 16]. Как показано на ряде примеров, применительно к задачам линейной акустики, метод частичных областей обеспечивает приемлемую скорость

сходимости и точность численных результатов. В частности, следует отметить достаточно высокую эффективность указанного подхода к решению задачи о звуковом поле в цилиндре [16], постановка которой во многом сходна с рассматриваемой здесь задачей о слое.

Исходя из вышеизложенного, для решения граничной задачи (1), (2) применим метод частичных областей. Очевидно, что рассматриваемый слой может быть разбит на две подобласти (см. рис. 1)

$$I: \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq h,$$

$$II: \quad r_0 < r < \infty, \quad 0 \leq z \leq h,$$

в каждой из которых общее решение для звукового поля записывается в виде соответствующего ряда по собственным функциям:

$$\Phi_I = \frac{V_0}{k} \left\{ -\frac{\cos k(z-h)}{\sin kh} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(k_n^I r) \cos \frac{\pi n}{h} z \right\}, \quad (3)$$

$$\Phi_{II} = \frac{V_0}{k} \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_0^{(1)}(k_m^{II} r) \sin \frac{\pi(2m+1)}{2h} z.$$

Здесь  $J_0$  и  $H_0^{(1)}$  – соответственно функции Бесселя и Ханкеля первого рода, имеющие нулевой порядок;

$$k_n^I = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2};$$

$$k_m^{II} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi(2m+1)}{2h}\right)^2}.$$

Заметим, что в представлении поля для области I первое слагаемое позволяет удовлетворить неоднородное условие на поверхности поршня (штампа). Что касается ряда в области II, он выбран таким образом, чтобы при выбранной временной зависимости для физических полей автоматически удовлетворялось условие на бесконечности.

Условия сопряжения в нашем случае записываются для акустического потенциала и его производной по координате  $r$ , что соответствует требованию непрерывности полей давления и нормальной составляющей колебательной скорости на границе раздела подобластей:

$$\Phi_I = \Phi_{II}, \quad \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$0 \leq z \leq h, \quad r = 0.$$

Подставив в эти соотношения ряды (3), после применения процедуры ортогонализации получа-

ем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов  $A_n$  и  $B_m$ :

$$A_n J_0(k_n^I r_0) \varepsilon_{nn}^I - \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_0^{(1)}(k_m^{II} r_0) \varepsilon_{nm} = -\tilde{\varepsilon}_n, \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n^I J_0'(k_n^I r_0) \varepsilon_{nm} - B_m k_m^{II} H_0^{(1)'}(k_m^{II} r_0) \varepsilon_{mm}^{II} = 0.$$

В уравнениях (5) штрихами обозначены производные по полным аргументам. Кроме того,

$$\varepsilon_{nn}^I = \frac{1}{h} \int_0^h \cos^2 \frac{\pi n}{h} z dz = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \frac{1}{2}, & n>0; \end{cases}$$

$$\varepsilon_{mm}^{II} = \frac{1}{h} \int_0^h \sin^2 \frac{\pi(2m+1)}{2h} z dz = \frac{1}{2};$$

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{h} \int_0^h \cos \frac{\pi n}{h} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2h} z dz = \frac{2}{\pi} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 4n^2};$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \frac{1}{h \sin kh} \int_0^h \cos k(z-h) \cos \frac{\pi n}{h} z dz = \frac{kh}{(kh)^2 - (\pi n)^2}.$$

По определению, импеданс излучения жесткого поршня или, что в данном случае то же самое, механический импеданс контактного участка слоя равен отношению полной реакции на поверхности поршня к его нормальной скорости:

$$\mathcal{Z} = \frac{2\pi}{V_0} \int_0^{r_0} p_0(r) r dr.$$

Здесь  $p_0(r) = -i\omega\rho\Phi_I(r, 0)$  – акустическое давление на поверхности поршня. Зная распределение акустического поля под поршнем и воспользовавшись известными правилами интегрирования функций Бесселя [17], запишем в явном виде выражение для полного импеданса, являющееся базовым для

последующего количественного анализа:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{-2\pi i \omega \rho}{V_0} \int_0^{r_0} \Phi_I(r, 0) r dr = \rho c \pi r_0^2 Z^* = \\ &= -i \rho c \pi r_0^2 \left\{ -\text{ctg} kh + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_1(k_n^I r_0)}{k_n^I r_0} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $Z^*$  – значение импеданса, нормированное к волновому сопротивлению среды  $\rho c$  и площади поршня.

В завершение сделаем замечание о сходимости решения рассматриваемой задачи вблизи линии смены типа граничного условия  $r=r_0, z=0$ . Согласно [12, 18], здесь поле скоростей имеет особенность, порядок которой однозначно определяется локальной геометрией и типами граничных условий в окрестности кромки поршня. Как нетрудно убедиться, следуя методике, изложенной в [18], в данном случае скорости (производные акустического потенциала  $\Phi$ ) будут иметь на кромке поршня особенности порядка  $R^{-1/2}$ , где  $R = \sqrt{(r-r_0)^2 + z^2}$ . Знание характера особенности важно с точки зрения формально однозначного описания акустического поля в рассматриваемой области, однако опыт решения конкретных задач говорит о том, что эффекты, связанные с учетом особенностей, проявляются лишь вблизи угловых точек и точек смены типа граничного условия [12]. Кроме того, хотя в силу смены типа условия, при  $r=r_0$  на поверхности слоя должен наблюдаться скачок давления (разрыв первого рода) [16], за счет интегрирования по площади поршня, ряд (6) для импеданса излучения должен обладать более быстрой сходимостью, чем ряд для акустического потенциала  $\Phi_I$ . Это позволяет применить к решению бесконечной линейной системы (5) метод простой редукции, не заботясь о выделении особенностей в окрестности линии  $r=r_0, z=0$ .

Рис. 2 и 3 иллюстрируют качество выполнения условий сопряжения по акустическому потенциалу и скорости  $v_r$  на границе раздела подобластей I, II. Как видно из графиков, везде, кроме небольших глубин  $z < 0.1$ , наблюдается хорошее согласование акустических полей при  $r=r_0$ . Заметим, что приведенная на указанных рисунках картина достаточно типична для широкого диапазона параметров  $kh$  и  $r_0/h$ . В подавляющем большинстве случаев удовлетворительного сопряжения удавалось добиться, удерживая при применении метода простой редукции к системе (5) всего по 5–6 коэффициентов  $A_n$  и  $B_m$ . Это свидетельствует о высокой эффективности выбранной методики решения и ее реализации в виде численного алгоритма.

### 3. АНАЛИЗ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Прежде, чем приступить к количественному анализу, отметим, что при  $kh < \pi/2$  все собственные моды, входящие в ряд для  $\Phi_{II}$ , являются неоднородными. Действительно, указанные  $kh$  соответствуют частотам, лежащим ниже частоты запираания волновода с одной мягкой границей. Следовательно, в длинноволновом (низкочастотном) диапазоне не наблюдается излучения акустической энергии и радиационная составляющая активной компоненты входного импеданса  $\text{Re } Z$  равна нулю (а поскольку мы положили  $\delta=0$ , то и  $\text{Re } Z=0$ ).

Оценим поведение мнимой части импеданса на низких частотах ( $kh \ll 1$ ). Анализируя систему (5), легко убедиться, что при  $kh \rightarrow 0$  справедливы оценки  $A_0 = O(1/kh)$  и  $A_n = O(kh)$ ,  $n \geq 1$ . Воспользовавшись асимптотическими свойствами функций Бесселя при малых значениях аргумента [17], в окрестности  $kr_0=0$  имеем, с точностью до главного члена,

$$2A_0 \frac{J_1(kr_0)}{kr_0} = \frac{1}{kh} + O(kr_0).$$

В то же время, при  $kh \rightarrow 0$

$$\text{ctg} kh = \frac{1}{kh} + O(kh).$$

С учетом этих соотношений, из формулы (6) получаем, что при  $kh \rightarrow 0$   $Z \sim -i\omega M$ , где  $M = \text{const}$ . Таким образом, в пренебрежении распространением поперечных волн низкочастотная асимптотика импеданса поршня, взаимодействующего с деформируемым слоем, носит массовый характер.

Этот вывод весьма наглядно иллюстрируется с помощью известного в акустике подхода, именуемого методом мнимых источников. Действительно, рассматриваемая задача о колебаниях поршня на свободной границе эквивалентна задаче о жестком поршне, осциллирующем вокруг нейтрального положения  $z=0$  посередине слоя толщины  $2h$ , имеющего жесткие стенки  $z = \pm h$ . По существу, осциллирующий поршень представляет собой своеобразный диполь, который на низких частотах организует интенсивное движение среды в ближнем поле: периодическое “перекачивание” между областями  $z < 0$  и  $z > 0$ . В таком случае присутствие среды ощущается поршнем как некоторая присоединенная масса. Очевидно, что эти рассуждения применимы и к ограниченным областям с плоской свободной поверхностью.

На рис. 4 показаны типичные зависимости  $Z(kh)$  для двух разных отношений  $r_0/h$ . Для

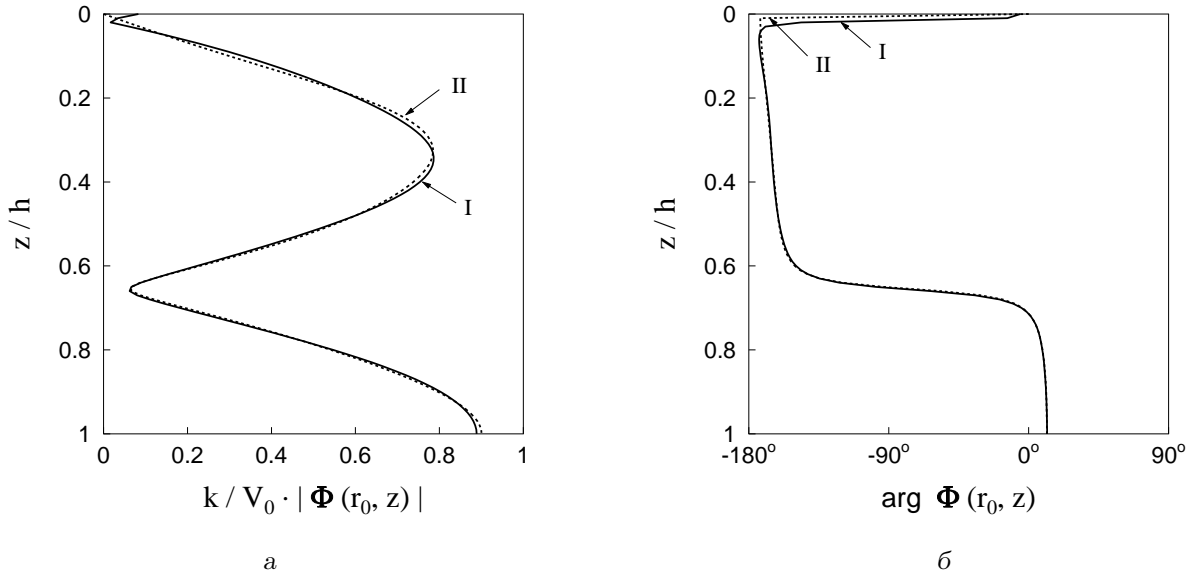


Рис. 2. Акустический потенциал при  $r=r_0$ ,  $kh=5$ ,  $r_0/h=0.7$  (в рядах (3) удержано по 8 членов):  
 сплошные – ряд для области I, штриховые – ряд для области II

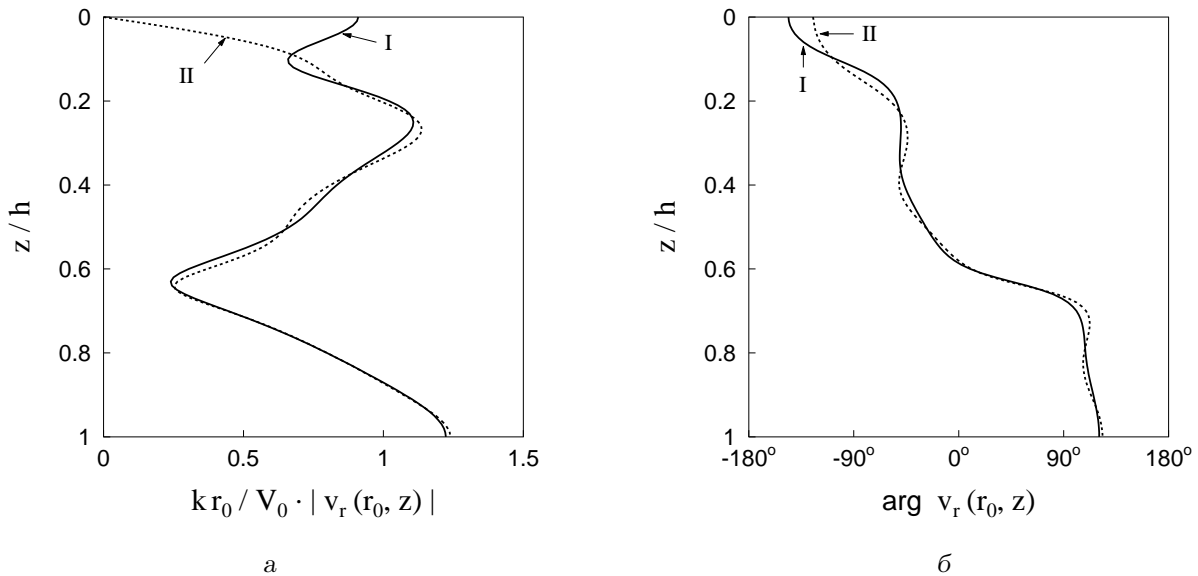


Рис. 3. Радиальная скорость при  $r=r_0$ ,  $kh=5$ ,  $r_0/h=0.7$  (в рядах (3) удержано по 8 членов):  
 сплошные – ряд для области I, штриховые – ряд для области II

удобства восприятия активная часть импеданса  $\mathbf{Re} Z(kh)$  дана в логарифмическом масштабе, тогда как реактивная  $\mathbf{Im} Z(kh)$  – в линейном. Из графиков следует, что с качественной точки зрения поведение импеданса диктуется, в первую очередь, изменением волновой толщины слоя. Действительно, резонансы системы, опре-

деляемые условием  $\mathbf{Im} Z(kh)=0$  (при смене характера с упругого на массовый), независимо от величины  $r_0$ , явно тяготеют к волновым числам  $kh=\pi(2m+1)/2$ . Это естественным образом связано с тем, что при каждом из указанных значений  $kh$  происходит открытие волновода на соответствующей ( $m$ -ой) моде, см. зависимости для

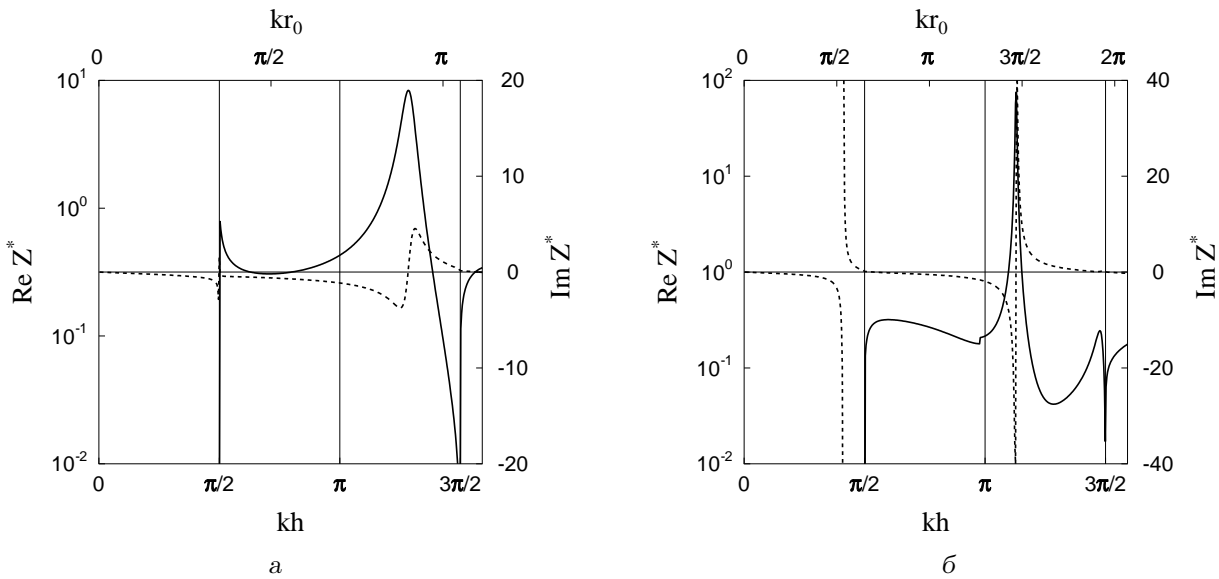


Рис. 4. Импеданс излучения поршня для  $r_0/h=0.7$  (а) и  $r_0/h=1.3$  (б):  
сплошные –  $\text{Re } Z$ , штриховые –  $\text{Im } Z$

**Re  $Z(kh)$ .**

Проследим за точками, в которых импеданс меняет тип с массового на упругий. Характерная особенность этих своеобразных резонансов колебательных систем заключается в том, что в их окрестности наблюдается резкое возрастание  $\text{Im } Z$ , так что система становится невосприимчивой к попыткам “вкчать” в нее энергию. По этой причине резонансные точки такого типа получили название “антирезонансов”. Известно, что резонансы и антирезонансы в системе всегда чередуются [19]. Любопытно, что, с формальной точки зрения, первым резонансом слоя со свободной верхней границей будет  $kh=0$ . В таком случае первый антирезонанс должен находиться в пределах  $0 \leq kh \leq \pi/2$ , т. е. еще до того, как первая собственная мода в подобласти II станет распространяющейся. Поэтому при подходе к первому антирезонансу активная часть импеданса равна нулю, а реактивная обращается в бесконечность. Особенно хорошо это видно на рис. 4, б.

Что касается последующих антирезонансов, то, как и следовало ожидать, вследствие уноса акустической энергии на бесконечность импеданс здесь остается ограниченным, а вместо разрыва второго рода наблюдается резкий переход мнимой части через нуль. При этом на соответствующей частоте наблюдается пик  $\text{Re } Z$ . Видно также, что с ростом отношения  $r_0/h$  частоты антирезонансов снижаются. Таким образом, влияние относительной величины поршня проявляется, в основном, в

изменении частот антирезонансов и амплитудных значений  $Z$ .

Сравнивая полученные результаты с экспериментальными данными о входном импедансе слоя мягких биотканей, нагружаемых вибратором, необходимо отметить следующее. Верхний предел частотной полосы, характерной для звуков дыхания и сердца, составляет  $2 \div 4$  кГц [20]. В рамках принятых модельных оценок это соответствует волновым размерам  $kh < 1$ . С точки зрения продольных волн, этот диапазон является дорезонансным, а следовательно, импеданс в нем должен иметь массовый характер и быть примерно пропорциональным частоте. Однако все известные экспериментальные характеристики, полученные для полосы частот от 0 до 1000 Гц, говорят об обратном – на низких частотах  $\text{Im } Z$  ведет себя как упругость, а характер массы приобретает только после резонанса в районе  $f = 100 \div 200$  Гц [4, 6].

Такое поведение системы может быть объяснено только при усложнении базовой модели исследуемого объекта. В первую очередь, это можно сделать, введя в рассмотрение наличие касательных напряжений в среде по типу линейной упругости, что эквивалентно возможности распространения в слое поперечных волн. Действительно, наличие касательных напряжений может эффективно препятствовать “свободному перетеканию” среды в ближнем поле вибратора, формируя упругую реакцию на нагружение свободной поверхности. В

качестве косвенного аргумента в защиту этой гипотезы можно привести модель [9], дающую частотную зависимость импеданса, качественно сходную с экспериментальной. Здесь “касательные напряжения” фиктивно вводились за счет наличия мембраны, покрывающей свободную поверхность объекта, имитирующего грудную клетку.

Можно предположить, что экспериментально зафиксированный резонанс слоя биоткани связан с открытием волновода в области I на нижней моде для поперечной волны. В пользу этого говорит следующее рассуждение. Условие открытия волновода можно записать в виде  $c_s = 4fh$ , где  $c_s$  – скорость поперечных волн. Подставив в эту формулу оценочные пределы изменения  $h$  и экспериментально зафиксированные значения резонансной частоты, получаем  $c_s = 4 \div 40$  м/с, что вполне удовлетворительно согласуется с данными, приведенными в работах [2, 3].

## ВЫВОДЫ

1. Кинематически возбуждаемый с помощью вибратора слой акустической среды с одной свободной поверхностью демонстрирует волновое поведение, обуславливаемое наличием дискретного спектра частот запертия, которые являются функциями волновой толщины слоя.
  2. Акустический импеданс слоя в области низких частот носит массовый характер. Это противоречит экспериментальным данным, согласно которым слой мягких биотканей демонстрирует упругое поведение при частоте, стремящейся к нулю.
  3. Полученные результаты свидетельствуют о том, что, пренебрегая распространением поперечных волн, невозможно адекватно смоделировать контактное взаимодействие вибратора (датчика) с биотканью.
1. Олійник В. Н. Рациональне проектування п'єзоакселерометрів для вимірювань на піддатливих поверхнях // Акуст. вісн.– 1998.– 1, N 3.– С. 54–65.
  2. Самойлов В. О., Понамаренко Г. Н., Енин Л. Д. Низкочастотная биоакустика.– С.-Пб.: Реверс, 1994.– 215 с.
  3. Пашовкин Т. Н., Сарвазян А. П. Механические характеристики мягких биологических тканей // Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологиче-

ских тканей.– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 105–115.

4. Тиманин Е. М. Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 75–91.
5. Oestreicher H. L. Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // J. Acoust. Soc. Amer.– 1951.– 23, N 6.– P. 707–714.
6. Verburg J., van Vollenhoven E. Phonocardiography: physical and technical aspects and clinical uses // Non invasive physiological measurements.– London: Academic press, 1979.– P. 213–259.
7. Zhang X., Royston T. J., Mansy H. A., Sandler R. H. Radiation impedance of a finite circular piston on a viscoelastic half-space with application to medical acoustics // J. Acoust. Soc. Amer.– 2001.– 109, N 2.– P. 795–802.
8. Клочков Б. Н., Соколов А. В. Волны в поверхностном слое мягкой биоткани на полупространстве из твердой биоткани // Акуст. ж.– 1994.– 40, N 2.– С. 270–274.
9. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Олейник В. Н. Проблемы моделирования акустических свойств грудной клетки и измерения шумов дыхания // Акуст. ж.– 1995.– 41, N 5.– С. 758–768.
10. Vermarien H., van Vollenhoven E. The recording of heart vibrations: a problem of vibration measurement on soft tissue // Med. & Biol. Eng. & Comput.– 1984.– 22.– P. 168–178.
11. Антопец А. В., Анишкина Н. М. Пьезоакселерометры ПАМТ // Виброакустические поля сложных объектов и их диагностика.– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 191–203.
12. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 235 с.
13. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред.– М.: Наука, 1989.– 344 с.
14. Клочков Б. Н. Ближнее поле силового низкочастотного источника на слоистой биоткани // Акуст. ж.– 2002.– 48, N 1.– С. 70–76.
15. Гринченко В. Т. Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика.– 1996.– 70.– С. 27–40.
16. Вовк И. В., Городецкая Н. С. Об особенностях применения метода частичных областей для оценки звукового поля в ограниченных областях // Гидромеханика.– 1995.– 69.– С. 36–42.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1971.– 1108 с.
18. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.– М: Мир, 1964.– 428 с.
19. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы.– М.: Мир, 1971.– 557 с.
20. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Дахнов Л. С., Крижановский В. В., Олійник В. Н. Шумы дыхания человека: объективизация аускультативных признаков // Акуст. вісн.– 1999.– 2, N 3.– С. 11–32.