УДК 517.938

С.Ю. ПОСЛАВСКИЙ

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрены динамические системы, описываемые комбинацией дифференциальных уравнений и дискретного переключающего сигнала. Цель работы: найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова системы с переключениями и получить условия экспоненциальной устойчивости. При помощи качественных методов анализа дифференциальных уравнений были получены новые условия экспоненциальной устойчивости. Результаты работы могут быть использованы при исследовании устойчивости различных систем автоматического управления и других динамических систем.

Розглянуто динамічні системи, що описуються комбінацією диференціальних рівнянь і дискретного переключаючого сигналу. Мета роботи: знайти верхню оцінку максимального показника Ляпунова системи з переключенями і отримати умови експоненціальної стійкості. За допомогою якісних методів аналізу диференціальних рівнянь були отримані нові умови експоненціальної стійкості. Результати роботи можуть бути використані при дослідженні стійкості різних динамічних систем, систем автоматичного керування та інших динамічний систем.

Dynamic systems described by a combination of differential equations and a discrete switching signal are examined. The research objective is to find an upper estimate for the Lyapunov maximum exponent of the switched system and conditions for exponential stability. New conditions for exponential stability have been found using qualitative analytic methods of differential equations. The results can be employed to investigate the stability of the various systems of automatic control and other dynamic systems..

Введение. В последнее время значительное внимание уделяется исследованию гибридных систем, в частности систем с переключением. Это связано с тем, что математические модели, построенные с использованием дифференциальных уравнений с переключаемой правой частью, позволили адекватно описать значительное количество реальных систем в различных областях науки и техники, например: двигатели с автоматической коробкой передач, распределенные системы автоматизированного управления, электрические схемы импульсных источников питания, коммуникационные протоколы сети Интернет и многие другие.

Постановка проблемы. В статье рассматриваются динамические системы, которые описываются комбинацией дифференциальных уравнений и дискретного переключающего сигнала

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + f_i(x(t-\tau(t)),t),$$

$$x \in \mathrm{R}^n,\ \tau(t) \in [0,h],\ x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-h,0],\ A_i \in \Omega = \{A_1,\dots,A_m\}, \quad (1)$$

где A_i – заданные матрицы размерности $n \times n$. Функции $\tau(t)$, $x_0(t)$ и $f_i(x,t)$ кусочно-непрерывны, причем $\|x_0(t)\| \le M$ и

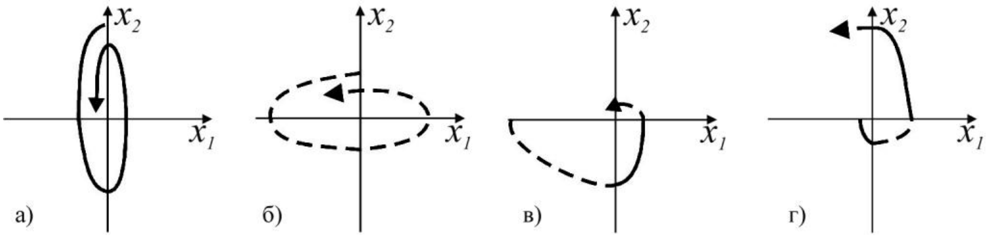
$$\| f_i(x,t)\| \le k\|x\|, \quad (2)$$

где $\|\cdot\|$ – любая норма вектора и согласованная норма матрицы.

Переключающий сигнал $i(t):[0,\infty) \to \{1,..m\}$ – кусочно-непрерывная постоянная функция, определяющая последовательность переключений между подсистемами.

Анализ устойчивости является важной частью исследования таких систем. Отметим особенности систем с переключением, влияющие на их устойчивость. Представим систему, в которой $x \in \mathrm{R}^2$, $i(t):[0,\infty) \to \{1,2\}$.

Предположим, что обе подсистемы устойчивы с фазовыми траекториями, показанными на рис. 1 (а, б) соответственно.



а) б) в) г)

Рис. 1

Различный выбор переключающего сигнала $i(t)$ может привести как к асимптотической устойчивости соответствующей системы (рис. 1, в), так и к неустойчивости (рис. 1, г). Другими словами, случайные переключения могут дестабилизировать переключающуюся систему, даже если все ее подсистемы являются устойчивыми. Это приводит к задаче об устойчивости системы при произвольных переключениях: необходимо найти условия, которые гарантируют устойчивость (1) для любого закона переключения $i(t)$.

Решение этой задачи представляет интерес для систем, в которых механизм переключения неизвестен или слишком сложен, чтобы быть полезным для анализа устойчивости. Такой подход может также использоваться для анализа аварийного режима работы системы с известным законом переключения.

Анализ публикаций по теме исследования. Гибридные системы привлекли внимание ученых во второй половине прошлого века. Прообразом таких систем были релейные системы и системы со скачкообразными изменениями параметров. Теория систем с переменной структурой разрабатывалась Барбашиным Е. А. и Емельяновым С. В. (см., например, [1, 2]). В работах Мартынюка А. А. [3, 4] рассматривались нелинейные системы со структурными возмущениями, для анализа устойчивости таких систем было предложено использовать матричнозначные функции Ляпунова. Филлипов А. Ф. [5] рассматривал вопросы устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов. Современное состояние теории устойчивости систем с переключениями отображено в обзорах [6, 7]. Большинство существующих работ посвящено исследованию линейных систем. Для них были установлены условия устойчивости, связанные с условием существования общей квадратичной функции Ляпунова (ОКФЛ). Однако существование ОКФЛ дает только достаточные условия устойчивости, которые могут быть очень консервативными. Были предприняты попытки использования различных классов функций Ляпунова для ослабления условий, основанных на ОКФЛ. Следует отметить, что для нелинейных систем не существует общих конструктивных способов построения функций Ляпунова. Для некоторых частных случаев были получены необходимые и достаточные условия устойчивости [6 – 8]. В [9] для системы (1), в которой матрицы A_i попарно коммутируемы ($A_iA_j = A_jA_i$ для всех $i \neq j$), были получены условия устойчивости.

Цель статьи. Найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова системы (1) для общего случая, получить условия экспоненциальной устойчивости систем с произвольными переключениями.

Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова. Максимальный показатель Ляпунова равен**:**

$$\bar{\lambda} = \sup \lambda(i(t)),$$

$$\lambda(i(t)) = \overline{\lim} \frac{\ln\|x(t,i(t))\|}{t}, \tag{3}$$

где $\lambda(i(t))$ – показатель Ляпунова решения $x(t,i(t))$, а супремум вычисляется по всем функциям $i(t)$, удовлетворяющим указанным выше условиям.

Таким образом, начиная с некоторого N для любого решения системы (1) имеем

$$\|x(t)\| \le N \exp(\bar{\lambda} t),\ t \in (0,\infty). \tag{4}$$

Поэтому необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости системы служит неравенство $\bar{\lambda} < 0$.

Запишем (1) в виде

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + (A_i - A_0)x(t) + f_i(x(t-\tau(t)),t), \tag{5}$$

где

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_i}{m}.$$

Представим решение (5) в виде

$$x(t) = W(t,0)x(0) + \int_0^t W(t,s)\big[(A_i - A_0)x(s) + f_i(x(s-\tau(s)),s)\big]ds, \tag{6}$$

где $W(t,s)$ – матрицант уравнения $\dot{x}(t) = A_0 x(t)$. Пусть α – его наибольший показатель Ляпунова, тогда при некотором $M > 0$ и любых $0 \le s \le t < \infty$

$$\|W(t,s)\| \le M \exp(\alpha(t-s)). \tag{7}$$

Очевидно, что верхнюю границу величины $\bar{\lambda}$ следует искать в интервале

$$\lambda > \alpha. \tag{8}$$

Положим

$$\begin{aligned} v_0(t,\lambda) &= \int_0^t \max_i\big[\|W(t,s)(A_i - A_0)\|\big]\exp(-\lambda(t-s))ds, \\ v(t,\lambda,\tau) &=)\int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s)]\|W(t,s)\|ds. \end{aligned} \tag{9}$$

В силу (7) и (8) функции $v_0(t,\lambda)$ и $v(t,\lambda,\tau)$ ограничены на $[0,\infty)$. Пусть

$$v_0(\lambda)=\sup_t v_0(t,\lambda)\ \ v(\lambda,\tau)=\sup_t v(t,\lambda,\tau)\,,\ \text{при}\ t\ge 0\,.$$

Матрицы A_i и, следовательно, A_0 постоянны, поэтому

$$W(t,s)=W(t-s)\,,$$

$$v_0(t,\lambda)=\int_0^t \max_i\left[\left\|W(t-s)(A_i-A_0)\right\|\right]\exp(-\lambda(t-s))ds=$$

$$=\int_0^t \max_i\left[\left\|W(s)(A_i-A_0)\right\|\right]\exp(-\lambda(s))ds\,,$$

$$v(t,\lambda,\tau)=\int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s)]\left\|W(t-s)\right\|ds=\int_0^t \exp[-\lambda(s+\tau(s)]\left\|W(s)\right\|ds\,.$$

Очевидно, что здесь $v_0(t,\lambda)$ и $v(t,\lambda,\tau)$ монотонно возрастают по t, следовательно

$$v_0(\lambda)=\lim v(t,\lambda)\,,\ v(\lambda,\tau)=\lim v(t,\lambda,\tau)\ \text{при}\ t\to\infty\,.$$

Пусть λ_+ – наибольший по $\tau(t)$ корень уравнения

$$v_0(\lambda)+kv(\lambda,\tau)=1\,. \tag{10}$$

Соответствующая функция $\tau(t)$ определяется из следующих соображений. Как видно из (9), $v(t,\lambda,\tau)$ убывает по λ. Поэтому $\lambda_+<0$ и $\lambda_+>0$ при $v_0(0)+kv(0)<1$ и $v_0(0)+kv(0)>1$, соответственно. С другой стороны, при возрастании $\tau(t)$ функция $v(t,\lambda,\tau)$ убывает при $\lambda>0$ и возрастает при $\lambda<0$. Поэтому при вычислении $v(\lambda,\tau)$ и в (10) полагаем $\tau=h$ в случае $v_0(0)+kv(0)<1$ и $\tau=0$ в случае $v_0(0)+kv(0)>1$ (при $v_0(0)+kv(0)=1$ левая часть (10) не зависит от $\tau(t)$).

Следующая теорема дает верхнюю оценку показателя $\bar{\lambda}$.

Теорема 1. Для системы (1) при произвольном $i(t)$

$$\bar{\lambda}\le\lambda_+\,. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ – решение (1). Положив в (5) $x(t)=y(t)\exp(\lambda t)$, получим

$$y(t)=\exp(-\lambda t)W(t,0)x(0)+\exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)(A_i-A_0)\exp(\lambda s)y(s)ds+$$

$$+\exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)\,f_i(\exp(\lambda(s-\tau(s)))y(s-\tau(s)),s)ds\,.$$

Используя (2), получим неравенство

$$\|y(t)\| \le \exp(-\lambda t)\|W(t,0)x(0)\| +$$

$$+\int_0^t \max_i \left[\|W(t,s)(A_i - A_0)\|\right]\exp(-\lambda(t-s))\|y(s)\|ds + \tag{14}$$

$$+k\int_0^t \exp(-\lambda(t-s+\tau(s)))\|W(t,s)\|\|y(s-\tau(s))\|ds$$

Пусть

$$\|y(t_*)\| = \max\|y(t)\| \text{ при } t \in [0, t_+], \tag{15}$$

где $t_* = t_*(t_+)$. Положив в (14) $t = t_*$ и учитывая (15) и (9), получим

$$\|y(t_*)\| \le \exp(-\lambda t_*)\|W(t,0)x(0)\| + \|y(t_*)\|\left[v_0(\lambda) + kv(\lambda,\tau)\right]. \tag{16}$$

Покажем, что при $\lambda \ge \lambda_+$ функция $\|y(t)\|$ ограничена на интервале $(0,\infty)$. Действительно, в противном случае $t_* \to \infty$ при $t_+ \to \infty$ и в силу (7) и (8) $\exp(-\lambda t_*)\|W(t,0)x(0)\| \to 0$. Так как $v_0(t,\lambda)$ и $v(t,\lambda,\tau)$ убывают по λ, то $v(\lambda) < 1$ при $\lambda > \lambda_+$ и любых допустимых $\tau(t)$ (как показано выше, λ_+ определяется при тех значениях $\tau(t)$, для которых левая часть 10 максимальна). Но при этом неравенство (16) не выполняется для достаточно больших t_*. Полученное противоречие доказывает, что $\|y(t)\| = \|x(t)\|\exp(-\lambda t) < \infty$ при $\lambda > \lambda_+$ и $t > 0$; следовательно, $\bar{\lambda} \le \lambda_+$. Теорема 1 доказана.

Условие экспоненциальной устойчивости. Следующая теорема дает достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (1) при произвольном переключающем сигнале.

Теорема 2. При условии

$$v_0(0) + kv(0) < 1 \tag{17}$$

система (1) экспоненциально устойчива при любом переключающем сигнале.

Доказательство. Как отмечено выше, необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости служит неравенство $\bar{\lambda} < 0$, где $\bar{\lambda}$ – максимальный показатель Ляпунова. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова λ_+ определяется из уравнения (10). При $\lambda_+ = 0$ левая часть (10) не зависит от $\tau(t)$. Так как $v_0(\lambda)$ и $v(\lambda,\tau)$ убывают по λ, то $\lambda_+ < 0$ при $v_0(0) + kv(0) < 1$ и, следовательно, $\bar{\lambda} < 0$. Теорема 2 доказана.

Примеры расчетов. Проиллюстрируем применение полученных оценок на примерах.

Пример 1. Рассмотрим трехмерную систему с переключениями. Пусть

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + f_i(x(t-\tau(t)),t),$$
$$\|f_i(x,t)\| \le k\|x\|,$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

По формуле $A_0 = \sum_{i-1}^{m} A_i \Big/ m$ вычислим среднюю матрицу

$$A_0 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Условие экспоненциальной устойчивости (17) принимает вид

$$k < \frac{1 - \int\limits_0^\infty \max\limits_i \left[\| W(s)(A_i - A_0) \| \right] ds}{\int\limits_0^\infty \| W(s) \| ds},$$

где $W(s) = \exp[A_0 s]$.

На рис. 2 представлены графики верхней оценки наибольшего показателя Ляпунова $\lambda_+(k)$ при различных значениях максимальной величины запаздывания h. При вычислениях задавались λ и h, затем с помощью соотношения (10) определялись значения k (в расчетах использовалась евклидова норма $\|W(s)\|$, равная наибольшему собственному значению матрицы $\left[W(s)^T W(s)\right]^{1/2}$).

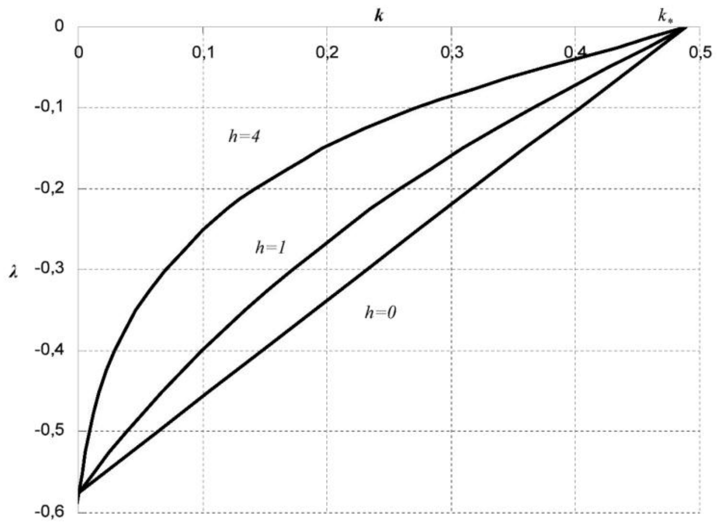


Рис. 2

Функции $\lambda_+(k,h)$ возрастают по h и k, однако $\lim k(\lambda, h) = k_* = 0{,}4883$ при $\lambda \to 0$ не зависит от h. Поэтому условие $k < 0{,}4883$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы при любом конечном h.

Пример 2. Рассмотрим теперь частный случай (1) – переключающуюся систему

$$\dot{x}(t) = \left[A_i + \mu I\right] x(t),$$

где I – единичная матрица и

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0.1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Матрица $A_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left[A_i + \mu I\right]}{3}$.

Очевидно, что собственные значения матриц $\left[A_i + \mu I\right]$ равны $\lambda_{ip} + \mu$, $p = 1, 2$, где λ_{ip} – собственные значения матрицы A_i. При $\mu < 1.904\ldots$ каждая подсистема устойчива.

Вычисления показали, что при $\mu_* = -0{,}636\ldots$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3.636 & 0 \\ -0.3 & -2.303 \end{bmatrix},$$

$$v_0(0) = 1.$$

Следовательно, если $\mu < \mu_*$, система устойчива при любом переключающем сигнале. Для этого примера, в [8] было показано, что условие $\mu < 1.082\ldots$ является необходимым и достаточным для устойчивости рассматриваемой системы. Разница между условиями устойчивости позволяет судить о консервативности предложенных в данной работе достаточных условий.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В данной работе предложен новый подход для анализа устойчивости систем с переключениями, найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова для произвольного закона переключения. Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (1). Применение полученных оценок проиллюстрировано на примерах.

1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости / *Е. А. Барбашин*. – М. : Наука, 1967. – 224 с.
2. *Емельянов С. В.* Системы автоматического управления с переменной структурой / *С. В. Емельянов*. – М. : Наука, 1967. – 336 с.
3. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости систем с развивающимися возмущениями / *А. А. Мартынюк* // Доклады АН УССР, Сер. А. – 1975. – №7. – С. 613 – 616.
4. *Мартынюк А. А.* Анализ устойчивости непрерывных систем со структурными возмущениями / *А. А. Мартынюк* // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 7. – С. 25 – 52.
5. *Филиппов А. Ф.* Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов / *А. Ф. Филиппов* // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 8. – С. 48 – 55.
6. *Lin H.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems : A Survey of Recent Results / *H. Lin, P. J. Antsaklis* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2009. – Vol. 54. – P. 308 – 322.
7. *Васильев С. Н.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем / *С. Н. Васильев, А. И. Маликов* // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. – Казань : Фолиант. – 2011. – Т.1. – С. 23 – 81.
8. *Zevin A. A.* General Solution of Stability Problem for Plane Linear Switched Systems and Differential Inclusions / *A. A. Zevin, M. A. Pinsky* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2008. – Vol. 53. – P. 2149 – 2153.
9. Stability analysis for a class of nonlinear switched system / *H. Bo, X. Xuping, A. N. Michel, P. J. Antsaklis* // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. – 1999. – V. 5. – P. 4374 – 4379.

Институт транспортных систем и технологий
Национальной академии наук Украины,
Днепропетровск

Получено 01.10.13
в окончательном варианте 17.09.14