УДК 517.9

В. В. Семенов, Л. М. Чабак

Новий варіант регуляризації методів екстраградієнтного типу

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Запрононовано нову схему регуляризації методів екстраградієнтного типу для розв'язання монотонної варіаційної нерівності в нескінченновимірному гільбертову просторі. Для регуляризованого основного варіанта екстраградієнтного методу доведено теорему про сильну збіжність до нормального розв'язку варіаційної нерівності.

Варіаційні нерівності — зручна загальна форма запису та дослідження різних нелінійних задач [1]. Зокрема, у вигляді задачі розв'язання варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, знаходження точок рівноваги Неша в грі тощо. Побудова та дослідження методів розв'язання варіаційних нерівностей є цікавим та багатим на результати напрямом прикладного нелінійного аналізу [2].

У даній роботі пропонується нова схема регуляризації методів екстраградієнтного типу розв'язання монотонних варіаційних нерівностей у гільбертових просторах. Схема регуляризації є привабливою в обчислювальному плані модифікацією гібридного методу Такахасі–Такеучі–Куботи [3], що запропонована та досліджена в роботі [4].

1. Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$.

Нехай $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина; $A\colon H \to H$ — монотонний та ліпшицевий (зі сталою $L > 0$) на множині C оператор. Розглянемо варіаційну нерівність з оператором A на множині C:

$$\text{знайти} \qquad x \in C\colon \quad (Ax, y - x) \geqslant 0 \qquad \forall\, y \in C. \tag{1}$$

Множину розв'язків задачі (1) позначимо $VI(A,C)$.

Зауваження 1. При вказаних умовах множина $VI(A,C)$ опукла та замкнена (можливо порожня). Непорожність множини $VI(A,C)$ забезпечить додаткова умова обмеженості множини C або коерцитивності оператора A [1].

Одним з найбільш популярних методів розв'язання варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод Корпелевич [5], який для (1) має вигляд

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \end{cases}$$

де P_C — метрична проекція на множину C, $\lambda \in (0, 1/L)$.

Дослідженню та модифікаціям екстраградієнтного методу Корпелевич присвячено багато робіт, зокрема [6–12]. Добре відомо, що цей метод для (1) лише слабко збіжний у випадку нескінченновимірності простору H. Також відомо декілька регуляризованих варіантів методу, які забезпечують сильну збіжність. Перш за все, метод, що отриманий за допомогою схеми ітеративної регуляризації:

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \\ x_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) z_n. \end{cases}$$

Тут $\lambda_n \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 1/L)$. Породжена цим методом послідовність (x_n) сильно збігається до нормального (мінімальної норми) розв'язку нерівності (1) при умові $VI(A, C) \neq \varnothing$ [10]. Далі, останнім часом набули популярності так звані гібридні сильно збіжні варіанти екстраградієнтного методу. Це метод Надьожкіної–Такахасі [13]:

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \\ C_n = \{z \in H \colon \|z - y_n\| \leqslant \|z - x_n\|\}, \\ Q_n = \{z \in H \colon (x_n - z, x_1 - x_n) \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap C_n} x_1, \end{cases}$$

де $\lambda_n \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 1/L)$, та метод, що грунтується на схемі Такахасі–Такеучі–Куботи [3] для апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів:

$$\begin{cases} x_1 \in H, \qquad C_1 = C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n \colon \|z - y_n\| \leqslant \|z - x_n\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_1, \end{cases} \tag{2}$$

де $\lambda_n \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 1/L)$. Для гібридних методів доведено сильну збіжність послідовності (x_n) до точки $P_{VI(A,C)} x_1$. Основний недолік ітерацій (2) — зростаюча складність опуклих множин C_n, на які проектується точка x_1. Бажаною є модифікація схеми (2) без зростання складності допоміжних множин. У даній роботі ми пропонуємо можливий варіант такої модифікації. Але ціною буде зростання кількості метричних проектувань на ітераційному кроці.

2. Для довільної пари елементів $x, y \in H$ визначимо множину

$$H(x, y) = \{z \in H \colon \|z - y\| \leqslant \|z - x\|\}.$$

Множина $H(x, y)$ є замкненим напівпростором, що збігається з H у випадку $x = y$.

Для апроксимації нормального розв'язку варіаційної нерівності (1) пропонується

Алгоритм 1. Будуємо послідовність (x_n) за схемою

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \\ x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де $\alpha_0 = 1$; (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$, $\lambda_n \in \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 1/L)$.

Доведемо сильну збіжність згенерованих алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (y_n) та (z_n) до точки $P_{VI(A,C)}0$.

Відома така лема.

Лема 1 ([13]). *Для породжених алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (y_n) та (z_n) має місце нерівність*

$$\|z_n - z\|^2 \leqslant \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda_n^2 L^2)\|x_n - y_n\|^2, \tag{3}$$

де $z \in VI(A,C)$.

Має місце

Теорема 1. *Нехай H — гільбертовий простір; $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина; $A\colon H \to H$ — монотонний та ліпшицевий на множині C оператор; $VI(A,C) \neq \neq \varnothing$. Тоді згенеровані алгоритмом 1 послідовності (x_n), (y_n) та (z_n) сильно збігаються до нормального розв'язку варіаційної нерівності* (1).

Доведення. Покажемо, що для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$ має місце вкладення

$$VI(A,C) \subseteq H(x_n, z_n).$$

Для елемента $z \in VI(A,C)$ за лемою 1 маємо

$$\|z_n - z\| \leqslant \|x_n - z\|.$$

Отже, $z \in H(x_n, z_n)$, звідки випливає $VI(A,C) \subseteq H(x_n, z_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

За теоремою 1 роботи [4], послідовність (x_n) сильно збігається до елемента найменшої норми множини $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H(x_k, z_k)$, тобто

$$x_n \to u = P_{\cap_{k=1}^{\infty} H(x_k, z_k)} 0.$$

Покажемо, що $u \in VI(A,C)$, чим і доведемо теорему. Оскільки $u \in H(x_n, z_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\|z_n - u\| \leqslant \|x_n - u\|.$$

Після граничного переходу отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n - u\| = 0$, звідки $u \in C$. З нерівності (3) випливає

$$\|x_n - y_n\|^2 \leqslant \frac{\|x_n - z\|^2 - \|z_n - z\|^2}{1 - \lambda_n^2 L^2} \qquad \forall\, z \in VI(A,C).$$

Оскільки $x_n \to u$, $z_n \to u$, то з останньої оцінки випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0. \tag{4}$$

Для $y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ маємо

$$(y_n - (x_n - \lambda_n A x_n), y - y_n) = (y_n - x_n, y - y_n) + \lambda_n (A x_n, y - y_n) \geqslant 0 \qquad \forall\, y \in C.$$

Після граничного переходу з урахуванням (4) отримаємо

$$(Au, y - u) \geqslant 0 \qquad \forall\, y \in C,$$

тобто $u \in VI(A, C)$.

3. Приділимо увагу двом модифікаціям алгоритму 1.

Для пошуку точки з $VI(A, C)$, що є найближчою до заданої $d \in H$, можна використати схему

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n d + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n. \end{cases}$$

Розглянемо дворівневу варіаційну нерівність [10]:

$$\text{знайти} \qquad x \in VI(A_2, VI(A_1, C)), \tag{5}$$

де $C \subseteq H$ — замкнена опукла множина; $A_1 \colon H \to H$ — монотонний та ліпшіцевий оператор; $A_2 \colon H \to H$ — сильно монотонний та ліпшіцевий оператор. Якщо $VI(A_1, C) \neq \varnothing$, то задача (5) має єдиний розв'язок, для апроксимації якого можна використати схему

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A_1 x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A_1 y_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n (x_n - \mu_n A_2 x_n) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де параметри λ_n, μ_n обираються певним чином.

Обидві наведені схеми є сильно збіжними.

4. У 2011 р. для варіаційних нерівностей [7] та задач про рівновагу [8] були запропоновані модифікації методу Корпелевич з одним проектуванням на допустиму множину C. У цих так званих субградієнтних екстраградієнтних методах перший етап ітерації збігається з першим етапом ітерації методу Корпелевич (обчислення y_n), а далі для отримання x_{n+1}, замість проектування точки $x_n - \lambda_n A y_n$ на множину C, точку $x_n - \lambda_n A y_n$ проектують на певний опорний напівпростір множини C в точці y_n.

Розглянемо регуляризований варіант субградієнтного екстраградієнтного методу для варіаційної нерівності (1).

Алгоритм 2. Будуємо послідовність (x_n) за схемою

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ T_n = \{w \in H\colon (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, w - y_n) \leqslant 0\}, \\ z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n), \\ x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$, $\lambda_n \in \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 1/L)$.

Зауваження 2. В роботі [14] досліджено збіжність двох регуляризацій субградієнтного екстраградієнтного методу за допомогою гібридних схем апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів [3, 13].

Для породжених алгоритмом 2 послідовностей також матиме місце нерівність (3) [7, 8]. Тому подібними до наведених міркуваннями отримуємо, що алгоритм 2 сильно збігається до нормального розв'язку варіаційної нерівності (1).

Аналогічний результат має місце для такого регуляризованого алгоритму Ценга [6].

Алгоритм 3. Будуємо послідовність (x_n) за схемою

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = y_n - \lambda_n (A y_n - A x_n), \\ x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$, $\lambda_n \in \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 1/L)$.

Робота В. В. Семенова фінансово підтримана ДФФД України (проект GP/F49/061).

1. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – Москва: Мир, 1983. – 256 с.
2. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problem. Vol. 2. – New York: Springer, 2003. – xxxiii + 666 p.
3. *Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R.* Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **341**. – P. 276–286.
4. *Семенов В. В.* Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2013. – № 1(111). – С. 46–56.
5. *Корпелевич Г. М.* Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и мат. методы. – 1976. – **12**, № 4. – С. 747–756.
6. *Tseng P.* A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. – 2000. – **38**. – P. 431–446.
7. *Censor Y., Gibali A., Reich S.* The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space // J. of Optitmization Theory and Applications. – 2011. – **148**. – P. 318–335.

8. *Ляшко С. И., Семенов В. В., Войтова Т. А.* Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 4. – С. 146–154.
9. *Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В.* Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2011. – № 1(104). – С. 10–23.
10. *Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В.* Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Там само. – 2012. – № 1(107). – С. 3–14.
11. *Malitsky Yu. V., Semenov V. V.* A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // J. of Global Optimization. – 2014. – doi:10.1007/s10898-014-0150-x.
12. *Малицкий Ю. В., Семенов В. В.* Вариант экстраградиентного алгоритма для монотонных вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 2. – С. 125–131.
13. *Nadezhkina N., Takahashi W.* Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. – 2006. – **16**. – P. 1230–1241.
14. *Censor Y., Gibali A., Reich S.* Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space // Optimization Methods and Software. – 2011. – **26**. – P. 827–845.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка
Київська державна академія водного транспорту
ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного

Надійшло до редакції 07.04.2014

В. В. Семенов, Л. М. Чабак

Новый вариант регуляризации методов экстраградиентного типа

Предложена новая схема регуляризации методов экстраградиентного типа для решения монотонного вариационного неравенства в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Для регуляризованного основного варианта экстраградиентного метода доказана теорема о сильной сходимости к нормальному решению вариационного неравенства.

V. V. Semenov, L. M. Chabak

A new variant of regularization for extragradient methods

The article suggests a new regularization scheme of extragradient type methods to solve monotone variational inequalities in an infinite-dimensional Hilbert space. The theorem on strong convergence to the normal solution of the variational inequality for a regularized basic variant of the extragradient method is proved.