

Функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

Запропоновано функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона. Знайдено достатні умови, які забезпечують суперекспоненціальну швидкість збіжності методу. Одержані теоретичні результати проілюстровано на числовому прикладі.

1. Про постановку задачі. Об'єктом розгляду даної роботи є задача Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона виду

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x, y)) = f(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_y(x, y)|_{y=0} = \psi(x), \quad (2)$$

$(x, y) \in \Omega$, де $\Omega = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty, y > 0\}$.

Відомо, що рівняння Клейна–Гордона, яке є релятивістською версією рівняння Шредінгера, має широкі застосування в сучасній фізиці. Воно є моделлю, яка описує хвильову функцію нейтрально зарядженої елементарної частинки [1]. В астрофізиці, в поєднанні з рівнянням Максвелла, рівняння Клейна–Гордона описує мінімально зв'язане заряджене поле бозона в сферично-симетричному просторі-часі [2]. Більш того, в поєднанні з самим рівнянням Шредінгера воно описує систему скалярних консервативних нуклонів, які пов'язані взаємодією Юкави з нейтральними скалярними мезонами [3] і т. д.

Серед аналітичних методів розв'язування задачі Коші (1), (2) можна виділити, зокрема, розширений \tanh -метод [4], метод гомотопій [5] та ін. Серед чисельних методів розв'язування поставленої задачі можна виділити, наприклад, групу скінченнорізницевих методів [6] та Рунге–Кутта Фур'є псевдоспектральні схеми [7]. Запропонований у даній роботі функціонально-дискретний метод (FD-метод), який походить з функціонально-дискретного методу розв'язування задачі Штурма–Ліувілля [8], являє собою симбіоз скінченнорізницевого методу та методу гомотопій, завдяки чому йому притаманні основні властивості як аналітичних, так і дискретних методів одночасно.

На відміну від роботи [9], в якій було розглянуто задачу Гурса для рівняння (1), дана робота присвячена побудові та обґрунтуванню FD-методу розв'язування задачі Коші (1), (2). Перш ніж перейти до опису алгоритму, сформулюємо відомий результат про локальне існування розв'язку задачі (1), (2).

Позначимо через $C_b^k(\mathbb{R}^m)$ підмножину простору $C^k(\mathbb{R}^m)$ неперервно диференційованих на \mathbb{R}^m до k -го порядку включно функцій, які задовольняють нерівність

$$\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\partial^\alpha f(x)| < \infty,$$

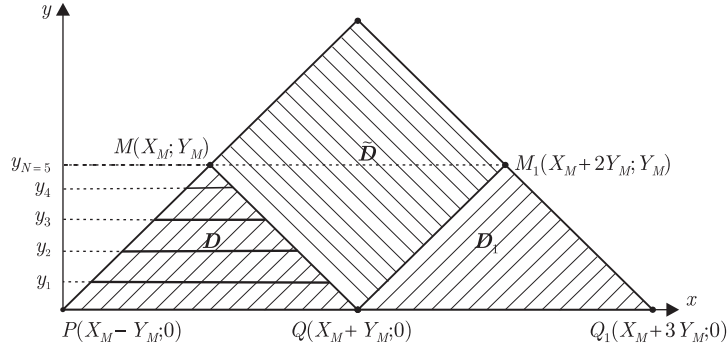


Рис. 1

де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ — мультиіндекс, а $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ — частинна похідна порядку $|\alpha|$. Можна показати, що лінійний простір $C_b^k(\mathbb{R}^m)$, оснащений нормою $\|\cdot\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)}$, є банаховим простором.

Має місце нижченаведена теорема, що є певним доповненням результатів з [10], де розглядається випадок $f(x, y) \equiv 0$.

Теорема 1 (про локальне існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного хвильового рівняння). *Нехай $N(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\phi(x) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $f(x, y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$. Тоді двічі неперервно диференційований розв'язок $u(x, y)$ задачі Коші (1), (2) існує принаймні на множині $D_\varepsilon = \{\mathbb{R} \times (0; \varepsilon)\}$, де*

$$\varepsilon = \min \left\{ 1; \sqrt{2} \left(\max_{|u| \leq M_1} |N(u)| \right)^{-1/2}; \sqrt{2q_1} \left(\max_{|u| \leq M_1} |N'(u)| \right)^{-1/2} \right\},$$

$M_1 = \|u_1(x, y)\|_{C(\mathbb{R} \times [0, 1])} + 1$, $0 < q_1 < 1$, $u_1(x, y)$ — розв'язок задачі Коші (1), (2) при $N(u) \equiv 0$, і на цій множині він єдиний.

2. Опис алгоритму FD-методу. Нехай умови теореми 1 є виконаними і до того ж $N(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Далі будемо розглядати задачу Коші (1), (2) в деякій області $D \subseteq \Omega$, $D = \{(x, y) \mid 0 < y \leq Y_M, X_M - (Y_M - y) < x < X_M + (Y_M - y), -\infty < X_M < +\infty, Y_M > 0, Y_M < \varepsilon\}$, де стала ε визначається теоремою 1 (рис. 1).

Згідно із загальною схемою FD-методу, викладеною в [11], ми наближаємо точний розв'язок $u(x, y)$ задачі (1), (2) функцією $\overset{m}{u}(x, y)$, яку можна подати у вигляді суми $\overset{m}{u}(x, y) = \sum_{k=0}^m \overset{(k)}{u}(x, y)$, $m \in \mathbb{N}$. Для визначення функцій $\overset{(k)}{u}(x, y)$ введемо розбиття області D (див. рис. 1):

$$y_j = y_0 + jh, \quad y_0 = 0, \quad h = \frac{Y_M}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

та розглянемо таке узагальнення задачі Коші (1), (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, \tau)}{\partial x^2} - N(u_\perp(x, y, \tau)) - \tau[N(u(x, y, \tau)) - N(u_\perp(x, y, \tau))] = \\ = f(x, y), \quad (x, y, \tau) \in D_\tau, \\ u(x, 0, \tau) = \phi(x), \quad u'_y(x, y, \tau)|_{y=0} = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], \quad \forall \tau \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4)$$

$$(u(x, y_j + 0, \tau) - u(x, y_j - 0, \tau)) \stackrel{\text{def}}{=} [u(x, y, \tau)]_{y=y_j} = 0, \quad (5)$$

$$[u'_y(x, y, \tau)]_{y=y_j} = 0, \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j); X_M + (Y_M - y_j)], \quad \forall j \in \overline{1, N-1},$$

де

$$u(x, y, \tau) \in C^2(D_\tau), \quad D_\tau = \{(x, y, \tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (0, Y_M] \times [0, 1]\},$$

$$u_\perp(x, y, \tau) \equiv u(x, y_j, \tau),$$

$$\forall (x, y, \tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (y_j, y_{j+1}] \times [0, 1], \quad \forall j \in \overline{0, N-1}.$$

Нехай мають місце такі припущення:

- а) розв'язок $u(x, y, \tau)$ задачі (4), (5) існує для будь-якого $\tau \in [0, 1]$;
 б) розв'язок $u(x, y, \tau)$ може бути знайдений у вигляді ряду

$$u(x, y, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} u^{(i)}(x, y) \tau^i, \quad (6)$$

що задовольняє рівності

$$\frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial u^{(i)}(x, y)}{\partial x} \tau^i, \quad \frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial y} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial u^{(i)}(x, y)}{\partial y} \tau^i, \quad \forall (x, y, \tau) \in D_\tau,$$

де $u^{(i)}(x, y)$ — незалежні від τ функції. Враховуючи припущення а, б, ми приходимо до висновку, що $u(x, y) = u(x, y, 1) \stackrel{\text{def}}{=} u^{(\infty)}(x, y)$, тобто розв'язок $u(x, y)$ задачі Коші (1), (2) може бути з довільною точністю знайдений за допомогою функції $u^{(m)}(x, y)$. Підставляючи ряд (6) в задачу (4), (5) та прирівнюючи функціональні коефіцієнти при однакових степенях τ , одержуємо задачу Коші відносно невідомої функції $u^{(0)}(x, y)$, яку називатимемо *базовою задачею*:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(0)}(x, y)}{\partial x^2} = f(x, y) + \mathbb{N}(u^{(0)}(x, y_{j-1})), \quad (7)$$

$$(x, y) \in D_j = [X_M - (Y_M - y); X_M + (Y_M - y)] \times (y_{j-1}, y_j], \quad j = \overline{1, N},$$

$$(u^{(0)}(x, y_j + 0) - u^{(0)}(x, y_j - 0)) \stackrel{\text{def}}{=} [u^{(0)}(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad (8)$$

$$[u'^{(0)}_y(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j \in \overline{1, N-1},$$

$$u^{(0)}(x, 0) = \phi(x), \quad u'^{(0)}_y(x, 0) = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M],$$

і рекурентну послідовність задач Коші відносно функцій $u^{(k)}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u^{(k)}(x, y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}'(u^{(0)}_\perp(x, y)) u^{(k)}_\perp(x, y) - F_k(x, y), \quad \forall (x, y) \in D, \quad (9)$$

$$[u^{(k)}(x, y)]_{y=y_j} = 0, \quad \left[\frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j} = 0, \\ \forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

$$u^{(k)}(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u^{(k)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], \quad k = 1, 2, \dots,$$

де

$$u_{\perp}(x, y) = u(x, y), \quad \forall (x, y) \in D_{j+1}, \quad \forall j \in \overline{0, N-1}, \\ F_k(x, y) = A_k(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y); 0) + \\ + A_{k-1}(\mathbb{N}; u^{(0)}(x, y); u^{(1)}(x, y); \dots; u^{(k-1)}(x, y)) - \\ - A_{k-1}(\mathbb{N}; u_{\perp}^{(0)}(x, y); u_{\perp}^{(1)}(x, y); \dots; u_{\perp}^{(k-1)}(x, y)), \quad (x, y) \in D, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тут через $A_n(N; v_0, v_1, \dots, v_n)$ позначено поліноми Адомяна n -го порядку для функції $N(\cdot)$ [12].

Точний розв'язок $u^{(0)}(x, y)$ базової задачі (7), (8) та розв'язки $u^{(k)}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$, задач (9), (10) можуть бути знайдені рекурентно за допомогою формули Д'Аламбера [13]:

$$u^{(0)}(x, y) = \frac{1}{2}(u^{(0)}(x - (y - y_{j-1}), y_{j-1}) + u^{(0)}(x + (y - y_{j-1}), y_{j-1})) + \\ + \frac{1}{2} \int_{x-(y-y_{j-1})}^{x+(y-y_{j-1})} \left. \frac{\partial u^{(0)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=y_{j-1}} d\xi + \frac{1}{2} \int_{y_{j-1}}^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} [f(\xi, \eta) - \mathbb{N}(u^{(0)}(\xi, y_{j-1}))] d\xi d\eta, \\ \forall (x, y) \in D_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (11)$$

$$[u^{(0)}(x, y)]_{y=y_{j-1}} = 0, \quad \left[\frac{\partial u^{(0)}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_{j-1}} = 0,$$

$$\forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j = \overline{1, N-1},$$

$$u^{(0)}(x, 0) = \phi(x), \quad \left. \frac{\partial u^{(0)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M],$$

$$u^{(k)}(x, y) = \frac{1}{2}(u^{(k)}(x - (y - y_{j-1}), y_{j-1}) + u^{(k)}(x + (y - y_{j-1}), y_{j-1})) + \\ + \frac{1}{2} \int_{x-(y-y_{j-1})}^{x+(y-y_{j-1})} \left. \frac{\partial u^{(k)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=y_{j-1}} d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{y_{j-1}}^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} [F_k(\xi, \eta) - \mathbb{N}'(\overset{(0)}{u}(\xi, y_{j-1})) \overset{(k)}{u}(\xi, y_{j-1})] d\xi d\eta, \\
& \forall (x, y) \in D_j, \quad j = \overline{1, N},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\left[\overset{(k)}{u}(x, y) \right]_{y=y_{j-1}} = 0, \quad \left[\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_{j-1}} = 0,$$

$$\forall x \in [X_M - (Y_M - y_{j-1}); X_M + (Y_M - y_{j-1})], \quad \forall j = \overline{1, N-1},$$

$$\overset{(k)}{u}(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \overset{(k)}{u}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M].$$

Зауваження. Варто зазначити, що для знаходження розв'язку задачі Коші (1), (2) у смугі $\{(x, y) | -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq Y_M < \varepsilon\}$ можна почергово використовувати алгоритм FD-методу розв'язування задачі Коші (11), (12) та алгоритм розв'язування задачі Гурса, запропонований в [9, 14]. Справді, розв'язавши задачу Коші в трикутниках D та D_1 (див. рис. 1), ми одержимо початкові дані для задачі Гурса в квадраті \tilde{D} . Очевидно, що розв'язок такої задачі Гурса в області \tilde{D} збігається з розв'язком задачі Коші (1), (2).

3. Збіжність FD-методу. Мають місце такі теореми.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і $u(x, y)$ та $\overset{(0)}{u}(x, y)$ ¹ розв'язки задач (1), (2) та (7), (8) відповідно. Тоді для достатньо малого h має місце оцінка:*

$$\|u(x, y) - \overset{(0)}{u}(x, y)\|_{\infty, \tilde{D}} \leq h K_1 \left\| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\|_{\infty, \tilde{D}},$$

де $\|u(x, y) - \overset{(0)}{u}(x, y)\|_{\infty, \tilde{D}} = \max_{(x, y) \in \tilde{D}} |u(x, y) - \overset{(0)}{u}(x, y)|$, а стала K_1 не залежить від h .

Згідно з теоремою 2, розв'язок $\overset{(0)}{u}(x, y)$ базової задачі (7), (8) наближає розв'язок $u(x, y)$ вихідної задачі (1), (2) з порядком h , де h – крок розбиття (3). Крім того, оскільки розв'язок базової задачі при кожному фіксованому розбитті області D є єдиним, то з теореми 2, як наслідок, впливає той факт, що якщо задача (1), (2) має розв'язок $u(x, y) \in C^2(D)$, то такий розв'язок також є єдиним. З іншого боку, теорема 2 показує, що початкові дані $\phi(x)$, $\psi(x)$, задачі на відрізку $[X_M - Y_M, X_M + Y_M]$ єдиним чином визначають розв'язок $u(x, y)$ рівняння (1) у характеристичному трикутнику D (на відміну від лінійного випадку, коли цей факт майже очевидний, для нелінійного випадку він потребує окремого обґрунтування (див. [10])).

Теорема 3. *Нехай для задачі Коші (1), (2) виконуються умови $\mathbb{N}(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(x) \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $f(x, y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$. Тоді FD-метод (7)–(10) для задачі Коші (1), (2) збігається до точного розв'язку задачі в області D . Крім того, мають місце такі оцінки абсолютної похибки методу:*

$$\|u(x, y) - \overset{(m)}{u}(x, y)\|_{1, \infty, D} \leq \frac{cR}{(m+1)^{1+\delta}(R-h)} \left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{13}$$

¹Не виключається існування глобального розв'язку.

Таблиця 1. Похибка FD-методу як функція від рангу m і кроків (h, h_s)

m	$\delta(1/10, 1/20, m)$	$\delta(1/20, 1/20, m)$	$\delta(1/40, 1/20, m)$
0	0,00977558871568318	0,00524094907229677	0,00271614818564414
1	0,000153731145723108	$4,67783385436921e-05$	$1,29434987624073e-05$
2	$2,51719986418198e-06$	$4,47542104721692e-07$	$6,72226472219799e-08$
3	$4,15126456317904e-08$	$4,37374882164099e-09$	$3,60268871604451e-10$
4	$1,45110161915889e-09$	$5,04676046259846e-11$	$1,83640086071974e-12$

де $\|f(x, y)\|_{1, \infty, \bar{D}} = \max \left\{ \|f(x, y)\|_{\infty, \bar{D}}, \left\| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\|_{\infty, \bar{D}}, \left\| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\|_{\infty, \bar{D}} \right\}$, h – крок сітки FD-методу, $h < R$, а додатні дійсні сталі c, R, δ залежать лише від вхідних даних задачі.²

Теорема 3 показує, що крок розбиття h завжди може бути вибраний таким чином, щоб FD-метод розв'язування задачі Коші (1), (2) в області D збігався з суперекспоненціальною швидкістю, тобто швидше, ніж ряд, утворений членами геометричної прогресії зі знаменником $q = h/R < 1$.

4. Приклад. Розглянемо таку задачу Коші:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + u^2(x, y) = \frac{2y - 6x^2y - y^3}{(1 + x^2)^3}, \quad (x, y) \in D, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_y(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad (15)$$

де $D = \{(x, y) \mid 0 < y \leq \sqrt{2/3}, y - \sqrt{2/3} \leq x \leq \sqrt{2/3} - y\}$. Очевидно, що точним розв'язком даної задачі є функція $u^*(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}$.

Застосовуючи до задачі (14), (15) описаний вище алгоритм FD-методу, апроксимува- тимемо точний розв'язок цієї задачі частинною сумою ряду (6), члени якого шукатимемо згідно з (11), (12) з використанням чисельних схем інтегрування. Для оцінки похибки ме- тоду використовуватимемо функцію $\delta(h, h_s, m) = \|u^{(m)}(x, y, h, h_s) - u^*(x, y)\|_{\bar{D}}$, де h – крок сітки FD-методу, h_s – крок квадратурної формули³, m – ранг FD-методу.

В табл. 1 наведено результати застосування FD-методу до задачі Коші (14), (15) з кроком дискретизації квадратурної формули $h_s = 1/20$ та кроками дискретизації FD-методу $h = 1/(10 \cdot 2^n)$, $n = 0, 1, 2$, які підтверджують теоретичні результати про експоненціальну швидкість збіжності FD-методу.

Таким чином, у даній роботі описано алгоритм FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна–Гордона (1). Сформульовано теорему, в якій наведено достатні умови, що забезпечують суперекспоненціальну швидкість збіжності методу і вказану в ній оцінку похибки. Крім того, сформульовано теорему про апроксимаційні властивості задачі (7), (8), розв'язок якої може бути знайдений за допомогою формули Д'Аламбера. Разом з тим варто відзначити, що застосування FD-методу у виключно аналітичному вигляді є досить пробле- матичним навіть для простих функцій $N(u), f(x, y), \phi(x), \psi(x)$. Це пов'язано, насамперед, зі складністю аналітичного обчислення інтегралів, що фігурують у формулах (11), (12). Отже, проблема розробки алгоритму FD-методу з використанням чисельних схем інтегру- вання є досить актуальною і буде розглянута в наступних публікаціях.

²Детальніше про походження сталої R див. [9].

³В даному прикладі для наближеного обчислення інтегралів використовувалась формула Сімпсона.

1. *Li Y.* Numerical studies of the Klein–Gordon–Schrödinger equations: A thesis submitted for the degree of master of science. – Singapore: Nat. Univ. Singapore, 2006. – xii + 87 p. – <http://www.math.nus.edu.sg/~bao/thesis/Yang-li.pdf>.
2. *Dariescu C., Dariescu M. A.* Transition and regeneration rates in charged boson stars via perturbative calculations // *Int. J. Modern Phys. A.* – 2005. – **20**. – P. 2326–2330.
3. *Fukuda I., Tsutsumi M.* On coupled Klein–Gordon–Schrödinger equations II // *J. Math. Anal. Appl.* – 1978. – **66**. – P. 358–378.
4. *Malfiet W.* The tanh method: a tool for solving certain classes of non-linear PDEs // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2005. – **28**, No 17. – P. 2031. – 2035.
5. *Alomari A. K., Noorani M. S., Nazar R. M.* Approximate analytical solutions of the Klein–Gordon equation by means of the homotopy analysis method // *J. Qual. Measur. and Anal.* – 2008. – **4**. – P. 45–57.
6. *Berikdashvili G., Jokhadze O., Kharibegashvili S., Midodashvili B.* Finite difference solution of a nonlinear Klein–Gordon equation with an external source // *Math. Comput.* – 2011. – **80**, No 274. – P. 847–862.
7. *Kong L., Zhang J., Cao Y. et al.* Semi-explicit symplectic partitioned Runge–Kutta Fourier pseudo-spectral scheme for Klein–Gordon–Schrödinger equations // *Comput. Phys. Commun.* – 2010. – **181**. – P. 1369–1377.
8. *Макаров В. Л.* Функционально-дискретный метод решения задачи Штурма–Лиувилля произвольного порядка точности // *Докл. АН СССР.* – 1991. – **320**, № 1. – С. 391–396.
9. *Makarov V. L., Dragunov D. V., Sember D. A.* FD-method for solving the nonlinear Klein–Gordon equation // *Укр. мат. журн.* – 2012. – **64**, No 10. – P. 1394–1415.
10. *Strauss W. A.* Nonlinear wave equation. CBMS Regional Conference Series in Math. Vol. 73. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1989. – 91 p.
11. *Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L., Sytnyk D.* A method with a controllable exponential convergence rate for nonlinear differential operator equations // *Comput. Methods Appl. Math.* – 2009. – **9**, No 1. – P. 63–78.
12. *Seng V., Abbaoui K., Cherruault Y.* Adomian’s polynomials for nonlinear operators // *Math. Comput. Modelling.* – 1996. – **24**, No 1. – P. 59–65.
13. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – Москва: Мир, 1964. – 830 с.
14. *Макаров В. Л., Драгунов Д. В., Сембер Д. А.* Алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв’язування нелінійного рівняння Клейна–Гордона // *Нелін. коливання.* – 2013. – **16**, № 1. – С. 75–89.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 27.03.2014

Академик НАН України **В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер**

Функционально-дискретный метод (FD-метод) решения задачи Коши для нелинейного уравнения Клейна–Гордона

Предложен функционально-дискретный метод решения задачи Коши для нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Найдены достаточные условия, обеспечивающие суперэкспоненциальную скорость сходимости метода. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы на численном примере.

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov, D. V. Dragunov, D. A. Sember**

A functional discrete method (FD-method) for solving the Cauchy problem for a nonlinear Klein–Gordon equation

We propose a functional-discrete method for solving the Cauchy problem for a nonlinear Klein–Gordon equation. Sufficient conditions for the superexponential convergence of this method are obtained. The obtained theoretical results are illustrated by a numerical example.