УДК 512.544

М. Р. Діксон, Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка

Про деякі аналоги теорем Шура та Бера

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Отримано нові узагальнення теорем Шура та Бера. Зокрема, доведено автоморфні аналоги теорем Шура та Бера у випадку, коли група внутрішніх автоморфізмів має скінченний індекс у довільній підгрупі групи автоморфізмів.

Зв'язки, що існують між властивостями фактор-групи групи G за її центром $\zeta(G)$ та властивостями комутанта $[G, G]$, у багатьох випадках є досить близькими. Першим вивчати ці зв'язки почав І. Шур. Зокрема, з його результатів випливає, що скінченність центральної фактор-групи $G/\zeta(G)$ групи G тягне за собою скінченність комутанта $[G, G]$ групи G [1]. Точніше, якщо π — це множина простих чисел, а $G/\zeta(G)$ є скінченною π-групою, то $[G, G]$ також є скінченною π-групою (див., наприклад, [2]).

З іншого боку, відомий такий факт: якщо G збігається з членом $\zeta_k(G)$ верхнього центрального ряду, що має номер k, то член $\gamma_{k+1}(G)$ нижнього центрального ряду, що має номер $k+1$, є одиничним. Базуючись на теоремі Шура, Р. Бер [3] отримав узагальнення цього твердження. Він довів, що скінченність фактор-групи $G/\zeta_k(G)$ тягне за собою скінченність $\gamma_{k+1}(G)$. І навпаки, Ф. Холл розглянув дуальну ситуацію. Він довів [4], що скінченність підгрупи $\gamma_{k+1}(G)$ тягне за собою скінченність фактор-групи $G/\zeta_{2k}(G)$. Після цього з'явилося багато узагальнень теореми Шура. Серед них було і нижченаведене.

Нехай G — група, A — підгрупа її групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$. Як звичайно, покладемо

$$C_G(A) = \{g \in G \mid \alpha(g) = g \text{ для кожного } \alpha \in A\}, \quad [G, A] = \langle g^{-1}\alpha(g) \mid g \in G, \alpha \in A\rangle.$$

П. Хегарті [5] показав, що зі скінченності фактор-групи $G/C_G(\mathrm{Aut}(G))$ випливає скінченність $[G, \mathrm{Aut}(G)]$. Слід зазначити, що умова скінченності фактор-групи $G/C_G(\mathrm{Aut}(G))$ є дуже сильною. Зокрема, з цієї умови випливає, що вся група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$ є скінченною. Нескінченні групи, які мають скінченну групу автоморфізмів, досліджувались багатьма авторами. Зокрема, в серії статей [6–11] вивчались вільні від скруту групи, що мають скінченну групу автоморфізмів.

У зв'язку з цим цілком природно розглянути ситуацію, коли A буде деякою власною підгрупою групи $\mathrm{Aut}(G)$. У загальному випадку $C_G(A)$ не завжди буде нормальною підгрупою групи G. Але якщо група внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Inn}(G)$ міститься в A, то $C_G(A) \leqslant C_G(\mathrm{Inn}(G)) = \zeta(G)$, зокрема, $C_G(A)$ буде нормальною підгрупою в G. Очевидно, що $C_G(A)$ є A-інваріантною підгрупою. З іншого боку, підгрупа $[G, A]$ буде нормальною для будь-якої підгрупи $A \leqslant \mathrm{Aut}(G)$. Дійсно, нехай $g, x \in G$, $\alpha \in A$, тоді

$$x^{-1}[g,\alpha]x = x^{-1}g^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(gxx^{-1})x = (gx)^{-1}\alpha(gx)\alpha(x^{-1})x =$$
$$= [gx,\alpha](\alpha(x))^{-1}x = [gx,\alpha](x^{-1}\alpha(x))^{-1} = [gx,\alpha][x,\alpha]^{-1} \in [G, A].$$

© М. Р. Діксон, Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка, 2014

Тому цілком природно спочатку розглянути ситуацію, коли $\mathrm{Inn}(G) \leqslant A$. У даній роботі ми розглянемо аналоги теорем Шура, Бера та Холла. Першим результатом є

Теорема 1. *Нехай G — група, A — підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$. Припустимо, що A містить у собі $\mathrm{Inn}(G)$, і нехай індекс $|A\colon \mathrm{Inn}(G)| = k$ скінченний. Якщо фактор-група $G/C_G(A)$ скінченна, то підгрупа $[G, A]$ також скінченна. Більш того, якщо $|G/C_G(A)| = t$, то $|[G, A]| \leqslant kt^d$, де $d = (1/2)(\log_p t + 1)$, p — це найменший простий дільник числа t.*

Наслідок [5]. *Нехай G — група. Припустимо, що фактор-група $G/C_G(\mathrm{Aut}(G))$ скінченна. Тоді підгрупа $[G, \mathrm{Aut}(G)]$ також є скінченною.*

Починаючи з підгруп $C_G(A)$ та $[G, A]$, ми можемо побудувати верхній та нижній A-центральні ряди. Покладемо $\zeta_1(G, A) = C_G(A)$, $\zeta_2(G, A)/\zeta_1(G, A) = \zeta_1(G/\zeta_1(G, A))$, і взагалі, якщо для порядкового числа ν ми вже визначили $\zeta_\nu(G, A)$, то покладемо $\zeta_{\nu+1}(G, A)/\zeta_\nu(G, A) = \zeta_1(G/\zeta_\nu(G, A))$, а якщо ν — граничне порядкове число, то $\zeta_\nu(G, A) = \bigcup_{\mu<\nu} \zeta_\mu(G, A)$. Останній член $\zeta_\gamma(G, A) = \zeta_\infty(G, A)$ цього ряду називається *верхнім A-гіперцентром G*, а порядкове число γ — *A-центральною довжиною групи G*, яке позначатимемо через $\mathrm{zl}(G, A)$. Якщо A містить у собі групу внутрішніх автоморфізмів, то всі члени верхнього A-центрального ряду є нормальними підгрупами групи G.

Нижній A-центральний ряд групи G — це спадний ряд

$$G = \gamma_1(G, A) \geqslant \gamma_2(G, A) \geqslant \cdots \geqslant \gamma_\nu(G, A) \geqslant \gamma_{\nu+1}(G, A) \geqslant \cdots,$$

члени якого визначаються за правилом: $\gamma_2(G, A) = [G, A]$, $\gamma_{\nu+1}(G, A) = [\gamma_\nu(G, A), A]$ для всіх порядкових чисел ν та $\gamma_\lambda(G, A) = \bigcap_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(G, A)$ для граничних порядкових чисел λ. Останній член $\gamma_\delta(G, A) = \gamma_\infty(G, A)$ цього ряду називається *нижнім A-гіпоцентром групи G*.

Якщо $A = \mathrm{Inn}(G)$, то отримуємо звичайні поняття верхнього та нижнього центральних рядів групи G.

Наступним основним результатом є

Теорема 2. *Нехай G — група, A — підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$. Припустимо, що A містить у собі $\mathrm{Inn}(G)$, і нехай індекс $|A\colon \mathrm{Inn}(G)| = k$ скінченний. Припустимо також, що $\mathrm{zl}(G, A) = m$ та $G/\zeta_\infty(G, A)$ скінченні. Тоді скінченною є і підгрупа $\gamma_{m+1}(G, A)$. Більш того, існує така функція β, що $|\gamma_{m+1}(G, A)| \leqslant \beta(k, m, t)$, де $t = |G/\zeta_\infty(G, A)|$.*

Функція $\beta(k, m, t)$, що фігурує в останній теоремі, визначається рекурсивно: $\beta(k, 1, t) = kt^{d(1)}$, де $d(1) = (1/2)(\log_2 t + 1)$, та $\beta(k, m+1, t) = k(\beta(k, m, t))^{d(m+1)}$, де $d(m+1) = (1/2)(\log_2(\beta(k, m, t)) + 1)$.

За теоремою 2 скінченність фактор-групи $G/\zeta_m(G, A)$ тягне за собою скінченність підгрупи $\gamma_{m+1}(G, A)$. Але тоді скінченним буде і нижній A-гіпоцентр групи G. Для його порядку також отримано верхню границю. Як це не парадоксально, але вона виявилася більш простішою, ніж верхня границя для порядку $\gamma_{m+1}(G, A)$, яка була отримана в теоремі 2. Для порядку $\gamma_\infty(G, A)$ була отримана така границя: $|\gamma_\infty(G, A)| \leqslant kt^r$, де $r = (1/2)(\log_2 t + 3)$.

Наступним і останнім нашим основним результатом є автоморфний варіант теореми Холла.

Теорема 3. *Нехай G — група, A — підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$. Припустимо, що A містить у собі $\mathrm{Inn}(G)$, і нехай індекс $|A\colon \mathrm{Inn}(G)| = k$ скінченний. Якщо підгрупа $\gamma_{m+1}(G, A)$ скінченна для деякого натурального номера m, то фактор-група $G/\zeta_{2m}(G, A)$ також є скінченною. Більш того, існує така функція η, що $|G/\zeta_{2m}(G, A)| \leqslant \eta(k, m, t)$, де $t = |\gamma_{m+1}(G, A)|$.*

1. *Schur I.* Uber die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen // J. Reine Angew. Math. – 1904. – **127**. – P. 20–50.
2. *Wiegold J.* The Schur multiplier: an elementary approach // London Math. Soc. Lect. Notes Ser. – 1982. – **71**. – P. 137–154.
3. *Baer R.* Endlichkeitskriterien fur Kommutatorgruppen // Math. Ann. – 1952. – **124**. – P. 161–177.
4. *Hall Ph.* Finite-by-nilpotent groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1956. – **52**. – P. 611–616.
5. *Hegarty P.* The absolute centre of a group // Proc. J. Algebra. – 1994. – **169**. – P. 929–935.
6. *Hallett J. T., Hirsch K. A.* Torsion-free groups having finite automorphism groups. I // J. Algebra. – 1965. – **2**. – P. 287–298.
7. *Hallett J. T., Hirsch K. A., Zassenhaus H.* Finite automorphism groups of torsion-free groups // J. London Math. Soc. – 1966. – **41**. – P. 545–549.
8. *Hallett J. T., Hirsch K. A.* Die Konstruktion von Gruppen mit vorgeschriebenen Automorphismengruppen // J. Reine Angew. Math. – 1970. – **239/240**. – P. 32–46.
9. *Hallett J. T., Hirsch K. A.* Groups of exponent 4 as automorphism groups // Math. Z. – 1970. – **117**. – P. 183–188.
10. *Hallett J. T., Hirsch K. A.* Finite groups of exponent 4 as automorphism groups. II // Ibid. – 1973. – **131**. – P. 1–10.
11. *Hallett J. T., Hirsch K. A.* Finite groups of exponent 12 as automorphism groups // Ibid. – 1977. – **155**. – P. 43–53.

Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 01.11.2013

М. Р. Диксон, Л. А. Курдаченко, А. А. Пыпка

О некоторых аналогах теорем Шура и Бэра

Получены новые обобщения теорем Шура и Бэра. В частности, доказаны автоморфные аналоги теорем Шура и Бэра в случае, когда группа внутренних автоморфизмов имеет конечный индекс в произвольной подгруппе группы автоморфизмов.

M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka

On some analogues of theorems of Schur and Baer

We obtained new generalizations of theorems of Schur and Baer. In particular, we proved automorphic analogues of these theorems in the case, when a group of inner automorphisms has finite index in an arbitrary subgroup of the group of automorphisms.