

## МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ВЫБОРА ОБЛИКА, ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

В статье представлены результаты исследований, проводимых в рамках бюджетных научно-исследовательских работ в Институте технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины. Сформулирована комплексная задача и разработано методическое обеспечение для выбора облика, оптимизации проектных параметров и программ управления управляемых ракетных объектов (УРО) различного назначения на начальном этапе проектирования. Задача сформулирована как задача теории оптимального управления, приведены элементы математической модели УРО, позволившие свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования. Сделана декомпозиция комплексной задачи на две частные задачи и предложен метод решения, основанный на взаимосвязанном решении двух частных задач. Представлены иллюстративные примеры использования разработанного методического обеспечения для решения различных задач начального этапа проектирования УРО.

У статті представлені результати досліджень, що проводяться в рамках бюджетних науково-дослідних робіт в Інституті технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України. Сформульовано комплексне завдання і розроблено методичне забезпечення для вибору вигляду, оптимізації проектних параметрів і програм управління керованих ракетних об'єктів (КРО) різного призначення на початковому етапі проектування. Завдання сформульовано як завдання теорії оптимального управління, наведені елементи математичної моделі КРО, що дозволили звести задачу теорії оптимального управління до задачі нелінійного математичного програмування. Зроблена декомпозиція комплексної задачі на дві приватні задачі і запропоновано метод рішення, заснований на взаємопов'язаному вирішенні двох окремих завдань. Представлено ілюстративні приклади використання розробленого методичного забезпечення для вирішення різних завдань початкового етапу проектування КРО.

The paper deals with the results of the research conducted by the Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine in the frame of the budget R&D. A complex problem is formulated and methodic support for selecting an aspect, optimization of project parameters and control programs for different controlled rocket plants (CCP) at an initial stage of the design is developed. The above problem is formulated as a problem of the theory of an optimal control, and elements of the CCP mathematical model resulting in the problem of nonlinear mathematical programming are given. A complex problem is decomposed into two special problems, and a method of solution from an interrelated solution of two special problems is proposed. Illustrative examples of applications of the above methodic support for solution of different problems of an initial stage of the CCP design are presented.

**Введение** Проектирование и создание управляемых ракетных объектов (УРО) различного назначения связано с большими затратами людских, материальных, финансовых и технических ресурсов. Необходимость учета этих факторов на начальном этапе проектирования, когда предъявляются повышенные требования к формализации проектных задач, методам их решения, адекватности используемых математических моделей, существенно осложняет процесс принятия рациональных проектных решений. При этом следует отметить, что неверные (нерациональные) решения, принятые на начальном этапе проектирования, приводят к снижению эффективности выполнения поставленных перед УРО целевых задач, росту затрат и увеличению сроков его создания [см. напр. 1 – 6 и др.].

Под управляемыми ракетными объектами далее понимаются одно- и многоступенчатые управляемые ракеты различного назначения, предназначенные для доставки полезного груза в заданную точку пространства с требуемыми значениями кинематических параметров движения в конце активного участка траектории (АУТ). В качестве маршевых силовых установок на УРО могут быть использованы как жидкостные ракетные двигатели (ЖРД), так и ракетные двигатели, работающие на твердом топливе (РДТТ).

© А.П. Алпатов, В.С. Сенькин, 2013

Для успешного решения проектных задач особое значение приобретает разработка методического, алгоритмического и программного обеспечения, которое позволяет на начальном этапе проектирования с необходимой для проектных исследований точностью определять облик УРО, его конструктивно-компоновочную схему (ККС), оптимальные (рациональные) значения проектных параметров и основных характеристик УРО, оптимальные программы управления движением, количественную оценку показателей эффективности с учетом особенностей целевого применения УРО.

Оптимальным (рациональным) проектом УРО среди множества возможных альтернативных вариантов следует считать проект, который обеспечивает наивысшее значение одного из наиболее важных показателей эффективности, при этом остальные показатели последней должны либо достигать заданных значений, либо находиться в требуемом диапазоне.

**Постановка задачи.** Формализация комплексной задачи выбора облика, совместной оптимизации проектных параметров и программ управления движением УРО на начальном этапе проектирования (далее комплексная задача) существенно зависит от объема имеющейся в наличии информации. Ее систематизация и рациональное использование является основой для разработки методического обеспечения; адекватной математической модели; методов, алгоритмов и пакетов прикладных программ, используемых при решении задач начального этапа проектирования. Информационная структура данных, характеризующих управляемый ракетный объект, приведена в [2, 6, 7].

Рассматриваемая комплексная задача относится к классу задач теории оптимального управления с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей [8 – 11 и др.]. Значения оптимизируемых параметров, определяющих облик УРО и его основные характеристики, могут изменяться как дискретно, так и непрерывно, что делает целесообразным при разработке метода решения разделение этих параметров на две группы [7, 12]:

- структурные параметры (вектор  $\bar{c}$ ), изменяющиеся дискретно и характеризующие облик и конструктивно-компоновочную схему УРО;

- основные проектные параметры (вектор  $\bar{p}$ ), изменяющиеся непрерывно и определяющие габаритно-массовые характеристики УРО в целом, отдельных элементов и подсистем, баллистические характеристики, а также энергетические характеристики и возможности УРО при выполнении различных целевых задач.

Компонентами вектора структурных параметров  $\bar{c}$  являются параметры, которые определяют облик УРО и его ККС, типы используемых ракетных топлив, конструкционных теплозащитных и других материалов, а также множество элементов и подсистем, из которых может быть сформирован облик УРО.

Для УРО с маршевыми ЖРД компонентами вектора основных проектных параметров  $\bar{p}$  [7, 13 – 15] являются: коэффициенты начальных тяговооруженностей ступеней  $v_{pi}, i = \overline{1, n_c}$ , где  $n_c$  – количество ступеней УРО; относительные конечные массы ступеней УРО  $\mu_{ki}, i = \overline{1, (n_c - 1)}$ ; давления в камерах сгорания маршевых  $P_{ki}^{MD}, i = \overline{1, n_c}$  и рулевых  $P_{ki}^{PD}, i = \overline{1, n_c}$  двигате-

лей; диаметры срезов сопел маршевых  $D_{Ai}^{MD}, i = \overline{1, n_c}$  и рулевых  $D_{Ai}^{PD}, i = \overline{1, n_c}$  двигателей.

Для УРО с маршевыми РДТТ к компонентам вектора основных проектных параметров  $\bar{p}$ , перечисленным выше, добавляются степени «утопленности» сопловых блоков в камеры сгорания  $\eta_i, i = \overline{1, n_c}$  и геометрические параметры, определяющие начальные конфигурации зарядов маршевых РДТТ (компоненты вектора  $\bar{a}$ ) [12].

Один из проектных параметров УРО – относительная конечная масса последней ступени  $\mu_{kn_c}$  – определяется из условия обеспечения заданных значений кинематических параметров движения в конце АУТ [7, 12 – 15].

Коэффициенты начальных тяговооруженностей ступеней УРО  $v_{pi}$ , относительные конечные массы ступеней УРО  $\mu_{ki}$  и степени утопленности сопловых блоков в камеры сгорания маршевых РДТТ  $\eta_i$  определяются известными соотношениями [2, 7, 12 – 15]:

$$v_{pi} = \frac{m_{0i} \cdot g_0}{P_{\Sigma i}}; \quad \mu_{ki} = \frac{m_{ki}}{m_{0i}}; \quad \eta_i = \frac{l_{ymi}}{l_{ci}},$$

где  $m_{0i}, m_{ki}$  – соответственно стартовая и конечная массы  $i$ -й ступени УРО;  $g_0$  – ускорение свободного падения у поверхности Земли;  $P_{\Sigma i}$  – суммарное значение тяг в пустоте маршевого и рулевых двигателей после выхода маршевого двигателя на основной режим работы;  $l_{ymi}$  – длина сверхзвуковой части сопла «утопленной» в камеру сгорания, и  $l_{ci}$  – полная длина сверхзвуковой части сопла.

Оптимизируемые программы управления движением УРО (компоненты вектора управления  $\bar{u}$ ) в комплексной задаче представляют собой программы изменения во времени угла тангажа (угла наклона продольной оси УРО к плоскости местного горизонта) и тяговых характеристик маршевых двигателей.

Комплексная задача формулируется далее независимо от того, какие маршевые двигатели используются на УРО. При решении задачи применительно к конкретному варианту УРО используются векторы основных проектных параметров  $\bar{p}$ , характерные для УРО либо с ЖРД, либо с РДТТ. То же самое следует сказать о математических моделях, алгоритмах и программах, которые используются для вычисления целевого функционала, показателей эффективности и основных характеристик рассматриваемого варианта УРО.

При определении баллистических характеристик и энергетических возможностей УРО управляемый ракетный объект рассматривается как материальная точка переменной массы. Траектория и параметры движения УРО определяются в центральном гравитационном поле Земли с учетом ее вращения и кривизны поверхности [7, 16, 17].

Комплексная задача формулируется следующим образом: необходимо обеспечить максимальное значение целевого функционала  $I = I(\bar{c}, \bar{p}, \bar{u}, \bar{x})$  за

счет выбора векторов оптимизируемых параметров  $\bar{c}, \bar{p}$  и программ управления  $\bar{u} = \bar{u}(t)$ :

$$I(\bar{c}, \bar{p}, \bar{u}, \bar{x}) = \max_{\bar{c} \in \tilde{C}^m, \bar{p} \in \tilde{P}^s, \bar{u} \in \tilde{U}^r} m_{i\bar{a}}(\bar{c}, \bar{p}, \bar{u}, \bar{x})$$

при ограничениях:

– на оптимизируемые параметры и области изменения исходных данных (ИД)

$$\tilde{C}^m \subset C^m, \tilde{P}^s \subset P^s, \bar{x} \in \tilde{X}^k, \tilde{X}^k \subset X^k;$$

– на параметры траектории

$$H_v = H_{np}^v, Q_{\max} \leq Q_{np}^{\max}, Q_{\text{разд}} \leq Q_{np}^{\text{разд}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \bar{f}(\bar{c}, \bar{p}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{x}), \bar{y} \in \tilde{Y}^n, \tilde{Y}^n \subset Y^n;$$

– на программы управления движением УРО

$$\bar{u} = \bar{u}(t, \bar{c}, \bar{p}, \bar{y}, \bar{x}); \bar{u} \in \tilde{U}^r, \tilde{U}^r \subset U^r;$$

– на значения фазовых координат в конце АУТ

$$\bar{y}_{\text{АУТ}} = \bar{y}_{\text{АУТ}}^{np}.$$

Здесь  $m_{i\bar{a}}$  – масса полезного груза;  $\bar{c}$  – вектор, компоненты которого характеризуют облик УРО и его ККС;  $\bar{p}$  – вектор основных проектных параметров УРО;  $\bar{x}$  – вектор ИД,  $\tilde{C}^m, \tilde{P}^s, \tilde{X}^k$  – замкнутые области в дискретном и действительных векторных пространствах  $C^m, P^s, X^k$ , в которых могут принимать, соответственно, значения векторы  $\bar{c}, \bar{p}$  и  $\bar{x}$ ;  $H_{np}^v, H_v$  – требуемая и расчетная высоты окончания вертикального участка движения;  $Q_{np}^{\max}, Q_{\max}$  – допустимое и расчетное значения максимальных скоростных напоров при движении УРО на АУТ;  $Q_{np}^{\text{разд}}, Q_{\text{разд}}$  – допустимое и расчетное значения скоростных напоров при разделении 1-й и 2-й ступеней для многоступенчатых УРО;  $\bar{y} = (y_j)$  – вектор фазовых координат, определяющий положение УРО в пространстве, являющийся элементом действительного векторного пространства  $Y^n$ ;  $\bar{u} = (u_j)$  – вектор управления, являющийся элементом действительного векторного пространства  $U^r$ ;  $\tilde{Y}^n, \tilde{U}^r$  – замкнутые области в действительных векторных пространствах  $Y^n, U^r$ , в которых могут принимать значения векторы  $\bar{y}, \bar{u}$ , соответственно;  $\bar{y}_{\text{АУТ}}$  и  $\bar{y}_{\text{АУТ}}^{np}$  – расчетные и требуемые значения фазовых координат в конце активного участка траектории.

Математическая модель, позволяющая в зависимости от ИД, значений оптимизируемых параметров и программ управления определять основные характеристики УРО, представлена в виде

$$F = R(Z), \quad Z = \tilde{C}^m \times \tilde{P}^s \times \tilde{X}^k \times \tilde{Y}^n \times \tilde{U}^r,$$

где  $F = R(Z)$  – оператор с областью определения на множестве  $Z = \tilde{C}^m \times \tilde{P}^s \times \tilde{X}^k \times \tilde{Y}^n \times \tilde{U}^r$  и областью значений на множестве  $F$ , сопоставляющий в соответствие каждому элементу множества  $Z \in Z$  множество выходных характеристик  $\tilde{F} \subset F$ .

Система уравнений движения центра масс УРО в сферически скоростной системе координат, используемая для определения баллистических характеристик и энергетических возможностей УРО, имеет вид [18]:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{dV}{dt} &= P \cdot \cos \alpha - c_x \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S - m \cdot g_0 \frac{R_3^2}{r^2} \cdot \sin \theta + \\ &\quad + m \cdot r \cdot \Omega_3^2 \cdot \cos \varphi \cdot (\cos \varphi \cdot \sin \theta - \sin \varphi \cdot \sin \eta \cdot \cos \theta); \\ m \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt} &= P \cdot \sin \alpha + c_y \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S - m \cdot g_0 \cdot \frac{R_3^2}{r^2} \cdot \cos \theta + \\ &\quad + \frac{m \cdot V^2}{r} \cdot \cos \theta + 2 \cdot m \cdot V \cdot \Omega_3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \eta + \\ &\quad + m \cdot r \cdot \Omega_3^2 \cdot \cos \varphi \cdot (\sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \eta + \cos \varphi \cdot \cos \eta); \\ m \cdot V \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\eta}{dt} &= P \cdot \sin \beta + c_z \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S - \frac{m \cdot V^2}{r} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \eta \cdot \\ &\quad \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot m \cdot V \cdot \Omega_3 \cdot (\sin \varphi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \eta) - \\ &\quad - m \cdot r \cdot \Omega_3^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \eta. \end{aligned} \quad (1)$$

К системе (1) добавлены уравнение изменения массы УРО

$$\frac{dm}{dt} = -m_c, \quad (2)$$

а также кинематические соотношения, позволяющие определять изменение во времени параметров движения (высоты  $H$ , географических координат широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$ ):

$$\frac{dH}{dt} = V \cdot \sin \theta; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V \cdot \cos \theta}{r} \cdot \sin \eta; \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cdot \cos \theta}{r} \cdot \frac{\cos \eta}{\cos \varphi}. \quad (3)$$

В (1) – (3) использованы следующие обозначения:  $m$  – текущее значение массы УРО;  $V$  – относительная скорость движения УРО;  $P$  – суммарная тяга двигательных установок;  $\alpha$  – угол атаки;  $c_x, c_y, c_z$  – коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой сил;  $S$  – площадь миделя;  $\rho$  – плотность атмосферы на высоте  $H$ ;  $g_0$  – ускорение силы тяжести у поверхности Земли;  $R_3$  – средний радиус Земли;  $r = R_3 + H$  – расстояние центра масс УРО до центра Земли;  $\Omega_3$  – угловая скорость вращения Земли;  $\varphi, \lambda$  –

географические координаты: широта и долгота;  $\eta$  – угол между проекцией вектора скорости на местную горизонтальную плоскость и местной параллелью;  $\theta$  – угол наклона вектора скорости к местному горизонту;  $m_c$  – массовый секундный расход продуктов сгорания ракетного топлива.

Структуры математических моделей, последовательность расчета целевого функционала при оптимизации основных проектных параметров и программ управления для УРО с ЖРД и с двигательными установками на твердом топливе, приведены, соответственно, на рис. 1 [7] и на рис. 2 [12].

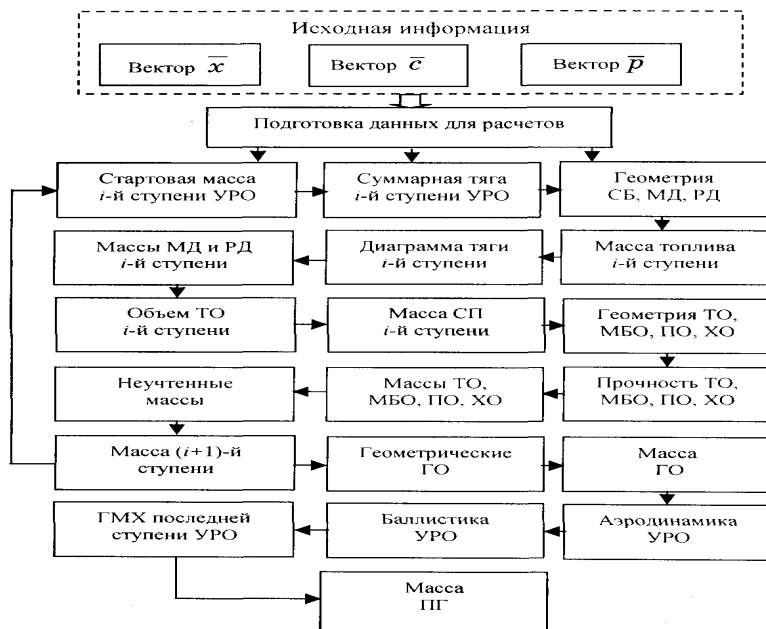


Рис. 1

В состав оптимизируемых параметров УРО, использующих в качестве силовых установок РДТТ (рис. 2), введены также непрерывно изменяющиеся параметры, которые определяют начальные конфигурации зарядов твердого топлива и характеризуются компонентами вектора  $\bar{a}$  [12].

На рис. 1, 2 использована следующая аббревиатура: СБ – сопловой блок; МД – маршевый двигатель; РД – рулевой двигатель; РДТТ – ракетный двигатель на твердом топливе; ТО – топливный отсек; СП – система питания; МБО – межбаковый отсек; ПО – переходный отсек; ХО – хвостовой отсек; ГО – головной обтекатель; ГМХ – габаритно-массовые характеристики; ПГ – полезный груз; ТРН – твердотопливная ракета-носитель.

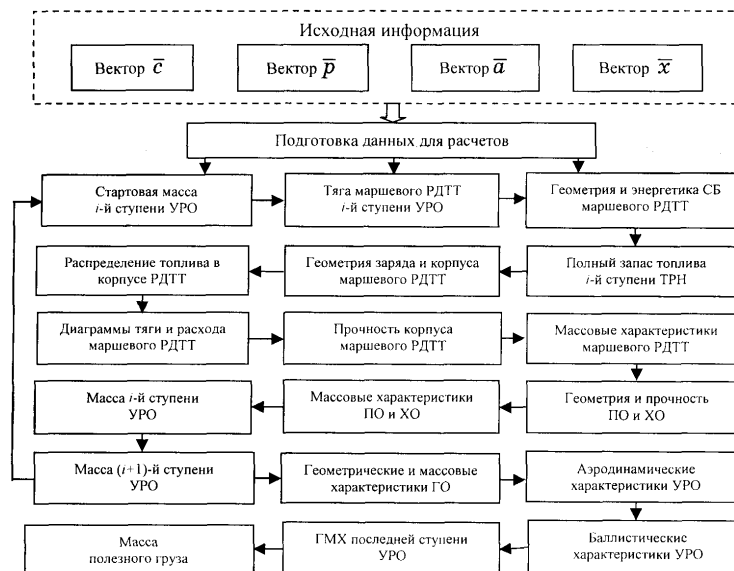


Рис. 2

**Метод решения.** Оптимизируемые параметры в комплексной задаче (как уже указывалось ранее) могут принимать как дискретные, так и непрерывные значения, поэтому одним из возможных путей её решения является декомпозиция последней на две частные задачи [7, 12]: выбор вектора структурных параметров  $\bar{c}$  (задача 1); оптимизация вектора основных проектных параметров  $\bar{p}$  и программ управления движением  $\bar{u}$  для выбранного облика УРО (задача 2). Решение комплексной задачи может быть получено на основе взаимосвязанного решения частных задач, когда результаты решения одной из задач являются исходными данными для решения другой задачи [7, 12].

В том случае, когда рассматриваемое количество альтернативных вариантов УРО невелико, для решения первой частной задачи целесообразно использование метода полного перебора из ограниченного множества альтернативных вариантов.

Для решения второй частной задачи могут быть применены методы теории оптимального управления [8 – 11]. Однако следует отметить, что использование указанных методов наталкивается на значительные трудности, связанные с формулировкой условий применения, наличием ограничений, сложностью математической модели, а также с проблемой решения краевой задачи для каждого из рассматриваемых альтернативных вариантов.

Для преодоления этих трудностей предлагается использовать подход, позволяющий свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей [7, 12 – 15, 19]. В этом случае программы управления движением УРО задаются в заданном классе функций (в частности в виде полиномов). При этом часть коэффициентов полиномов определяется с использованием ИД, текущих значений основных проектных параметров и фазовых координат, а остальные коэффициенты оптимизируются совместно с основными проектными параметрами УРО. Такая задача может быть успешно решена методами детерминированного или случайного поиска [20, 21 и др.].

Следует также отметить, что в процессе оптимизации целесообразно в области, подозрительной на экстремум, использование параболической аппроксимации сечения функциональной поверхности в направлении поиска и определение оптимальных на данном шаге оптимизации значений проектных параметров из условия максимума (минимума) аппроксимирующей функции [7, 12].

Вторая частная задача рассматривается для выбранного облика УРО (одного из возможных альтернативных вариантов) [7, 12 – 15], при этом в процессе её решения необходимо для различных значений вектора  $\bar{p}$  сформировать программы изменения во времени угла тангажа  $\varphi_{np}(t)$ , тяговых  $P(t)$  и расходных  $m_c(t)$  характеристик маршевых двигателей.

Далее приводятся элементы математической модели УРО, которые позволили свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования.

**Выбор программы управления углом тангажа.** Программа управления  $\varphi_{np}(t)$  (одна из компонент вектора управления  $\bar{u}$ ) определяется с учетом следующих условий и ограничений [7, 12 – 15, 19].

Траектория движения УРО по виду программы управления углом тангажа разделена на несколько участков:

- участок вертикального движения УРО;
- участок разворота;
- участок интенсивного аэродинамического и теплового воздействия, на котором осуществляется движение УРО с нулевым углом атаки  $\alpha$ ;
- участок движения с фиксированным углом тангажа  $\varphi_\phi$ ;
- участок движения с линейным изменением во времени угла тангажа;
- пассивный участок движения по переходной орбите, если он предусмотрен целевой задачей, выполняемой УРО при выведении космического аппарата (КА) на орбиту.

На участке вертикального движения  $\varphi_{np}(t)$  имеет следующий вид

$$\varphi_{np}(t) = \text{const} = \frac{\pi}{2}.$$

На участке разворота  $\varphi_{np}(t)$  задается кубической параболой

$$\varphi_{np}(t) = \sum_{i=0}^3 A_i \cdot t^i,$$

коэффициенты которой определяются в результате решения следующей системы линейных уравнений [7, 12 – 15, 19]:

$$\sum_{i=1}^3 A_i \cdot t_\theta^i = \frac{\pi}{2} - A_0; \quad \sum_{i=1}^3 A_i \cdot t_p^i = \varphi_0 - A_0; \quad \sum_{i=1}^3 i \cdot A_i \cdot t_p^{i-1} = -\frac{g(H) \cdot \cos(\theta)}{V}, \quad (4)$$

где  $t_\theta$  – время окончания вертикального участка движения УРО;  $t_p$  – время окончания участка разворота, соответствующее достижению УРО заданного



значения трансзвуковой скорости;  $g(H)$  – ускорение свободного падения на высоте  $H$ ;  $\theta$  – угол наклона вектора скорости  $V$  к местному горизонту.

Коэффициент  $A_0$ , входящий в правые части системы уравнений (4), определяется из условия обеспечения нулевого угла атаки в конце участка разворота.

Значение угла тангажа  $\varphi_0$  в зависимости от решаемой задачи может определяться либо из условия обеспечения требуемых значений кинематических параметров движения в конце АУТ, либо из условия минимальных затрат топлива на выполнение целевой задачи.

Параметры движения  $V$ ,  $H$  и  $\theta$ , входящие в (4), определяются в результате численного интегрирования уравнений (1) – (3).

После участка разворота, в зоне интенсивного аэродинамического и теплового воздействия, программа изменения угла тангажа  $\varphi_{np}(t)$  имеет вид (движение с нулевым углом атаки)

$$\varphi_{np}(t) = \theta(t).$$

После участка интенсивного аэродинамического и теплового воздействия осуществляется движение с фиксированным углом тангажа  $\varphi_f$  до окончания работы маршевого двигателя первой ступени УРО

$$\varphi_{np}(t) = \varphi_f = \text{const}.$$

Последующее движение УРО после отделения первой ступени осуществляется по следующей программе

$$\varphi_{np}(t) = \varphi_f + \dot{\varphi} \cdot t,$$

где угловая скорость разворота УРО  $\dot{\varphi}$  и время выключения маршевого двигателя последней ступени подбираются исходя из условия обеспечения требуемых значений кинематических параметров движения в конце АУТ.

Для случая выведения КА на круговую орбиту с использованием пассивного участка движения по переходной орбите, в апогее переходной орбиты осуществляется повторное включение ДУ последней ступени, а ориентация и управление последней ступенью с КА осуществляются таким образом, чтобы радиальная составляющая ускорения КА равнялась нулю [7, 13, 14]

$$\varphi_{np}(t) = \arcsin\left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{V_\tau}{r}\right) \cdot \frac{m_{st}^N}{P_{st}^N},$$

где  $\varphi_{np}$  – угол между направлением вектора тяги ДУ последней ступени и трансверсальной составляющей вектора скорости  $V_\tau$ ;  $P_{st}^N$  – значение тяги ДУ последней ступени;  $r$  – радиус-вектор, соединяющий центр притяжения Земли с центром масс последней ступени УРО;  $\mu$  – гравитационная постоянная Земли;  $m_{st}^N$  – текущая масса последней ( $N$ -й) ступени УРО с КА.

**Выбор тяговых характеристик маршевых ЖРД.** Программа изменения тяговых и, соответственно, расходных характеристик маршевых ЖРД

$i$ -х ступеней УРО в пустоте (вторая компонента вектора управления  $\bar{u}$ ) разделена на следующие временные участки [7, 15]:

- участок выхода ЖРД на режим, который характеризуется временем выхода на режим  $t_{вых i}$  и начальным значением тяги ЖРД на основном режиме работы  $P_{осн i}^H$ ;

- основной режим работы, характеризуемый продолжительностью работы ЖРД  $t_{осн i}$ , начальным  $P_{осн i}^H$  и конечным  $P_{осн i}^K$  значениями тяги на этом режиме работы;

- участок спада тяги ЖРД от значения  $P_{осн i}^K$  до нуля или до начального значения на дросселируемом режиме работы  $P_{др i}^H$ , который характеризуется продолжительностью спада тяги  $t_{сп i}$ ;

- участок работы ЖРД на дросселируемом режиме, характеризуемый продолжительностью работы  $t_{др i}$ , начальным  $P_{др i}^H$  и конечным  $P_{др i}^K$  значениями тяги на дросселируемом режиме работы;

- участок спада тяги ЖРД от значения  $P_{др i}^K$  до нуля, который характеризуется продолжительностью спада тяги  $t_{сп i}^{др}$ .

При необходимости обеспечения пассивного участка движения УРО продолжительностью  $t_{пас i}$  с выключенным ЖРД, в диаграмме тяги могут быть предусмотрены участок с нулевой тягой или участок полета с работающими рулевыми двигателями (РД), если их наличие предусмотрено в конструктивно-компоновочной схеме УРО.

В зависимости от решаемой задачи при формировании программы изменения тяги ЖРД  $i$ -й ступени УРО некоторые из перечисленных выше участков диаграммы тяги могут отсутствовать.

Диаграмма изменения тяговых и расходных характеристик ЖРД  $i$ -й ступени УРО во времени строится с учетом следующих условий и ограничений:

- на всех участках работы ЖРД переменная во времени тяга определяется полиномами вида

$$P_i(t) = \sum_{j=0}^n A_j \cdot t^j,$$

где  $n=2$  в случае, когда рассматриваются выход ЖРД на режим или участок спада тяги;  $n=1$  в случае, когда рассматривается работа ЖРД на основном или дросселируемом режимах;

- удельная тяга ЖРД при выходе на режим, на основном режиме работы и на участке спада тяги принята постоянной и равной удельной тяге на основном режиме работы  $P_{уд i}^{осн}$ ;

- суммарная тяга РД, если их наличие предусмотрено в ККС, постоянна в течение всего активного участка полета  $i$ -й ступени УРО.

Значения удельных тяг маршевого и рулевых двигателей в зависимости от коэффициента начальной тяговооруженности  $i$ -й ступени, величины тяги, давления в камере сгорания ЖРД, физико-химических характеристик ракет-

ного топлива и конфигурации дозвуковой и сверхзвуковой частей сопла определяются с использованием алгоритмов, реализующих математическую модель ЖРД (см. напр. [22 – 24]). Удельная тяга маршевого ЖРД на дросселируемом режиме  $P_{y\partial i}^{\partial p}$  определяется аналогичным образом.

Данные, используемые при формировании тяги ЖРД, разделены на три группы: исходные данные (компоненты вектора  $\bar{X}$ ); параметры, оптимизируемые совместно с вектором основных проектных параметров  $\bar{p}$ ; параметры диаграммы, определяемые в зависимости от значений ИД и текущих значений компонент вектора  $\bar{p}$ .

В качестве ИД используются: суммарное значение тяги рулевых двигателей  $P_{РД i}$ , удельная тяга рулевых двигателей  $P_{y\partial i}^{РД}$ , время выхода ЖРД на основной режим работы  $t_{вых i}$ , удельные тяги ЖРД на основном  $P_{y\partial i}^{осн}$  и дросселируемом  $P_{y\partial i}^{\partial p}$  режимах работы.

В качестве параметров, оптимизируемых совместно с вектором основных проектных параметров УРО  $\bar{p}$ , приняты: отношение начального значения тяги  $P_{осн i}^H$  к конечному  $P_{осн i}^K$  на основном режиме работы  $\eta_{осн i}$ ; продолжительность участка спада тяги ЖРД  $t_{сп i}$  от значения  $P_{осн i}^K$  до нуля или до начального значения на дросселируемом режиме работы  $P_{\partial p i}^H$ ; отношение начального значения тяги  $P_{\partial p i}^H$  к конечному значению  $P_{\partial p i}^K$  на дросселируемом режиме работы  $\eta_{\partial p i}$ ; продолжительность участка спада тяги ЖРД  $t_{сп i}^{\partial p}$  от значения  $P_{\partial p i}^K$  до нуля; продолжительность работы ЖРД на дросселируемом режиме  $t_{\partial p i}$ ; отношение начального значения тяги на основном режиме  $P_{осн i}^H$  к начальному значению  $P_{\partial p i}^H$  на дросселируемом режиме  $\eta_{осн i}^{\partial p}$ .

В качестве параметров диаграммы тяги, определяемых по ИД и в зависимости от вектора  $\bar{p}$ , приняты: начальное  $P_{осн i}^H$  и конечное  $P_{осн i}^K$  значения тяги маршевой ДУ на основном режиме работы, продолжительность работы ЖРД на основном режиме  $t_{осн i}$ , начальное  $P_{\partial p i}^H$  и конечное  $P_{\partial p i}^K$  значения тяги на дросселируемом режиме работы.

Соотношения для определения всех параметров, характеризующих диаграмму тяги ЖРД приведены в [7, 15].

**Выбор тяговых характеристик маршевых РДТТ.** При оптимизации основных проектных параметров УРО с маршевыми РДТТ программа изменения тяги РДТТ  $i$ -й ступени определяется по соотношениям, приведенным ранее для маршевых ЖРД, с тем лишь отличием, что в РДТТ не предусмотрен режим дросселирования тяги. Реализация полученной таким образом программы изменения тяги обеспечивается соответствующим выбором начальной конфигурации заряда твердого ракетного топлива (ТРТ). Геометрические параметры, характеризующие начальную конфигурацию заряда ТРТ, определяют характер изменения геометрических характеристик заряда

и, соответственно, тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ во времени. Под геометрическими характеристиками заряда далее понимаются изменения поверхности горения твердого топлива  $S = S[\epsilon(t), \bar{a}]$  и внутреннего, свободного объема  $V_{св} = V_{св}[\epsilon(t), \bar{a}]$  камеры сгорания в зависимости от толщины сгоревшего свода  $e$ .

Сила тяги маршевого РДТТ  $P(t, \bar{a})$  и удельный импульс тяги  $I_{уд}^{нycm}$  в пустоте, а также массовый секундный расход продуктов сгорания  $\dot{m}_c(t, \bar{a})$  рассчитываются по известным соотношениям [25, 26]:

$$\begin{aligned} P(t, \bar{a}) &= I_{уд}^{нycm} \cdot \dot{m}_c(t, \bar{a}); \\ I_{уд}^{нycm} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \chi \cdot R \cdot T_e} \cdot \left( \lambda_a + \frac{1}{\lambda_a} \right); \\ \dot{m}_c(t, \bar{a}) &= A_n \cdot \frac{\rho_k(t) \cdot F_{kr}}{\sqrt{\chi \cdot R \cdot T_e}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k$  – показатель изэнтропии расширения продуктов сгорания ТРТ в сопловом блоке;  $R, T_e$  – соответственно газовая постоянная продуктов сгорания и температура горения ТРТ;  $\chi$  – коэффициент теплопотерь в камере сгорания;  $\lambda_a$  – приведенная скорость в выходном сечении сопла;  $\rho_k(t)$  – давление торможения на входе в сопло;  $F_{kr}$  – площадь критического сечения сопла.

Коэффициент  $A_n$ , входящий в (5), определяется по зависимости

$$A_n = \sqrt{k \cdot \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Как видно из (5), изменение силы тяги маршевого РДТТ во времени  $P(t, \bar{a})$  определяется характером изменения давления  $\rho_k(t)$  в камере сгорания, которое может быть получено в результате решения задачи внутренней баллистики РДТТ [12, 25 – 26].

На начальном этапе проектирования УРО с достаточной для проектных исследований точностью задача внутренней баллистики может быть решена в нульмерной постановке [25] при использовании гипотезы осреднения параметров состояния продуктов сгорания в камере двигателя. При этом первые два периода функционирования РДТТ (автономное горение воспламенителя и совместное горение воспламенителя и ТРТ) могут быть исключены из рассмотрения, в силу их малой продолжительности и слабого влияния на энергетические характеристики УРО в целом. В этом случае предполагается, что воспламенитель обеспечивает необходимый уровень давления в камере, требуемое количество подведенного тепла к поверхности горения, обеспечивающие и надежное воспламенение заряда ТРТ.

В предположении, что в камере сгорания РДТТ произведение  $\chi \cdot R \cdot T_e \approx \text{const}$ , изменение во времени давления  $\rho_k(t)$  в камере сгорания может быть получено в результате решения следующей системы дифференциальных уравнений внутренней баллистики РДТТ [12, 26]:

$$\frac{V_{\text{св}}[\epsilon(t), \bar{a}]}{\chi \cdot R \cdot T_e} \cdot \frac{dp_k}{dt} = S[\epsilon(t), \bar{a}] \cdot u \cdot \rho_m - A_n \cdot \frac{\rho_k(t) \cdot F_{kr}}{\sqrt{\chi \cdot R \cdot T_e}} - \frac{p_k}{\chi \cdot R \cdot T_e} \cdot \frac{dV_{\text{св}}[\epsilon(t), \bar{a}]}{dt};$$

$$\frac{dV_{\text{св}}[\epsilon(t), \bar{a}]}{dt} = S[\epsilon(t), \bar{a}] \cdot u; \quad (6)$$

$$\frac{de}{dt} = u,$$

где  $u, \rho_m$  – соответственно, скорость горения и плотность ТРТ.

При заданных начальных условиях система уравнений (6) может быть проинтегрирована численным методом, если известны скорость горения ТРТ  $u$  и зависимость изменения площади горения заряда  $S = S[\epsilon(t), \bar{a}]$  от толщины сгоревшего свода  $e$ .

В процессе работы РДТТ изменение геометрических характеристик заряда зависит от характера перемещения поверхности горения ТРТ, т. е. от поля скоростей горения  $u = u(x, y, z)$ . На начальном этапе проектирования УРО целесообразно допущение о том, что поле скоростей горения равномерно, то есть не зависит от координат  $x, y, z$ . В этом случае задача расчета изменения  $S = S[\epsilon(t), \bar{a}]$  и  $V_{\text{св}} = V_{\text{св}}[\epsilon(t), \bar{a}]$  во времени решается отдельно от задачи внутренней баллистики, а поверхность горения  $S = S[e, \bar{a}]$  и внутренний объём  $V_{\text{св}} = V_{\text{св}}[e, \bar{a}]$  определяются как функции от толщины сгоревшего свода  $e$ .

Для типовых форм зарядов поверхность горения может быть составлена из плоскостей, сферических, тороидальных, цилиндрических и конических поверхностей. При этом оси поверхностей вращения располагаются в плоскостях, проходящих через продольную ось заряда  $z$ .

При расчете  $S = S(e, \bar{a})$  заряд ТРТ вдоль продольной оси  $z$  разделяется на  $N$  зон, при этом заряд ТРТ рассекается рядом плоскостей, проходящих через ось канала  $z$ . Линии (следы поверхностей горения), получающиеся в результате таких сечений, будут состоять для типовых форм зарядов из взаимно пересекающихся прямых и окружностей. Границы зон определяются плоскостями, перпендикулярными оси  $z$  и проходящими через точки пересечения двух соседних элементов, образующих указанные выше линии. Площадь поверхности горения  $S = S(e, \bar{a})$  и внутренний свободный объём камеры сгорания  $V_{\text{св}} = V_{\text{св}}(e, \bar{a})$  для текущей толщины сгоревшего свода  $e$  определяются соотношениями:

$$S(e, \bar{a}) = \sum_{i=1}^N S_i(e, \bar{a}), \quad V_{\text{св}}(e, \bar{a}) = \sum_{i=1}^N V_{\text{св}i}(e, \bar{a}).$$

Значение внутреннего объёма  $V_{\text{св}i}(e, \bar{a})$  в  $i$ -й зоне заряда определяется по зависимостям:

$$V_{\text{св}i}(e, \bar{a}) = \int_{z_{\text{Н}i}(e)}^{z_{\text{В}i}(e)} F_i(z, e, \bar{a}) dz, \quad F_i(z, e, \bar{a}) = \sum_{j=1}^{n_i} \int_{x_{\text{Н}j}(z, e)}^{x_{\text{В}j}(z, e)} y_{ij}(x, z, e, \bar{a}) dx,$$

где  $F_i(z, e, \bar{a})$  – изменение площади проходного сечения канала заряда вдоль продольной оси  $z$  в  $i$ -й зоне заряда;  $z_{Hi}(e), z_{Bi}(e)$  – нижняя и верхняя граница  $i$ -й зоны;  $n_i$  – число элементов, формирующих контур проходного сечения канала заряда в плоскости, перпендикулярной продольной оси  $z$ ;  $y_{ij} = y_{ij}(x, z, e, \bar{a})$  – уравнение  $j$ -го элемента, формирующего контур проходного сечения канала заряда в  $i$ -й зоне.

Нижние и верхние пределы интегрирования  $x_{Hj}(z, e), x_{Bj}(z, e)$  для каждого элемента  $y_{ij}$  являются абсциссами точек пересечения  $j$ -го элемента с  $(j-1)$ -м и  $(j+1)$ -м соответственно.

Среднее значение поверхности горения  $S_{cp}$  на интервале изменения толщины сгоревшего свода заряда  $[e_j, e_{j+1}]$  определяется по соотношению

$$S_{cp} = \frac{V_{cs\ j+1} - V_{cs\ j}}{e_{j+1} - e_j}.$$

Если поверхность горения в  $i$ -й зоне заряда представляет собой поверхность вращения относительно продольной оси заряда  $z$ , то ее площадь определяется по соотношениям:

$$S_i(e, \bar{a}) = 2\pi \int_{z_{Hi}(e)}^{z_{Bi}(e)} y_i(z, e, \bar{a}) ds, \quad ds = \sqrt{1 + \left[ \frac{dy_i(z, e, \bar{a})}{dz} \right]^2} dz; \quad (7)$$

а свободный объем, ограниченный этой поверхностью вращения, вычисляется по зависимости

$$V_{cs\ i}(e, \bar{a}) = \pi \int_{z_{Hi}(e)}^{z_{Bi}(e)} y_i^2(z, e, \bar{a}) dz, \quad (8)$$

где  $y_i = y_i(z, e, \bar{a})$  – уравнение образующей поверхности вращения.

Входящие в (7), (8) значения нижних и верхних границ  $i$ -й зоны  $z_{Hi}(e), z_{Bi}(e)$  определяются как координаты  $z$  точек пересечения линии, формирующей след поверхности горения в  $i$ -й зоне, с линиями, формирующими следы поверхностей горения в  $(i-1)$ -й и  $(i+1)$ -й зонах соответственно.

Приведенные соотношения позволяют на начальном этапе проектирования определить внутрибаллистические характеристики РДТТ для начальной конфигурации заряда ТРТ, определяемой компонентами вектора  $\bar{a}$ , и соответствующие этому вектору тяговые и расходные характеристики РДТТ. При этом компоненты вектора  $\bar{a}$  определяются из условия минимального отклонения расчетной тяги РДТТ от программы изменения тяги двигателя, полученной в результате решения второй частной задачи оптимизации проектных параметров и программ управления УРО.

**Иллюстративные примеры.** С использованием представленного методического обеспечения был решен ряд задач начального этапа проектирования объектов ракетно-космической техники, таких как: выбор программы

управления движением космического аппарата при переходе с начальной круговой орбиты на заданную конечную круговую орбиту [19], оптимизация проектных параметров ракеты-носителя сверхлегкого класса [13], оптимизация проектных параметров двухступенчатой ракеты-носителя при решении различных целевых задач [14], оптимизация программ управления полетом и оптимизация тяги маршевой двигательной установки управляемого ракетного объекта [15], исследование чувствительности целевого функционала к вариациям проектных параметров ракеты-носителя [27].

**Выводы.** Представленное методическое обеспечение для выбора облика и оптимизации основных проектных параметров и программ управления движением УРО, разработанные структуры математических моделей, приведенные элементы математической модели, позволившие свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей, могут быть использованы проектными организациями на начальном этапе проектирования объектов ракетно-космической техники различного назначения.

1. Основы проектирования летательных аппаратов (транспортные системы). Учебник для технических вузов / В. П. Мишин, В. К. Безвербый, Б. М. Панкратов и др. / Под ред. В. П. Мишина. – М.: Машиностроение, 1985. – 360 с.
2. Шеверов Д. Н. Проектирование беспилотных летательных аппаратов / Д. Н. Шеверов. – М.: Машиностроение, 1978. – 264 с.
3. Разумеев В. Ф. Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе / В. Ф. Разумеев, Б. К. Ковалев. – М.: Машиностроение, 1976. – 356 с.
4. Баллистическая ракета на твердом топливе / А. М. Синюков, Л. И. Волков, А. И. Львов, А. М. Шишкевич / Под ред. А. М. Синюкова. – М.: Воениздат, 1972. – 511 с.
5. Проектирование и испытание баллистических ракет / Под ред. В. И. Варфоломеева и М. И. Копытова. – М.: Воениздат, 1970. – 392 с.
6. Мишин В. П. Введение в машинное проектирование летательных аппаратов / В. П. Мишин, М. И. Осин. – М.: Машиностроение, 1978. – 128 с.
7. Аллатов А. П. Комплексная задача оптимизации основных проектных параметров и программ управления движением ракет космического назначения / А. П. Аллатов, В. С. Сенькин // Техническая механика. – 2011. – № 4. – С. 98–113.
8. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
9. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 385 с.
10. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
11. Тарасов Е. В. Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата / Е. В. Тарасов. – М.: Машиностроение, 1970. – 364 с.
12. Сенькин В. С. Комплексная задача оптимизации проектных параметров и программ управления твердотопливной ракеты-носителя сверхлегкого класса / В. С. Сенькин // Техническая механика. – 2012. – № 2. – С. 106–121.
13. Сенькин В. С. Оптимизация проектных параметров ракеты-носителя сверхлегкого класса / В. С. Сенькин // Техническая механика. – 2009. – № 1. – С. 80–88.
14. Сенькин В. С. Оптимизация проектных параметров двухступенчатой ракеты-носителя при решении различных целевых задач / В. С. Сенькин // Информационные технологии в управлении сложными системами – 2013 [Электронный ресурс]: научная конференция (19–20 июня 2013 г.): сборник докладов / Под редакцией академика НАН Украины В. В. Пилипенко. – Днепропетровск: Институт технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины, 2013. – Режим доступа к сборнику <http://www.itm.dp.ua/>
15. Сенькин В. С. Оптимизация программ управления полетом и оптимизация тяги маршевой двигательной установки управляемого ракетного объекта / В. С. Сенькин // Техническая механика. – 2000. – № 1. – С. 46–50.
16. Анпазов Р. Ф. Баллистика управляемых ракет дальнего действия / Р. Ф. Анпазов, С. С. Лавров, В. П. Мишин. – М.: Наука, 1966. – 307 с.
17. Лебедев А. А. Баллистика ракет / А. А. Лебедев, Н. Ф. Герасюта. – М.: Машиностроение, 1970. – 244 с.

18. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере / *М. Л. Шкадов, Р. С. Буханова, В. Ф. Илларионов, В. П. Плохих.* – М. : Машиностроение, 1972. – 240 с.
19. *Сенькин В. С.* Выбор программы управления движением космического аппарата при переходе с начальной круговой орбиты на заданную конечную круговую орбиту / *В. С. Сенькин* // *Техническая механика.* – 2003. – № 2. – С. 79 – 87.
20. *Батицев Д. И.* Поисковые методы оптимального проектирования / *Д. И. Батицев.* – М. : Сов. радио, 1975. – 216 с.
21. *Хеллман О.* Введение в теорию оптимального поиска / *О. Хеллман* / Под. ред. *М. М. Моисеева.* – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 248 с.
22. *Добровольский М. В.* Жидкостные ракетные двигатели / *М. В. Добровольский.* – М. : Машиностроение, 1968. – 396 с.
23. Ракетные двигатели / *Т. М. Мелькумов, Н. И. Мелик-Пашаев, П. Г. Чистяков, А. Г. Шукув.* – М. : Машиностроение, 1976. – 399 с.
24. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей : Учебник для студентов авиационных специальностей высших учебных заведений / *А. П. Васильев, В. М. Кудрявцев, В. А. Кузнецов* и др. / Под ред. *В. М. Кудрявцева.* – М. : Высшая школа, 1983. – 703 с.
25. *Орлов Б. В.* Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе / *Б. В. Орлов, Г. Ю. Мазинг.* – М. : Машиностроение, 1968. – 535 с.
26. *Абугов Д. И.* Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива / *Д. И. Абугов, В. М. Бобылев.* – М. : Машиностроение, 1987. – 272 с.
27. *Сенькин В. С.* Исследование чувствительности целевого функционала к вариациям проектных параметров ракеты-носителя / *В. С. Сенькин* // *Техническая механика.* – 2010. – № 4. – С. 97 – 108.

Институт технической механики  
НАН Украины и ГКА Украины,  
Днепропетровск

Получено 22.07.13,  
в окончательном варианте 28.10.13