

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ «УЗКОГО КАНАЛА» В ЗАДАЧАХ ВНУТРЕННЕЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Рассмотрены способы определения продольного градиента давления при расчете вязкого сжимаемого турбулентного течения в рамках модели «узкого канала» в широком диапазоне чисел Маха. Определен рациональный алгоритм расчета градиента давления при умеренных числах Маха.

Розглянуто способи визначення поздовжнього градієнта тиску при розрахунку в'язкої стисливої турбулентної течії в рамках моделі «вузького каналу» у широкому діапазоні чисел Маху. Визначено раціональний алгоритм розрахунку градієнта тиску при помірних числах Маху.

Methods of determination of a longitudinal pressure gradient for calculating a viscous compressible turbulent flow in the context of the model of a narrow channel over a wide range of Mach numbers are examined. The rational algorithm of calculations of the pressure gradient at moderate Mach numbers is found.

Внутренние течения газовых смесей широко применяются во многих технических устройствах и технологических процессах ракетно-космической техники и других отраслях промышленности. Использование для описания такого класса течений полной системы уравнений Навье–Стокса неизбежно связано с большим объемом вычислений и предъявляет весьма высокие требования к быстродействию и объему оперативной памяти современных ЭВМ. Поэтому применение приближенных моделей, в тех случаях, когда принятые при построении модели допущения выполняются, является не только оправданным, но и более целесообразным, чем применение полных уравнений Навье–Стокса. Наибольшее распространение при численном моделировании внутренних течений на базе упрощенных уравнений Навье–Стокса в настоящее время получили модели «узкого канала» и параболизированные уравнения Навье–Стокса [1].

Модель «узкого канала» используется для описания течений в трубах и каналах, в которых длина канала намного больше его ширины и локальные значения отклонения угла наклона стенок канала к основному направлению течения малы. Уравнения «узкого канала» формально совпадают с уравнениями пограничного слоя. Отличие состоит лишь в том, что в уравнениях пограничного слоя продольный градиент давления является известной функцией, определенной при решении задачи невязкого обтекания, а в уравнениях «узкого канала» значение продольного градиента давления является неизвестным параметром, который необходимо определить в процессе решения задачи. У различных авторов описаны различные подходы к определению продольного градиента давления при решении задач внутренней газовой динамики в приближении «узкого канала». Традиционным является определение градиента давления из условия сохранения расхода для каналов с непроницаемыми стенками. При наличии вдува или отсоса нормальная составляющая скорости на стенке должна быть задана в качестве граничного условия, поэтому в этом случае изменение расхода вдоль канала можно определить из постановки задачи. Для несжимаемых течений этот способ описан, например [1, 2]. При использовании явных конечно-разностных схем значение dp/dx может быть вычислено по конечной формуле, для неявных схем используются различные итерационные методы [2]. Также существуют подходы, в которых градиент давления рассматривается в качестве дополнительной неиз-

вестной [2]. При исследовании течений, в которых изменение плотности является значительным (в частности сверхзвуковых), при расчете dp/dx необходимо учитывать зависимость плотности от давления. Т.е. градиент давления в таком течении может быть определен при помощи итерационных методов или при помощи конечных формул, полученных в результате интегрирования уравнения неразрывности с использованием уравнения состояния. Зачастую эти формулы являются достаточно громоздкими [3, 4] и согласно [3] следует отдавать предпочтение итерационным методам.

Целью данной статьи является определение рационального алгоритма определения продольного градиента давления при различных режимах течения турбулентного вязкого сжимаемого газа в рамках модели «узкого канала».

Алгоритмы расчета продольного градиента давления. При интегрировании уравнений «узкого канала» продольный градиент давления целесообразно определять исходя из краевого характера граничных условий для поперечной составляющей скорости v , которая определяется из уравнения неразрывности. Это уравнение является дифференциальным уравнением 1-го порядка. Для его однозначного решения необходимо задать одно граничное условие. Но при расчете течения в канале необходимо удовлетворить двум граничным условиям для поперечной скорости v :

$$\text{на оси канала при } y = 0 \quad v = 0, \quad (1)$$

$$\text{на стенке канала при } y = y_w \quad v = 0 \text{ или } v = v_{\partial}, \quad (2)$$

где y_w – поперечная координата стенки канала; v_{∂} – заданная нормальная составляющая скорости ддува или отсоса через стенку.

Рассмотрим несколько способов определения dp/dx .

Способ 1. Простейший алгоритм расчета градиента давления при интегрировании системы уравнений «узкого канала» заключается в следующем. По известным параметрам течения в предыдущем маршевом сечении при заданном приближении градиента давления dp/dx последовательно интегрируются: уравнение неразрывности с граничным условием (1) на оси симметрии и уравнения второго порядка для продольной составляющей скорости, полной энтальпии, концентраций компонент газовой смеси и параметров турбулентности (в случае турбулентного течения). Новое приближение значения градиента давления dp/dx определяется из выполнения условия (2) для поперечной составляющей скорости. Итерационный процесс подбора dp/dx повторяется до сходимости. Итерационный процесс можно осуществить методом сканирования.

Объем вычислений при определении dp/dx может быть существенно уменьшен, если применить алгоритм выделения явной зависимости продольной скорости от градиента давления. Это позволяет определять градиент давления на каждом итерационном цикле по нелинейности дифференциальных уравнений второго порядка без дополнительных затрат на решение этих уравнений. Для внутренних течений несжимаемой жидкости этот подход был описан в [5] и обобщен в [6] для сжимаемых дозвуковых течений. Согласно [6] при записи конечно-разностной аппроксимации уравнения движения вдоль оси x

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{y^v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y^v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

получаем систему нелинейных алгебраических уравнений для сеточной функции u_j

$$a_j u_{j-1} + b_j u_j + c_j u_{j+1} = -\frac{dp}{dx} \Delta x + d_j, \quad j = \overline{2, N-1}, \quad (3)$$

где ρ – плотность; μ – эффективный коэффициент динамической вязкости, равный сумме коэффициентов ламинарной и турбулентной вязкости; $v = 0$ для плоского течения, $v = 1$ для осесимметричного течения; $a_j = -\left(\mu_{j+1/2} - (\rho v)_j \frac{\Delta y}{2} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$; $b_j = (\rho u)_j + 2\mu_j \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$; $c_j = -\left(\mu_{j+1/2} + (\rho v)_j \frac{\Delta y}{2} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$; $d_j = (\rho u)_j$; j – номер узла разностной сетки по y ; N – число узлов разбиения разностной сетки в поперечном направлении; Δx – шаг разбиения сетки в продольном направлении; Δy – шаг разбиения сетки в поперечном направлении.

Тот факт, что свободный член в правой части (3) линейно зависит от dp/dx , позволяет представить выражение для продольной составляющей скорости u_j в виде линейной зависимости от продольного градиента давления dp/dx

$$u_j = u_j^0 + u_j^p \frac{dp}{dx}, \quad (4)$$

где u_j^0 , u_j^p не зависят от dp/dx .

Подставляя выражение (4) в уравнение (3) получим

$$a_j (u_{j-1}^0 + u_{j-1}^p \frac{dp}{dx}) + b_j (u_j^0 + u_j^p \frac{dp}{dx}) + c_j (u_{j+1}^0 + u_{j+1}^p \frac{dp}{dx}) = d_j^0 + d_j^p \frac{dp}{dx}.$$

Группируя члены относительно множителя dp/dx , в силу произвольности выбора dp/dx , получаем две системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов u_j^0 и u_j^p :

$$a_j u_{j-1}^0 + b_j u_j^0 + c_j u_{j+1}^0 = d_j^0, \quad (5)$$

$$a_j u_{j-1}^p + b_j u_j^p + c_j u_{j+1}^p = d_j^p. \quad (6)$$

Системы уравнений (5) и (6) для u_j^0 и u_j^p различаются только свободными членами.

Проводя аналогичные преобразования с граничными условиями для продольной скорости, получаем по два граничных условия для u_0 и u_p :

$$\begin{aligned}
B_1 u_0 &= B_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} + B_3, \quad \text{при } y = 0; \\
B_4 u_0 &= B_5 \frac{\partial u_0}{\partial y} + B_6, \quad \text{при } y = y_w;
\end{aligned}
\tag{7}$$

$$\begin{aligned}
B_1 u_p &= B_2 \frac{\partial u_p}{\partial y}, \quad \text{при } y = 0; \\
B_4 u_p &= B_5 \frac{\partial u_p}{\partial y} p, \quad \text{при } y = y_w;
\end{aligned}
\tag{8}$$

где B_i ($i = \overline{1,6}$) – коэффициенты записи граничных условий для продольной скорости в стандартном виде.

Таким образом, для определения значений продольной скорости с выделением явной зависимости от градиента давления получили две системы алгебраических уравнений (5) и (6) с граничными условиями (7) и (8) вместо одной. При этом количество вычислений при решении уравнений (5) и (6) увеличивается незначительно, т.к. эти две системы различаются только свободными членами.

Способ 2. Другой алгоритм расчета градиента давления заключается в расчете приближения для dp/dx из интегрального аналога уравнения неразрывности

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_w} \rho u y^v dy = v_{e\partial} \rho_w y_w^v
\tag{9}$$

при выделении явной зависимости продольной составляющей скорости от искомого градиента давления (4) на каждой итерации по нелинейности.

Для простоты будем рассматривать течение в канале при отсутствии вдува газа через стенки канала ($v_{e\partial} = 0$). Уравнение (9) при условии отсутствия вдува через стенки канала эквивалентно следующему

$$\int_0^{y_w} \rho u y^v dy = G = const.
\tag{10}$$

Подставив выражение для продольной скорости (4) в (10) и разрешая полученное выражение относительно dp/dx , получим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{G - \int_0^{y_w} \rho u_0 y^v dy}{\int_0^{y_w} \rho u_p y^v dy}.
\tag{11}$$

Расчет в текущем маршевом сечении осуществляется до достижения сходимости по нелинейности. После чего осуществляется переход на новый маршевый шаг. Таким образом, определение градиента давления осуществляется по формуле (11) внутри цикла итераций по нелинейности уравнений

второго порядка. При реализации этого алгоритма расчета градиента давления не требуется дополнительных итераций в цикле тела итераций по нелинейности при решении уравнений второго порядка.

Однако при расчете сверхзвуковых течений, когда важную роль играют эффекты сжимаемости, возникают проблемы с подбором градиента давления. Процесс определения градиента давления в соответствии с выражением (11) или методом сканирования без пересчета плотности является расходящимся, что вызвано сильной зависимостью плотности от давления. При рассмотрении существенно сверхзвуковых течений необходимо при вычислении dp/dx учесть зависимость плотности от давления [1].

Способ 3. На текущем шаге по маршевой переменной давление представляется как

$$p = \bar{p} + \frac{dp}{dx} \Delta x, \quad (12)$$

где \bar{p} – давление на предыдущем маршевом шаге.

Плотность выражается из уравнения состояния

$$\rho = \frac{p}{T} \frac{\mu}{R_0}, \quad (13)$$

где T – статическая температура, R_0 – универсальная газовая постоянная.

Для продольной скорости используется выражение (4).

Теперь выражение для расхода (10) с учетом (4), (12) и (13) примет следующий вид

$$G = \int_0^{y_w} \frac{1}{T} \frac{\mu}{R_0} \left(\bar{p} + \frac{dp}{dx} \Delta x \right) \left(u_0 + \frac{dp}{dx} u_p \right) y^\nu dy.$$

После несложных преобразований получается квадратное уравнение для определения градиента давления

$$a \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + b \frac{dp}{dx} + c = 0, \quad (14)$$

$$\text{где } a = \frac{\Delta x}{R_0} J_1, J_1 = \int_0^{y_w} \frac{\mu}{T} u_p y^\nu dy; c = \frac{\bar{p}}{R_0} J_2 - G, J_2 = \int_0^{y_w} \frac{\mu}{T} u_0 y^\nu dy;$$

$$b = \frac{\bar{p}}{R_0} J_1 + \frac{\Delta x}{R_0} J_2.$$

Корнем уравнения (14), удовлетворяющим физическим условиям задачи, является

$$\left(\frac{dp}{dx} \right) = - \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad (15)$$

Соотношение (15) записано в виде, исключающем неопределенность 0/0 при уменьшении шага интегрирования Δx . В случае $\Delta x \rightarrow 0$ коэффициент $a \rightarrow 0$ и соотношение (15) стремится к предельному значению $-c/b$.

Результаты исследований. Для верификации приведенных выше алгоритмов расчета градиента давления в задачах внутренней газовой динамики в приближении «узкого канала» был проведен расчет ламинарного осесимметричного течения и выполнено сравнение с ламинарным несжимаемым стабилизированным течением Хагена–Пуазейля в круглой трубе. Для такого течения существует точное теоретическое решение, которое связывает максимальную скорость в поперечном сечении трубы u_{\max} с продольным градиентом давления dp/dx [7]

$$u_{\max} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right), \quad (16)$$

где R – радиус трубы; μ – коэффициент молекулярной вязкости.

Переходя в выражении (16) к безразмерным переменным, получим

$$\text{Re}_m \frac{\bar{R}^2}{\bar{u}_{\max} \bar{\mu}} \left(-\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \right) = 4, \quad (17)$$

где $\text{Re}_m = \frac{u_0 L_m}{\mu_0 / \rho}$ – характерное число Рейнольдса, вычисленное по значениям

величин в начальном сечении; черточкой обозначены безразмерные величины, полученные при делении на свое характерное значение в начальном сечении.

Результаты параметрических расчетов ламинарного стабилизированного течения при различных числах Рейнольдса $\text{Re}_m = 10 \div 2000$ представлены в таблице 1. Расчеты проводились при скорости течения в начальном сечении $u_0 = 5$ м/с, что позволяет пренебречь эффектами сжимаемости. Во второй строке таблицы приведен размер пограничного слоя в начальном сечении δ_0 , значение которого согласовано с Re_m . В третьей строке таблицы показано

значение комплекса $\text{Re}_m \frac{\bar{R}^2}{\bar{u}_{\max} \bar{\mu}} \left(-\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \right)$ при разных числах Рейнольдса, ко-

торое, согласно точному решению (17), должно равняться 4. Расчеты проведены с использованием 1-го и 2-го способов определения dp/dx . Представленные результаты показывают хорошее соответствие расчетного и теоретического значений продольного градиента давления для ламинарного стабилизированного течения.

Таблица 1

Re_m	10	50	100	500	1000	2000
δ_0	0,03	0,014	0,01	0,0045	0,003	0,002
$\text{Re}_m \frac{\bar{R}^2}{\bar{u}_{\max} \bar{\mu}} \left(-\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \right)$	4,004	4,018	4,018	4,050	4,005	4,065

Были проведены расчеты сверхзвукового турбулентного вязкого сжимаемого течения совершенного газа на начальном участке в осесимметричном канале в рамках модели «узкого канала» и сравнение результатов с экспериментальными данными [8]. В соответствии с условиями проведения экс-

перимента расчеты были выполнены при следующих исходных данных в начальном сечении

- число Маха $M_x = 3,08$;
- характерное число Рейнольдса $Re = 2,9 \cdot 10^6$;
- статическая температура $T = 280$ К;
- статическое давление $p = 1$ бар;

Для определения характеристик турбулентности использовалась дифференциальная однопараметрическая модель турбулентности SALSA [9]. Значение начальной турбулентной вязкости $\bar{\nu}_{t0}$ варьировалось от 1 до 2000 и выбиралось исходя из условия наилучшего согласования с экспериментальными данными. Градиент давления определялся с использованием способов 1 и 3.

На рисунке 1 показано распределение безразмерного статического давления P/P_n по длине канала x/R по результатам расчетов (—■—) и экспериментальным данным (●).

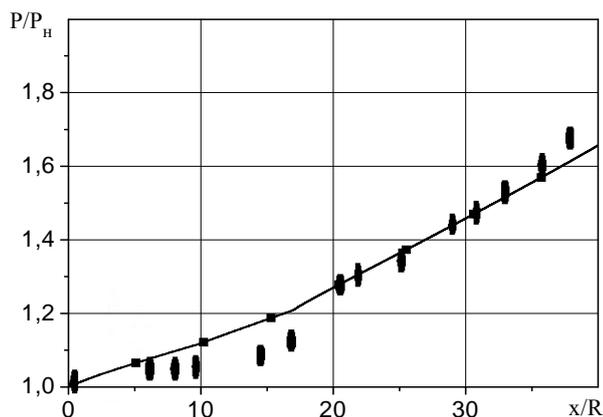


Рис. 1

На рисунке 2 представлены расчетные и экспериментальные профили числа Маха M_x в различных сечениях цилиндрического канала.

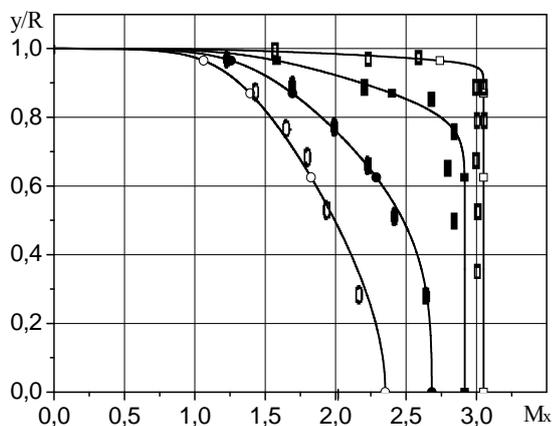


Рис. 2

На графиках использованы следующие обозначения:

- профиль M_x при $x/R = 0$ —□— — расчет, □ — эксперимент;
- профиль M_x при $x/R = 11,04$ —■— — расчет, ■ — эксперимент;

профиль M_x при $x/R=33,36$ —●— — расчет, ● — эксперимент;
 профиль M_x при $x/R=52$ —○— — расчет, ○ — эксперимент.

Представленные результаты показывают небольшое расхождение расчетных и экспериментальных данных величины статического давления на участке от кромки сопла до сечения $x/R \approx 17$ и удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных значений распределения давления и профилей числа Маха на участке x/R от 20 до 40. Имеющиеся расхождения с экспериментальными данными, по-видимому, определяются особенностями используемой при расчетах модели турбулентности. Для получения лучшего согласования расчетных и экспериментальных данных необходимо проводить численные эксперименты с различными моделями турбулентности.

Для апробации предложенных алгоритмов расчета градиента давления dp/dx были проведены параметрические расчеты турбулентного вязкого сжимаемого течения совершенного газа в рамках модели «узкого канала» для случаев дозвукового и сверхзвукового течений. На рисунках 3 и 4 представлены распределение статического давления и характер поведения градиента давления, соответственно, при различных режимах течения. Линии 1 и 2 соответствуют дозвуковому режиму течения ($M_x=0,3$ и $M_x=0,5$ соответственно). Сверхзвуковому режиму течения соответствуют линии 3 и 4 ($M_x=2$ и $M_x=3$ соответственно). Вследствие нарастания пограничного слоя по длине канала происходит сужение поперечного сечения канала. Это приводит к ускорению дозвукового потока, падению статического давления и уменьшению абсолютного значения dp/dx . Как видно из рисунка 4, при расчете дозвуковых течений (линии 1 и 2) градиент давления отрицательный. При сверхзвуковых скоростях градиент давления имеет положительное значение. При нарастании пограничного слоя происходит торможение сверхзвукового потока и рост статического давления по длине канала.

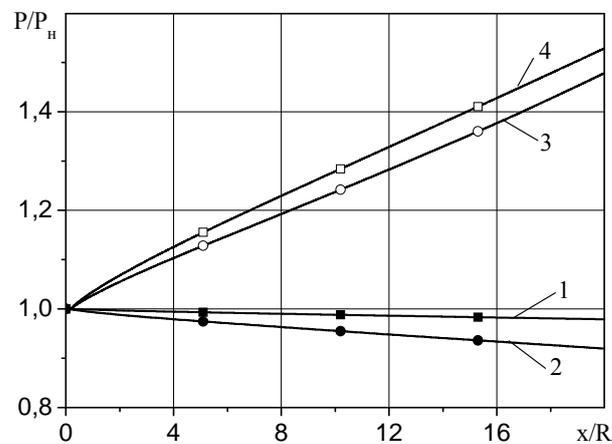


Рис. 3

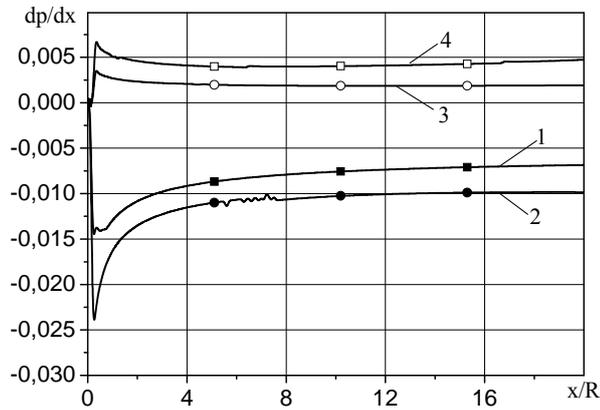


Рис. 4

В таблице 2 приведено среднее время, затраченное на расчет одного шага $t_{ш}$, при расчете различных режимов течения в диапазоне чисел Маха от 0,1 до 3 для заданной геометрии канала при использовании трех рассмотренных способов определения градиента давления. Расчеты проведены на ПЭВМ Pentium (R) D CPU с тактовой частотой 3,4 ГГц.

Таблица 2

M_x	Re	$t_{ш}$, мсек		
		Способ 1	Способ 2	Способ 3
0,1	$0,1 \cdot 10^6$	1,34	0,99	1,01
0,3	$0,3 \cdot 10^6$	2,61	2,28	1,92
0,5	$0,5 \cdot 10^6$	4,63	2,84	3,61
1,5	$1,5 \cdot 10^6$	11,37	–	5,28
2,0	$2,0 \cdot 10^6$	8,42	–	6,51
2,5	$2,5 \cdot 10^6$	7,81	–	7,66
3,0	$3,0 \cdot 10^6$	7,04	–	13,86

Из приведенных результатов следует, что алгоритмы с использованием способов 1 и 3 являются универсальными. Их применение позволяет проводить расчет как дозвуковых, так и сверхзвуковых течений. Применение способа 2 является эффективным только при рассмотрении дозвуковых течений.

Необходимо отметить, что ни один из описанных алгоритмов определения градиента давления не позволяет рассчитать поле течения при околозвуковых скоростях в рамках модели «узкого канала», т.к. при этом не выполняется допущение о постоянстве давления в поперечном сечении канала ($dp/dy=0$).

Из анализа результатов видно, что 3-й способ определения градиента давления является наиболее эффективным в диапазоне чисел Маха от 0,1 до 2,5 (за исключение околозвуковых скоростей). При дальнейшем росте скорости его эффективность снижается и для потоков с $M_x \geq 3$ целесообразно применение метода сканирования с учетом зависимости плотности от давления.

Выводы. На основании проведенных исследований можно сделать вывод, что универсальным способом определения градиента давления в рамках модели «узкого канала» при различных режимах течения (в широком диапазоне чисел Маха) является итерационный метод (метод сканирования – способ 1) при условии, что при расчете сверхзвуковых течений учитывается зависимость плотности от давления. Для расчета течения в канале при умеренных числах Маха определение градиента давления при помощи способа 3 является более рациональным по затратам машинного времени. Сильное влияние на величины газодинамических параметров, в том числе и на продольный градиент давления, оказывает используемая модель турбулентности. В дальнейшем предполагается численно исследовать влияние различных моделей турбулентности на газодинамические характеристики течения при наличии химической неоднородности и горения в рамках модели «узкого канала».

1. *Лалин Ю. В.* Внутренние течения газовых смесей / *Ю. В. Лалин, М. Х. Стрелец.* – М. : Наука, 1989. – 368 с.
2. *Андерсон Д.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Том 2 : пер. с англ. / *Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер.* – М. : Мир, 1990. – С. 393 – 728.
3. *Мещеряков Е. А.* Расчетное и экспериментальное исследование горения струи водорода в спутном сверхзвуковом потоке воздуха в канале / *Е. А. Мещеряков, В. М. Левин, В. А. Сабельников* // М. : Труды ЦАГИ. – 1983. – Вып. 2193. – 36 с.
4. *Козлов В. Е.* Численный метод расчета турбулентных струйных течений в каналах в приближении пограничного слоя / *В. Е. Козлов, В. А. Сабельников* // М. : Труды ЦАГИ. – 1979. – Вып. 1982. – 28 с.
5. *Симуни Л. М.* Численное решение задач закрученного движения вязкой жидкости в круглой трубе на основе упрощенных уравнений / *Л. М. Симуни, Л. А. Чудов* // Учен. зап. Перм. пед. ин-та. – 1976. – № 152. – С. 157 – 163.
6. *Тимошенко В. И.* Газовая динамика высокотемпературных технологических процессов / *В. И. Тимошенко.* – Днепропетровск : Институт технической механики НАНУ и НКАУ, 2003. – 460 с.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / *Г. Шлихтинг.* – М. : Наука, 1974. – 712 с.
8. Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах / *О. В. Гуськов, В. И. Копченков, И. И. Лунатов, В. Н. Острась, В. П. Старухин.* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 168 с.
9. Restatement of the Spalart-Allmaras eddy-viscosity model in strain-adaptive formulation / *T. Rung, F. Thiele, U. Bung, M. Schatz* // AIAA Journal. – 2003. – Vol. 4, № 7. – P. 1396 – 1399.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 05.06.12,
в окончательном варианте 12.07.12.