

К ВОЗМОЖНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНОГО ОПИСАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ОРБИТАЛЬНОГО МАЯТНИКА

На модели динамики орбитального маятника исследуется возможность вероятностного прогноза попадания траекторий в аттрактор. Поставлена задача вероятностного описания синхронизации движений. Показана возможность определить вероятности, которые не зависят от начальных условий, т.е. вероятности, которые характеризуют систему в целом. Поставлены задачи дальнейших исследований.

На моделі динаміки орбітального маятника досліджується можливість ймовірнісного прогнозу потрапляння траєкторій в аттрактор. Поставлена задача ймовірнісного описання синхронізації рухів. Показана можливість визначити ймовірності, які не залежать від початкових умов, тобто ймовірності, які характеризують систему в цілому. Поставлені задачі подальших досліджень.

The possibility of a probabilistic prediction of the trajectory entry into the attractor is studied using the dynamical model of an orbital pendulum. The task of a probabilistic description of the motion synchronization is set. The possibility to find probabilities which do not depend on initial conditions, that is, probabilities characterizing the system as a whole is shown. The tasks for further studies are set.

Классический подход к анализу динамических систем предполагает, что состояние системы в будущем однозначно определяется законом движения и состоянием системы в настоящий момент времени. При таком подходе проблема прогноза движения динамической системы сводится к поиску решений уравнений движения. А случайное движение систем связывается либо с большим числом степеней свободы, либо с наличием внешних случайных шумов. Однако исследования нелинейных процессов и открытие явления детерминированного (динамического) хаоса показали, что случайное (непредсказуемое) движение характерно и для довольно простых детерминированных систем [5, 6, 13].

Явление динамического хаоса характеризуется тем, что на больших интервалах времени движение детерминированных систем, при некоторых значениях их параметров, становится непредсказуемым. Причиной такого нерегулярного движения принято считать экспоненциальную неустойчивость, при которой изначально близкие траектории расходятся экспоненциально быстро [2, 7]. Отметим, что неустойчивость систем существенно ограничивает возможность прогноза их движения [10, 11, 12]. Действительно, в условиях неустойчивости иногда “совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которого мы не можем предусмотреть” [12]. Небольшая ошибка в начальных условиях растет со временем, что в условиях хаотических режимов движения приводит к невозможности долгосрочного прогноза, и детерминистическое описание теряет смысл [7]. Поэтому, как видится, одна из основных задач при изучении систем с хаотической динамикой – это разработка альтернативных методов, которые позволяли бы предсказывать её движение на длительных интервалах времени [9, 10].

Проблема прогнозируемости движения актуальна, в частности, и для диссипативных систем с хаотической динамикой. Наличие диссипации в системе с детерминированным хаосом, вообще говоря, не упрощает ее динамику. Возможность существования в фазовом пространстве странных и стохастических аттракторов, на которых движение системы имеет случайный характер, делает динамику более сложной и разнообразной. Также одним из интереснейших проявлений детерминированного хаоса в диссипативных системах

© А.В. Дудник, А.В. Пироженко, 2012

является явление случайной синхронизации. Суть его заключается в том, что при наличии в фазовом пространстве системы двух или более аттракторов невозможно предсказать, в каком из аттракторов окажется траектория системы, стартуя из некоторого начального условия (за исключением начальных условий, взятых на самих аттракторах). При этом сами аттракторы могут соответствовать регулярным движениям и не быть странными или стохастическими. Классические методы исследования нелинейных систем, используемые в механике [3, 8], при описании случайной синхронизации не работают. В связи с этим возник вопрос о возможности вероятностного описания явления случайной синхронизации.

Рассмотрим возможность вероятностного подхода к описанию случайной синхронизации на модели орбитального маятника с периодически изменяющейся длиной штанги. При этом диссипативные силы, действующие на маятник, будем моделировать как силы вязкого трения с внешней средой [1, 11]. Эта модель описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{L} = -\frac{3}{2}\omega_0^2 r^2 \sin 2\psi - \xi L, \\ \dot{\psi} = \frac{L}{r^2} - \omega_0, \\ \dot{\omega} = k, \end{cases} \quad (1)$$

где $r = 1 + z \cos \omega$, $z = \frac{b}{a}$, b , a – средняя длина штанги и амплитуда ее колебаний соответственно, ω – частота колебаний длинны штанги; ω_0 – угловая скорость орбитального движения; ψ – угол между местной вертикалью и штангой; L – приведенный кинетический момент; ξ – коэффициент вязкого трения со средой; ξ , a , b , k – постоянные.

Состояние системы (1) определяется набором величин L , ψ , r , \dot{r} , поэтому динамику системы можно изобразить как движение точки по траектории в 4-х мерном пространстве L , ψ , r , \dot{r} . Динамику рассматриваемой системы удобно представлять с помощью фазовых портретов. Для рассматриваемой системы фазовые портреты строились с помощью отображения Пуанкаре – пересечением фазового пространства плоскостью $r = 1 + z$, $\dot{r} = 0$. Траектории системы, в силу того что система (1) в общем случае неразрешима аналитически, строились численным интегрированием ее дифференциальных уравнений.

При значениях параметров $\xi = 0,0004 \text{ с}^{-1}$, $k = 0,02 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = 0,001 \text{ с}^{-1}$, $z = 0,8$ система имеет три аттрактора (рис. 1). Численные расчеты показывают, что для тех начальных условий, которые находятся достаточно далеко от аттракторов, небольшие изменения шага интегрирования или начальных условий приводят к тому, что траектории системы попадают в различные притягивающиеся множества. В этом смысле, в данной системе наблюдается явление случайной синхронизации. Более того, показано, что незначительное упрощение системы или малые изменение значений ее параметров приводят к существенным изменениям в ее динамике и к качественным изменениям

структуры фазового пространства [9, 11]. Такое поведение системы приводит к невозможности использовать для описания случайной синхронизации классические методы механики, которые основываются на исследовании упрощенных систем и построении приближенных решений [3, 8]. А высокоточный численный прогноз, в силу ограниченной точности модели, лишен физического смысла. Поэтому, как представляется, в данном случае спрогнозировать случайную синхронизацию возможно лишь вероятностно.

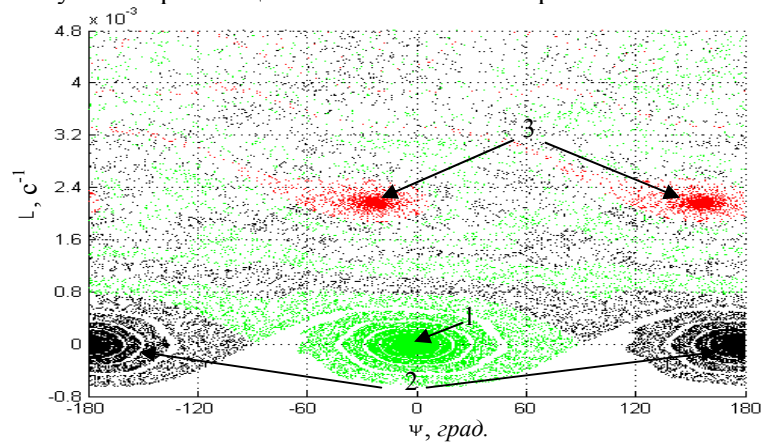


Рис. 1.

Рассмотрим возможность охарактеризовать случайную синхронизацию вероятностями попадания траекторий системы в аттракторы. Под вероятностью некоторого события понимается число, к которому стремится частота данного события при большом количестве испытаний [4]. Поэтому, чтобы говорить о возможности вероятностного описания случайной синхронизации, необходимо убедиться в корректности введения понятия вероятности в данном случае. В первую очередь, убедимся, что частоты попадания траекторий в аттракторы обладают свойством «устойчивости» [4]. Т.е. покажем, что частоты попадания траекторий в аттракторы стабилизируются при увеличении количества учитываемых начальных условий.

Исследуем стабилизацию частот в следующих случаях:

- фиксированного шага интегрирования и равномерно распределенных в некоторой области начальных условий;
- фиксированного начального условия и равномерно распределенного в некотором интервале шага интегрирования.
- равномерно распределенных в некоторой области начальных условий и шага интегрирования, равномерно распределенного в некотором интервале.

Траектории системы строятся численно, методом разложения в ряд Тейлора до шестого порядка. На рисунках 2 – 4 приведены зависимости $\nu(n)$ частот попадания системы в аттракторы от количества учитываемых начальных условий n в выше указанных случаях. Рисунок 2 – случай фиксированного шага интегрирования и начальных условий, равномерно распределенных в прямоугольной области $L \times \psi = [2,9 \text{ c}^{-1}; 3,1 \text{ c}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$; рисунок 3 – фиксированного начального условия $L_0 = 4$, $\psi_0 = 0^\circ$ и равномерно распределенного на промежутке $[0,17 \text{ c}; 0,18 \text{ c}]$ шага интегрирования; рисунок 4 – равномерно распределенного на промежутке $[0,17 \text{ c}; 0,18 \text{ c}]$ шага интегриро-

вания и начальных условий, распределенных в прямоугольной области $L \times \psi = [3,9 \text{ с}^{-1}; 4,1 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$.

Как видим, частоты попадания траекторий системы в каждый из аттракторов стабилизируются с увеличением количества учитываемых начальных условий, т.е. «устойчивость» частот [4] имеет место. Это позволяет нам говорить о возможности описания случайной синхронизации вероятностями попадания системы в аттрактор.

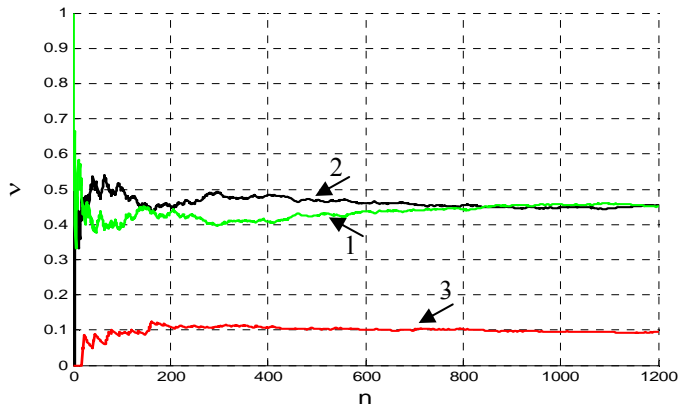


Рис. 2

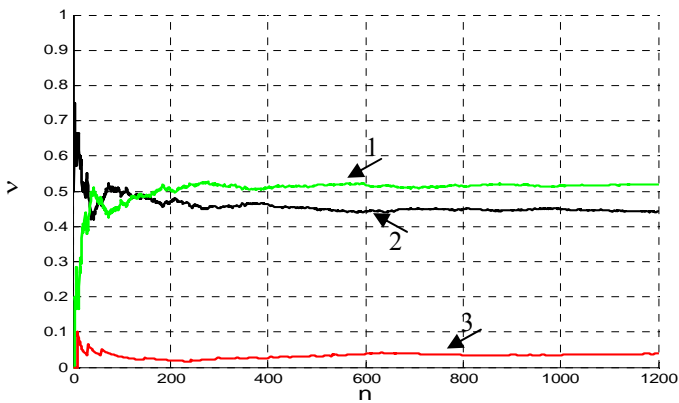


Рис. 3.

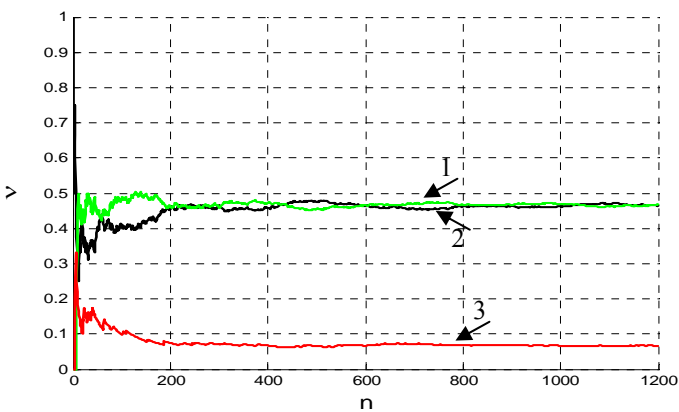


Рис. 4.

Далее исследуем зависимость вероятностей попадания системы в аттракторы от выбора начальных условий. Рассмотрим те же вышеуказанные случаи. В каждом случае определим оценки вероятностей (частоты) \hat{p}_1 , \hat{p}_2 , \hat{p}_3 попадания траекторий системы в первый, второй и третий аттракторы соответственно. Результаты некоторых расчетов приведены в таблицах 1 – 3. В таблице 1 результаты расчетов в случае фиксированного шага интегрирования и начальных условий, равномерно распределенных в прямоугольной области; в таблице 2 – фиксированного начального условия и шага интегрирования, равномерно распределенного в интервале $[0,17 \text{ с}; 0,18 \text{ с}]$; в таблице 3 – начальных условий, равномерно распределенных в прямоугольной области и шага интегрирования, равномерно распределенного в интервале $[0,17 \text{ с}; 0,18 \text{ с}]$.

Проверка статистической гипотезы о равенстве распределений показала, что в большинстве случаев отклонения полученных частот друг от друга являются существенными. Это, в свою очередь, говорит о том, что вероятности попадания траекторий в аттракторы в рассмотренных экспериментах различны и зависят от начальных условий. Такой результат показывает, что траектория, соответствующая некоторому начальному значению, имеет предпочтение оказаться в том или ином аттракторе.

Естественным является предположение о том, что для получения оценок вероятностей, которые относились бы не к отдельно взятому начальному условию, а к системе в целом, необходимо учесть начальные условия из достаточно большой области начальных условий.

Таблица 1

	Начальные условия в прямоугольнике $L \times \psi$			
	$[2,9 \text{ с}^{-1}; 3,1 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[4,9 \text{ с}^{-1}; 5,1 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[3,9 \text{ с}^{-1}; 4,1 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[8,9 \text{ с}^{-1}; 9,1 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$
\hat{p}_1	0,4617	0,4633	0,4525	0,4167
\hat{p}_2	0,4367	0,4683	0,4425	0,4192
\hat{p}_3	0,1016	0,0684	0,1050	0,1641

Таблица 2

	Начальные условия					
	$L_0=9 \text{ с}^{-1}; \psi=-65^\circ$	$L_0=9 \text{ с}^{-1}; \psi=165^\circ$	$L_0=9 \text{ с}^{-1}; \psi=120^\circ$	$L_0=4 \text{ с}^{-1}; \psi=0^\circ$	$L_0=5 \text{ с}^{-1}; \psi=-121^\circ$	$L_0=4 \text{ с}^{-1}; \psi=45^\circ$
\hat{p}_1	0,4092	0,4283	0,4300	0,4575	0,4267	0,4800
\hat{p}_2	0,4433	0,4067	0,4367	0,5117	0,4800	0,4858
\hat{p}_3	0,1475	0,1650	0,1333	0,0308	0,0933	0,0342

Таблица 3

	Начальные условия в прямоугольнике $L \times \psi$			
	$[8 \text{ с}^{-1}; 8,1 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[7,9 \text{ с}^{-1}; 8 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[2,9 \text{ с}^{-1}; 3 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[1 \text{ с}^{-1}; 1,1 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$
\hat{p}_1	0,4592	0,4408	0,5100	0,4608
\hat{p}_2	0,4583	0,4208	0,4075	0,4583
\hat{p}_3	0,0825	0,1384	0,0825	0,0809

Проведем расчеты оценок вероятностей попадания траекторий в аттракторы в случаях начальных условий, равномерно распределенных в тех областях, для которых траектории, выходящие из выбранной области, “полностью” заполняют фазовое пространство. Так, например, на рисунке 5 показан фазовый портрет 1200 траекторий с начальными условиями, равномерно распределенными в прямоугольной области $L \times \psi = [0,01 \text{ с}^{-1}; 1,01 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$ и шагом интегрирования, равномерно распределенном в интервале $[0,17 \text{ с}; 0,18 \text{ с}]$.

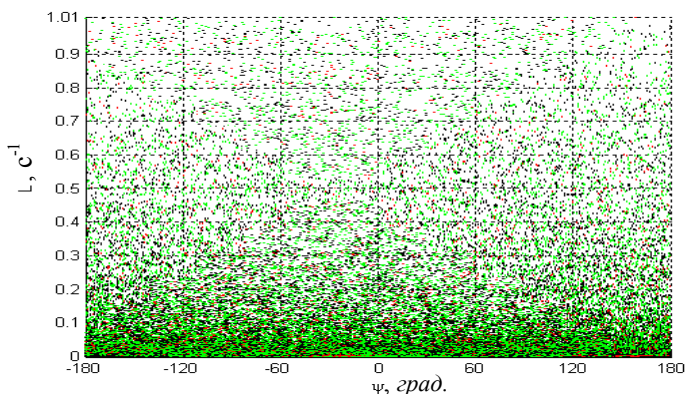


Рис. 5

В таблице 4 приведена часть полученных оценок частот. Видно, что отличия в оценках небольшие. Используем критерий χ^2 (критерий Пирсона) с уровнем значимости $\alpha = 0,05$ [4] для проверки предположения о том, что при выборе области начальных условий вышеуказанным способом ее положение в фазовом пространстве существенно не влияет на распределение вероятностей попадания траекторий в аттрактор. Для всех полученных оценок вероятностей показано, что при выбранном уровне значимости предположение можно считать верным. Следовательно, можно сделать вывод, что при определенном выборе начальных условий можно получать оценки вероятностей попадания траекторий в аттракторы, которые будут относиться к системе, а не к отдельно взятому начальному условию. Однако сам метод выбора начальных условий нуждается в дальнейшем обосновании.

Таким образом, проведенные предварительные исследования системы показывают возможность определить вероятности, которые не зависят от начальных условий, т.е. вероятности, которые характеризуют систему в целом. В этом смысле, статистический подход к описанию случайной синхронизации может быть применен для данной системы.

Таблица 4

	Начальные условия в прямоугольнике $L \times \psi$		
	$[8 \text{ с}^{-1}; 9 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[3 \text{ с}^{-1}; 4 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$	$[0,01 \text{ с}^{-1}; 1,01 \text{ с}^{-1}] \times [-180^\circ; 180^\circ]$
\hat{p}_1	0,4705	0,4588	0,4516
\hat{p}_2	0,4516	0,4655	0,4675
\hat{p}_3	0,0779	0,0757	0,0809

Движение системы полностью определяется дифференциальными уравнениями. Поэтому основной задачей исследований видится поиск связи между статистическими характеристиками системы и свойствами дифференциальных уравнений. В связи с этим возникает ряд нерешенных интересных вопросов. Среди них вопрос о связи значений параметров системы со структурой и количеством аттракторов и вопрос о влиянии значений параметров на притягивающую способность аттракторов. Также важным видится вопрос о формулировке критериев применимости вероятностного прогноза для описания движения нелинейных детерминированных систем. Решение вышеуказанных вопросов необходимы для разработки и обоснования метода вероятностного описания исследуемой и ей подобных систем.

1. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями / *А. П. Алпатов, В. В. Белецкий, В. И. Драновский и др.* – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2007. – 558 с.
2. *Анищенко В. С.* Детерминированный хаос / *В. С. Анищенко* // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – №6. – С. 70 – 76.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики / *В. И. Арнольд.* – М. : Наука, 1989. – 472 с.
4. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / *Е. С. Вентцель.* – М., 1969. – 576 с.
5. *Заславский Г. М.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса / *Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев.* – М. : Наука, 1988. – 368 с.
6. *Лоскутов А. Ю.* Динамический хаос. Системы классической механики / *А. Ю. Лоскутов* // УФН. – 2007. – Том 177, №9. – С. 989 – 1015.
7. *Лоскутов А. Ю.* Очарование хаоса / *А. Ю. Лоскутов* // УФН – 2010. – Том 180, №12. – С. 1305 – 1329.
8. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики / *Н. Н. Моисеев.* – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1969. – 379 с.
9. *Пироженко А. В.* Случайная синхронизация орбитального маятника / *А. В. Пироженко, А. В. Яцуц* // Устойчивость, управление и динамика твердого тела : XI Международная конференция, 8 – 12 июня, 2011 г., Донецк : тезисы докладов. – Донецк : Ин-т прикладной математики НАНУ, 2011. – С. 104.
10. *Пироженко А. В.* Об определении вероятности финитных движений детерминированных систем классической механики / *А. В. Пироженко, Е. В. Меньков, А. В. Яцуц* // Dynamical system modeling and stability investigation : XV International Conference, May 25 – 27, 2011, Kyiv, Ukraine : abstracts of conference reports. – Киев : КНУ им. Т. Г. Шевченка, 2011. – С. 116.
11. *Пироженко А. В.* Хаотические режимы движения в динамике космических тросовых систем. 3. Влияние диссипации энергии / *А. В. Пироженко* // Космічна наука і технологія. – 2001. – Том 7, №5/6. – С. 13 – 20.
12. *Пуанкаре А.* О науке : пер. с франц. / *А. Пуанкаре.* – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1983. – 560 с.
13. *Рюэль Д.* Случайность и хаос / *Д. Рюэль.* – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 192 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 11.07.12,
в окончательном варианте 19.09.12