

ДИНАМИКА РАСКРЫТИЯ УПРУГОГО ПАНТОГРАФНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО СТАБИЛИЗАТОРА

Объект исследования – нестабилизированный космический аппарат, в котором в качестве гравитационного стабилизатора и носителя солнечных батарей используется пантографная конструкция, развертываемая на орбите. Цель исследования – построение математической модели такой системы с учетом упругости элементов конструкции пантографа как в продольном, так и в поперечном направлении. С использованием пакета прикладных программ, написанного на языке Fortran, проведено численное моделирование поведения объекта в режиме раскрытия конструкции при разных значениях как параметров объекта, так и характера процесса в поле гравитационных сил Земли. Проведен анализ полученной информации и приведены графики, которые иллюстрируют поведение характерных переменных.

Об'єкт дослідження – нестабілізований космічний апарат, у якому як гравітаційний стабілізатор і носій сонячних батарей використовується пантографна конструкція, що розгортається на орбіті. Ціль дослідження – побудова математичної моделі такої системи з урахуванням пружності елементів конструкції пантографа як у поздовжньому, так і в поперечному напрямку. З використанням пакета прикладних програм, написаного мовою Fortran, проведено чисельне моделювання поведінки об'єкта в режимі розкриття конструкції при різних значеннях як параметрів об'єкта, так і характеру процесу в полі гравітаційних сил Землі. Проведено аналіз отриманої інформації та наведені графіки, які ілюструють поведінку характерних змінних.

The object of the study is an unstabilized spacecraft using the on-orbit deployment pantograph construction as a gravitational stabilizer and a holder of solar batteries. The objective of study is to derive a mathematical model of this system taking into account both longitudinal and transversal flexibility of the pantograph. The numerical simulation of behavior of the object under consideration in the mode of deployment of the structure at the different values of parameters of the object and the character of the process in the Earth's gravitational field is carried out using the Fortran-based package. Information obtained is analyzed and the graphs of the behavior of characteristic variables are examined.

В 60-е годы прошлого века под руководством и при непосредственном участии выдающегося ученого и конструктора, члена-корреспондента АН УССР Ковтуненко В. М. (31.08.1921 – 10.08.1995) был разработан космический аппарат (КА) радиотехнического наблюдения серии «Космос» («Космос-389» и др.). Характерной особенностью конструктивно-компоновочной схемы этого аппарата явилось использование полуориентируемой солнечной батареи и выдвижного гравитационного стабилизатора.

Начиная с 70-х годов прошлого столетия, был разработан другой КА серии «Космос» («Космос-1603» и др.), который в конструктивно-аппаратурном плане подобен аппарату «Космос-389», но имеет более высокие тактико-технические и эксплуатационные характеристики.

Эксплуатация КА типа «Космос-389» и «Космос-1603» позволила установить потенциальные возможности дальнейшего совершенствования комплексов радиотехнического наблюдения. В этой связи позднее проводилось проектирование в интересах Министерства обороны СССР КА нового поколения для проведения радиоэлектронного наблюдения.

На КА этого поколения роль гравитационного стабилизатора играет солнечная батарея, а носителем панелей этой батареи является пантографная конструкция.

Настоящая статья посвящена динамике такого космического аппарата.

Одним из перспективных и актуальных направлений механики является изучение динамики систем изменяемой конфигурации [1 – 6]. Современные космические аппараты имеют в своем составе разнообразные элементы конструкции, которые трансформируются на орбите (солнечные батареи (СБ), гравитационные стабилизаторы, антенны и др.). Такие механические системы доставляются на орбиту в компактном (транспортном) состоянии и в услови-

© А.Е. Закржевский, В.С. Хорошилов, 2011

ях орбитального полета разворачиваются и принимают свою рабочую конфигурацию. Есть большое количество исследований в литературе, посвященных разворачиванию упругих элементов как с неподвижного основания, так и с вращающегося КА [1 – 6], включая разворачивание гравитационного стабилизатора [7, 8]. В этих работах были оценены максимальные изгибающие моменты и отклонения стержней при различных упрощающих предположениях, а также оптимальное время разворачивания. В работе [9] Cherchas исследует динамику КА, стабилизированного вращением, в процессе разворачивания длинного гибкого стержня. Он определил максимальные углы нутации и прецессии после разворачивания и максимальные изгибающие моменты и отклонения стержня. Уравнения движения были получены методом Лагранжа, и упругие степени свободы были дискретизированы на основе модального анализа. В [10 – 12] динамика разворачиваемых упругих элементов также описана в терминах модального анализа с формами собственных колебаний, зависящими от времени.

В несколько ином подходе к рассматриваемой задаче Vanerjee и Kane в [6] представили новую методику для описания динамики балки, которая разворачивается из или втягивается в твердое вращающееся тело. Суть метода состояла в моделировании балки как цепочки упруго соединенных твердых тел. Метод работал с уравнениями движения, линеаризованными в модальных координатах для элементов балки, расположенных вне несущего тела. В [13, 14] анализ был расширен для случая больших отклонений с формулировкой порядка n для переменного числа тел. Результаты моделирования показали, что отклонения конца балки были очень чувствительны к скорости разворачивания/сворачивания и что процесс втягивания менее устойчив, чем процесс разворачивания. Было показано, что значение угловой скорости несущего тела существенно влияет на поведение балки.

Разворачивание описанных элементов вносит значительные возмущения в динамику движения КА вокруг его центра масс. Описать эти возмущения простыми математическими моделями в рамках динамики систем тел невозможно. Работа [15] демонстрирует построение общей математической модели КА в процессе разворачивания жесткого гравитационного стабилизатора по заданной программе. Динамика космического аппарата при разворачивании упругого гравитационного стабилизатора изучена в [16]. В работе [17] была изучена динамика космического аппарата, с которого разворачивается упругий пантограф, но поперечные смещения оси пантографа не учитывались.

На данный момент исследование таких трансформируемых систем актуально с точки зрения минимизации времени разворачивания, проблемы минимизации энергоресурсов, изучения взаимного влияния механических систем изменяемой конфигурации на движение и ориентацию самого КА. Постоянно актуальной является проблема снижения массы таких систем. При этом элементы таких систем приходится рассматривать как упругие тела.

Механическая модель. Объект исследования – КА, несущий разворачиваемую на орбите пантографную конструкцию, которая состоит из двух параллельных, соединенных между собою плоских систем стержней. Механическая модель такого КА может быть представлена в виде твердого несущего тела, на котором установлена конструкция, и самой конструкции изменяемой конфигурации. Изменение ее конфигурации происходит за счет синхронного

принудительного сближения точек $H_0^{(R)}, F_0^{(R)}$ и $H_0^{(L)}, F_0^{(L)}$, в которых она соединяется с механизмом разворачивания, установленным на несущем теле.

Для случая разворачивания такой упругой конструкции на орбите ее обобщенная механическая модель может быть представлена как главное твердое тело S_1 и тело S_2 переменной конфигурации, присоединенное к нему (рис. 1).

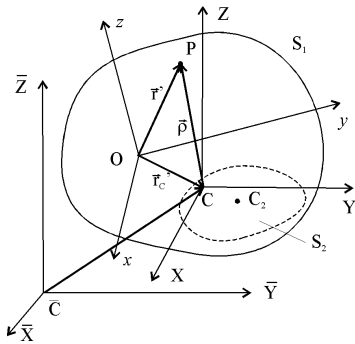


Рис. 1

Здесь, $\overline{CX\bar{Y}\bar{Z}}$ – связанная с Землей инерциальная система координат с осью $\overline{C\bar{Y}}$ вдоль оси вращения Земли, ось $\overline{C\bar{Z}}$ направлена в точку весеннего равноденствия, ось $\overline{C\bar{X}}$ дополняет ортогональную триаду. $Oxyz$ – связанная с главным телом система координат с началом в центре основания пантографа O , с осью Oz вдоль направления оси гравитационного стабилизатора.

Тело S_1 – гиростатическая часть системы. Тело S_2 – разворачиваемая часть системы с центром масс в точке C_2 . Оно не включает гиростатических компонентов. Движение тела S_1 определяется вектором скорости \bar{v}_{C_1} точки C_1 и вектором абсолютной угловой скорости тела S_1 .

При постановке задачи могут быть полезными две системы отсчета (рис. 2). Система C_1xyz , как и выше, является системой отсчета, связанной с гиростатической частью КА. Система $Cx^{or}y^{or}z^{or}$ связана с центром масс всего КА. Эта система координат определяется традиционным способом [18] с осью Cx^{or} вдоль вектора скорости КА, осью Cy^{or} вдоль бинормали орбиты, и осью Cz^{or} вдоль местной вертикали.

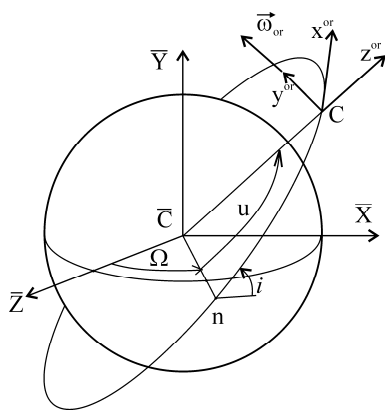


Рис. 2

На рис. 2 Ω – долгота восходящего узла от точки весеннего равноденствия, i – наклон орбиты, u – аргумент долготы и $\bar{\omega}^{or}$ – вектор орбитальной угловой скорости.

Пренебрегая прецессией орбиты, можно считать, что абсолютная угловая скорость орбитального базиса равна $\bar{\omega}^{or}$. Для каждого пантографа упругие стержни длиной $2a$ и массой $2m_a(i)$, где i – номер яруса, образуемого полным ромбом, соединены в шарнирах

$E_{(i)}^{(R)}, E_{(i)}^{(L)}, (i = \overline{0, N})$, где N – количество ярусов, и в точках $H_{(i)}^{(R)}, H_{(i)}^{(L)}, F_{(i)}^{(R)}, F_{(i)}^{(L)}, (i = \overline{1, N})$, где верхний индекс идентифицирует пантограф в соответствии с рис. 3, а нижний i указывает на номер яруса соответствующего пантографа. Эти два пантографа обозначим L и R соответственно. Таким образом, каждый пантограф состоит из нулевого полуромба и последующих N ромбов со сторонами длиной a . Пантографы также соеди-

нены между собою в точках $H_{(i)}^{(R)}$, $H_{(i)}^{(L)}$ и $F_{(i)}^{(R)}$, $F_{(i)}^{(L)}$, ($i = \overline{1, N}$) жесткими стержнями длиной b и массой m_b , на которые монтируются солнечные батареи. Стержни длиной $H_{(i)}^{(R)} H_{(i)}^{(L)} = F_{(i)}^{(R)} F_{(i)}^{(L)} = b$, ($i = \overline{1, N}$) будем рассматривать как третью систему, обозначаемую в дальнейшем индексом M .

Нижние точки первых ярусов (точки $H_{(0)}^{(R)}$, $H_{(0)}^{(L)}$, $F_{(0)}^{(R)}$, $F_{(0)}^{(L)}$) закреплены на главном отсеке космического аппарата (КА). В начальном положении пантографная система сложена, то есть расстояния между точками $E_{(i)}^{(L)}$, $E_{(i-1)}^{(L)}$, а также $E_{(i)}^{(R)}$, $E_{(i-1)}^{(R)}$, ($i = \overline{1, N}$) минимальны (транспортное состояние). При этом углы, которые составляют стержни нулевого и всех остальных ярусов с осью Ox , равны 5° и пантограф симметричен относительно оси Oz . При полном раскрытии конструкции проектные значения указанных углов составляют 75° . Здесь $Oxyz$ – базис, связанный с несущим телом с началом в точке O , расположенный в плоскости $H_{(0)}^{(R)} H_{(0)}^{(L)} F_{(0)}^{(R)} F_{(0)}^{(L)}$ на пересечении диагоналей данного прямоугольника. Оси $O^{(R)}x_1$, Ox , $O^{(L)}x_2$ и $O^{(R)}z_1$, Oz , $O^{(L)}z_2$ параллельны.

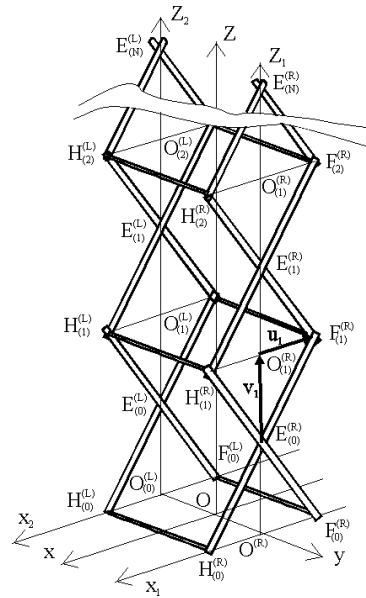


Рис. 3

Под несущим телом понимаем неизменяемую часть космического аппарата, а под несомыми телами – стержни, которые составляют пантографную конструкцию. Положение точек стержней относительно инерциальной системы координат \overrightarrow{CXYZ} будем определять радиусом-вектором \vec{r}_i , а относительно системы $Oxyz$ – радиусом-вектором \vec{r}'_i . В отличие от задач динамики относительного движения носимых тел, описанных Лурье [19], здесь рассматривается более общий случай. Выражение для \vec{r}' зависит от времени t явно, а не только через обобщенные координаты:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_i(q_1, \dots, q_N, t). \quad (1)$$

Упругость стержней длиной $2a$ учитывается введением коэффициента эквивалентной жесткости в фиктивных шарнирах $E_{(i)}^{(R)}$, $E_{(i)}^{(L)}$, ($i = \overline{0, N}$). Для определения коэффициента эквивалентной жесткости сравним прогибы однородной балки постоянного сечения на двух опорах, нагруженной перпендикулярной силой посередине [20] и балки, составленной из двух жестких стержней, соединенных упругим шарниром, с таким же нагружением (рис. 4) и изгибной жесткостью. Такая замена полностью оправдана, поскольку конфигурация всей пантографной конструкции определяется взаимным положением средней и крайних точек всех стержней. Прогиб упругой балки в таком случае равен $Pa^3/(6EJ)$. Такой же прогиб эквивалентной конструкции (на

рис. 4 внизу) получается, когда упругость шарнирного соединения c_j по середине пролета C_i равна $3EJ/(2a)$.

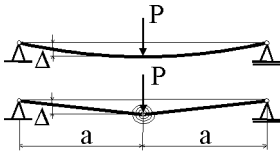


Рис. 4.

Для адекватного моделирования раскрытия конструкции нужно учесть демпфирование в материале стержней, а также кулоново трение и пластические моменты от изгиба медных кабелей в периферических шарнирах. Кабели проложены от солнечных батарей и по мере уменьшения номера яруса сечение

их увеличивается, равно как и момент, необходимый для их изгиба.

Ввиду того, что медь практически не обладает упругими свойствами и изгибание кабелей при раскрытии конструкции требует прикладывания момента, который остается постоянным по величине, в дальнейшем будем учитывать эти моменты в периферических шарнирах в рамках той же модели, что и кулоново трение.

Для учета конструкционного демпфирования будем рассматривать эквивалентную балку как систему с диссипативным шарниром. Если считать, что исходная балка (вверху на рис. 4) при свободных колебаниях обладает коэффициентом потерь $\gamma \approx 0.01$ [21], то амплитуда первой формы колебаний меняется во времени по закону $A = A_0 e^{-\gamma/2 p_1 t}$, где при малых значениях γ $p_1 \approx 1.875^2 / (4a^2) \sqrt{EJa/m}$. Легко показать, что уравнение движения свободной эквивалентной балки с центральным шарниром, в котором действует диссипативный момент вида $4R_v \dot{\varphi}$, можно записать в виде

$$\ddot{\varphi} - 6R_v / (ma^2) \dot{\varphi} + 6c_j / (ma^2) \varphi = 0.$$

Здесь m – масса половины балки, φ – угол отклонения эквивалентной балки от горизонтали на опоре. Теперь можно записать

$$R_v = \gamma 0.1464 \sqrt{EJa/m}.$$

Чтобы построить обобщенные силы, соответствующие кулонову трению в шарнирах, расположенных в точках $H_{(i)}^{(R)}$, $H_{(i)}^{(L)}$ и $F_{(i)}^{(R)}$, $F_{(i)}^{(L)}$, рассмотрим соответствующие моменты в этих шарнирах как внешние и запишем их элементарную работу на виртуальных перемещениях. Очевидно, что в пределах одного яруса с номером i $\delta A_i = -4M_i \text{Sign}(\dot{\alpha}_i - \dot{\beta}_i)(\delta\alpha_i - \delta\beta_i)$. Следовательно, можно записать обобщенные силы, учитывающие кулоново трение в шарнирах, в виде

$$QCx_i = M_i \frac{\partial(\alpha_i - \beta_i)}{\partial x_i} \text{Sign}(\dot{\alpha}_i - \dot{\beta}_i) + M_{i+1} \frac{\partial(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1})}{\partial x_i} \text{Sign}(\dot{\alpha}_{i+1} - \dot{\beta}_{i+1}),$$

$$QCz_i = M_i \frac{\partial(\alpha_i - \beta_i)}{\partial z_i} \text{Sign}(\dot{\alpha}_i - \dot{\beta}_i) + M_{i+1} \frac{\partial(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1})}{\partial z_i} \text{Sign}(\dot{\alpha}_{i+1} - \dot{\beta}_{i+1}).$$

Для обобщенных координат, соответствующих последнему ярусу, последние слагаемые в этих выражениях опускаются.

Математическая модель системы. Для построения математической модели используем формализм построения уравнений Лагранжа второго рода [19]. Если в качестве полюса выбрать мгновенное положение центра масс

системы C , уравнения движения несущего тела вокруг центра масс и уравнения относительного движения носимых тел примут наиболее компактный вид:

$$\Theta^C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \Theta^C \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \left(\Theta^C \cdot \vec{\omega} \right) + \vec{K}_r^C + \vec{\omega} \times \vec{K}_r^C = \vec{m}^C, \quad (2)$$

$$E_s(T_r^O) - M \vec{r}_c^{**} \cdot \frac{\partial \vec{r}_c'}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \Theta^C}{\partial q_s} \cdot \vec{\omega} + \dot{\vec{\omega}} \cdot \frac{\partial \vec{K}_r^C}{\partial \dot{q}_s} + \vec{\omega} \cdot E_s^*(\vec{K}_r^C) = Q_s. \quad (3)$$

Здесь Θ^C – тензор инерции системы в ее центре инерции q , \vec{K}_r^C – относительный кинетический момент разворачиваемой части относительно точки q , $\vec{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости несущего тела, \vec{m}^C – главный момент внешних сил относительно центра инерции, $E_j(\cdot) = \frac{d}{dt} \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j}$ – оператор Эйлера, $E_j^*(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j}$ – также оператор Эйлера, но дифференцирование по времени проводится здесь в связанном базисе, T_r^O – кинетическая энергия относительного движения системы, q_s – обобщенные координаты, Q_s – обобщенные силы, f^{\square} обозначает абсолютную производную по времени, а f^* – производная по времени в системе координат, неизменно связанной с несущим телом. Здесь нужно заметить, что хотя кинетическая энергия относительного движения – скаляр, для ее правильного вычисления необходимо указывать полюс, выбранный для определения относительных скоростей точек носимых тел.

Здесь важно отметить также, что член $E_s^*(\vec{K}_r^C)$ не приводится к $-2 \frac{\partial \vec{K}_r^C}{\partial q_s}$, как это показано в [19], так как случай, который рассматривается здесь, является более общим случаем нестационарных связей (см. выражение (1)).

Далее для построения уравнений движения необходимо выбрать подходящие обобщенные координаты q_s и найти значения выражений $\vec{r}_c'(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$, $\Theta^O(q_1, q_2, \dots, q_N)$, $T_r^O(q_1, q_2, \dots, q_N)$, $\vec{K}_r^O(q_1, q_2, \dots, q_N)$, $\vec{Q}_s(q_1, q_2, \dots, q_N)$ и всех их производных по времени и обобщенным координатам, которые входят в выражения для коэффициентов уравнений (2), (3).

Выбор обобщенных координат играет чрезвычайно важную роль при исследованиях динамики сложных механических систем. Удачный выбор разрешает записать уравнения движения в компактной и прозрачной форме и проводить эффективное интегрирование. И наоборот, нерациональный выбор приводит к слишком громоздким выражениям для коэффициентов уравнений движения, которые обуславливают неэффективное интегрирование (большое время интегрирования, потребность в значительных объемах оперативной памяти, накопление погрешностей при вычислениях, «жесткость» системы).

После детального анализа в качестве обобщенных координат были выбраны значения координат x_i, z_i ($i = \overline{1, N}$) верхних точек ярусов E_i , лежащих на оси Oz на прямых, соединяющих точки $E_{(i)}^{(L)}, E_{(i)}^{(R)}$. При этом $b(t) = H_0 O = OF_0$ является известной функцией времени, которая задает закон раскрытия или свертывания пантографной конструкции.

Используя рис. 5, несложно показать, что проекция радиуса-вектора центра масс пантографа MS_1 на ось Oz

$$\bar{r}_O'(i) = \{x(-1 + i) + x(i)\}/2, 0, \{z(-1 + i) + z(i)\}/2\}. \quad (4)$$

В результате для всей пантографной конструкции

$$\bar{r}_O' = (\{a_x, a_y, a_z\} m_{KA} + \{0, 0, \tilde{z}_0\} (m_0 + m_1) + \sum_{i=1}^N \{x_i, 0, z_i\} \tilde{m}_i) / M. \quad (5)$$

Здесь $\{a_x, a_y, a_z\}$ – радиус-вектор центра масс несущего тела в связанном базисе, m_{KA} – масса несущего тела, m_i ($i = \overline{0, N}$) – массы i -го яруса, $\{x_i, 0, z_i\}$ – радиус-векторы точек E_i , $\tilde{m}_i = (m_i + m_{i+1})/2$, $\tilde{m}_N = m_N/2$, $\tilde{z}_0 = z_0 k_0$, k_0 – коэффициент, определяющий положение центра масс нулевого яруса на оси Oz .

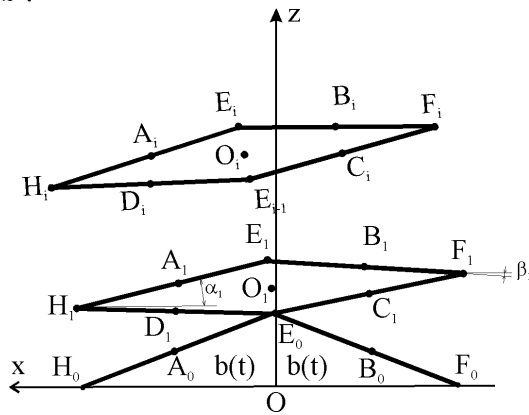


Рис. 5

Тензор инерции всей пантографной конструкции можно записать в виде суммы собственных тензоров инерции стержней конструкции в осях, параллельных осям связанного базиса с началом в центре масс соответствующего стержня, и тензора инерции всех точечных масс, расположенных в центрах масс стержней и равных массам этих стержней. Для i -го яруса это дает следующие выражения:

$$\Theta_{1,1,i}^O = 2 J_i^M + (a^2 m_i \sin^2 \alpha_i) / 3 + (a^2 m_i \sin^2 \beta_i) / 3 + (m_i^M dz_i^2) / 2 +$$

$$\begin{aligned}
& (2 m_i^M dx_i^2 u_i^2) / L_i^2 - 2 m_i^M dz_i z_i + 2 m_i^M z_i^2 + m_i (5 dz_i^2 / 2 + 2 dx_i^2 u_i^2 / e L_1^2 - \\
& \quad 8 dz_i z_i + 8 (bb^2 + z_i^2)), \\
\Theta_{1,3,i}^O &= (a^2 m_i (\sin(2\alpha_i) + \sin(2\beta_i))) / 6 + m_i^M (x_i (dz_i - 2 z_i) + dx_i (dz_i (-0.5 + \\
& \quad 2 u_i^2 / L_i^2) + z_i)) + m_i (4 x_i (dz_i - 2 z_i) + dx_i (dz_i (-2.5 + 2 u_i^2 / L_i^2) + 4 z_i)), \\
\Theta_{2,2,i}^O &= (16 J_i L_i^2 + m_i^M (dx_i^2 (L_i^2 + 4 u_i^2) + dz_i^2 (L_i^2 + 4 u_i^2) - 4 dx_i L_i^2 x_i - \\
& \quad 4 dz_i L_i^2 z_i + 4 L_i^2 (x_i^2 + z_i^2))) + m_i (dx_i^2 (5 L_i^2 + 4 u_i^2) + dz_i^2 (5 L_i^2 + 4 u_i^2) - \\
& \quad 16 dx_i L_i^2 x_i - 16 dz_i L_i^2 z_i + 16 L_i^2 (x_i^2 + z_i^2)) / (2 L_i^2), \\
\Theta_{3,3,i}^O &= 2 J_i^M + (a^2 m_i \cos^2 \alpha_i) / 3 + a^2 m_i \cos^2 \beta_i / 3 + m_i^M dx_i^2 / 2 + 2 m_i^M dz_i^2 u_i^2 / L_i^2 - \\
& \quad 2 m_i^M dx_i x_i + 2 m_i^M z_i^2 + m_i (5 dx_i^2 / 2 + 2 dz_i^2 u_i^2 / L_i^2 - 8 dx_i x_i + 8 (bb^2 + x_i^2)), \\
\Theta_{1,1,0}^O &= 2 J_0^M + 4 m_0 bb^2 - m_0 b^2 + m_0 a^2 + 2 m_0^M z_0^2 + m_0 a^2 \sin^2 \alpha_0 / 6 + m_0 a^2 \sin^2 \beta_0 / 6, \\
\Theta_{1,3,0}^O &= (m_0 a^2 (\sin(2\alpha_0) + \sin(2\beta_0))) / 12, \\
\Theta_{2,2,0}^O &= 4 J_0 + 2 m_0^M b^2 + m_0 a^2 + 2 m_0^M z_0^2, \\
\Theta_{3,3,0}^O &= (m_0 + 2 m_0^M) b^2 + (12 J_0^M + 24 m_0 bb^2 + m_0 a^2 \cos^2 \alpha_0 + m_0 a^2 \cos^2 \beta_0) / 6, \quad (6)
\end{aligned}$$

где $\Theta_{k,j,i}^O$ – компонента тензора инерции i -го яруса, m_i – масса одного стержня в ромбах, m_i^M – масса одного соединительного стержня, J_i – собственный момент инерции стержня относительно его главной центральной оси, параллельной оси Oy , J_i^M – собственный момент инерции соединительного стержня относительно его главной центральной оси, параллельной оси Ox , $dx_i = x_i - x_{i-1}$, $dz_i = z_i - z_{i-1}$, u_i – длина отрезка $H_i O_i$, L_i – длина отрезка $E_i E_{i-1}$, углы наклона стержней к оси Ox α_i и β_i показаны на рис. 5 для первого яруса, где величина α_1 положительна, а β_1 – отрицательна, индекс i показывает, что данная величина относится к i -му ярусу, а для обобщенных координат – их номер.

Выражение для кинетической энергии относительного движения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
Tr_i^O &= (128 J_i (\alpha_i + \beta_i) L_i^6 u_i^2 + m_i^M (16 a^2 dx_i^2 dxz \mathbf{1}t_i^2 + 16 a^2 dxz \mathbf{1}t_i^2 dz_i^2 - \\
& \quad 64 a^2 dx_i dx \mathbf{1}t_i dxz \mathbf{1}t_i L_i^2 u_i^2 - 64 a^2 dxz \mathbf{1}t_i dz_i dz \mathbf{1}t_i L_i^2 u_i^2 + \\
& \quad 16 L_i^4 u_i^2 (4 a^2 dx \mathbf{1}t_i^2 + 4 a^2 dz \mathbf{1}t_i^2 - 4 dx \mathbf{1}t_i L_i^2 x \mathbf{1}t_i - 4 dz \mathbf{1}t_i L_i^2 z \mathbf{1}t_i + \\
& \quad 4 L_i^2 (x \mathbf{1}t_i^2 + z \mathbf{1}t_i^2))) + m_i (16 a^2 dx_i^2 dxz \mathbf{1}t_i^2 + 16 a^2 dxz \mathbf{1}t_i^2 dz_i^2 - \\
& \quad 64 a^2 dx_i dx \mathbf{1}t_i dxz \mathbf{1}t_i L_i^2 u_i^2 - 64 a^2 dxz \mathbf{1}t_i dz_i dz \mathbf{1}t_i L_i^2 u_i^2 + \\
& \quad 16 L_i^4 u_i^2 (dx \mathbf{1}t_i^2 (5 L_i^2 + 4 u_i^2) + dz \mathbf{1}t_i^2 (5 L_i^2 + 4 u_i^2) - 16 dx \mathbf{1}t_i L_i^2 x \mathbf{1}t_i - \\
& \quad 16 dz \mathbf{1}t_i L_i^2 z \mathbf{1}t_i + 16 L_i^2 (x \mathbf{1}t_i^2 + z \mathbf{1}t_i^2))) / (64 L_i^6 u_i^2). \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь дополнительно использованы следующие обозначения: Tr_i^O – кинетическая энергия относительного движения i -го яруса при вычислении относительных скоростей в связанном базисе, $x \mathbf{1}t_i = \partial x_i / \partial t$, $z \mathbf{1}t_i = \partial z_i / \partial t$, $dx \mathbf{1}t_i = \partial(dx_i) / \partial t$, $dz \mathbf{1}t_i = \partial(dz_i) / \partial t$, $dxz \mathbf{1}t_i = 2(dx_i dx \mathbf{1}t_i + dz_i dz \mathbf{1}t_i)$.

Чтобы применить оператор Эйлера к такому выражению, нужно подставить в (7) все использованные обозначения и применять оператор по конкретной обобщенной координате, принимая во внимание тот факт, что обобщенные координата и скорость с индексом i входят в полное выражение для Tr^O на ярусах i и $i-1$ (кроме случая $i=1$ для первого яруса, поскольку движение элементов нулевого яруса определяется не обобщенными координатами, а явно зависит от времени).

Выражение для проекции кинетического момента элементов i -го яруса на ось Oy было приведено к следующему виду:

$$\begin{aligned}
Kr_i^O = & (8 J_i (dx \mathbf{1}t_i dz_i - dx_i dz \mathbf{1}t_i)) / L_i^2 + (m_i (x \mathbf{1}t_i (-dz_i^3 + (-4 a^2 + 4 dx_i^2 + \\
& 3 dz_i^2) z_{i-1} + 4 (a^2 + dx_i^2 - 5 dz_i^2) zi) + x \mathbf{1}t_{i-1} (dz_i^3 + (4 a^2 + 4 dx_i^2 + \\
& 5 dz_i^2) z_{i-1} + (-4 a^2 + 4 dx_i^2 + 3 dz_i^2) zi) - (dx_i^3 + (4a^2 + 5dx_i^2 + 4 dz_i^2) x_{i-1} + \\
& (-4 a^2 + 3 dx_i^2 + 4 dz_i^2) x_i) z \mathbf{1}t_{i-1} + (dx_i^3 + (4 a^2 - 3 dx_i^2 - 4 dz_i^2) x_{i-1} - \\
& (4 a^2 + 5 dx_i^2 + 4 dz_i^2) x_i) z \mathbf{1}t_i)) / (2 L_i^2) + (m_i^M (x \mathbf{1}t_i (-dz_i^3 + (-4 a^2 + dx_i^2 + \\
& L_i^2) z_{i-1} + (4 a^2 - dx_i^2 + L_i^2) z_i) + x \mathbf{1}t_{i-1} (dz_i^3 + (4 a^2 - dx_i^2 + L_i^2) z_{i-1} + \\
& (-4 a^2 + dx_i^2 + L_i^2) z_i) - (dx_i^3 + (4 a^2 - dz_i^2 + L_i^2) x_{i-1} + (-4 a^2 + dz_i^2 + L_i^2) \times \\
& x_i) z \mathbf{1}t_{i-1} + (dx_i^3 + (4a^2 - dz_i^2 - L_i^2) x_{i-1} + (-4 a^2 + dz_i^2 - L_i^2) x_i) z \mathbf{1}t_i)) / (2 L_i^2) \quad (8)
\end{aligned}$$

Его две остальные компоненты в рассматриваемой задаче равны нулю, поскольку все относительные движения происходят в плоскостях, параллельных плоскости Oxz .

Для определения коэффициентов уравнений движения (2), (3) полученные выражения и все необходимые производные от них должны быть преобразованы в систему координат, связанную с мгновенным положением центра масс, оси которой параллельны одноименным осям связанного базиса.

В соответствии с [19] можно записать

$$\begin{aligned}
\Theta^C &= \Theta^O - M \cdot (E r_c' - r_c' r_c'), \quad \bar{K}_r^C = \bar{K}_r^O - M \cdot r_c' \times \bar{r}_c', \\
\Theta^C &= \Theta^O - M (2E \bar{r}_c' \bar{r}_c' - \bar{r}_c' \bar{r}' - \bar{r}' \bar{r}_c'), \quad \frac{\partial \Theta^C}{\partial q_s} = \frac{\partial \Theta^O}{\partial q_s} - 2ME \bar{r}_c' \cdot \frac{\partial \bar{r}_c'}{\partial q_s} + 2M \bar{r}_c' \cdot \frac{\partial \bar{r}'}{\partial q_s}, \\
\bar{K}_r^C &= \bar{K}_r^O - M \bar{r}_c' \times \bar{r}_c'', \quad (9)
\end{aligned}$$

В этих выражениях M – масса всей системы; E – единичная матрица, выражения $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ обозначают скалярное и векторное произведения векторов соответственно; выражение $\vec{a} \vec{b}$ обозначает диадное произведение.

Подставив полученные выражения в уравнения (2), (3) и дополнив их подходящими кинематическими уравнениями, мы можем сформулировать задачу Коши для изучения поведения рассматриваемого объекта в процессе разворачивания пантографной конструкции. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, выберем в качестве параметров ориентации, определяющих взаимное угловое положение связанного и орбитального базисов, параметры Родрига – Гамильтона. Подробности можно увидеть в работе [22], где обсуж-

дается также возможность взаимного перехода между кватернионами и традиционными углами Крылова.

Численное моделирование. Для численного интегрирования система записывается в неявной форме

$$\sum_{j=1}^{N_{eq}} A_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_{N_{eq}}, t) \dot{y}_j = B_i(y_1, y_2, \dots, y_{N_{eq}}, t) \quad (i = \overline{1, N_{eq}}). \quad (10)$$

В данном случае $y_i = \omega_i$ ($i = 1, 2, 3$). Если задача записывается в кватернионах, то y_i ($i = \overline{4, 7}$) определяют элементы кватерниона. Если же задача записывается в углах Крылова, то эти же величины определяют углы (при этом $y_7 \equiv 0$). Остальными неизвестными являются обобщенные координаты и их первые производные по времени, то есть $y_{4+4i} = x_i$, $y_{5+4i} = \dot{x}_i$, $y_{6+4i} = z_i$, $y_{7+4i} = \dot{z}_i$ ($i = \overline{1, N}$). Таким образом, общее количество переменных интегрирования $N_{eq} = 7 + 4N$. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений в рамках задачи Коши разработан оригинальный пакет прикладных программ. Большинство операторов программы получено в форме Fortran-выражений в среде Mathematica 5[©] в результате выполнения ряда пакетов, написанных специально для исследуемой системы, и после проведения серии замен полученных громоздких выражений достаточно простыми переменными.

Рассматривалась пантографная конструкция из 5, 10 и 20 ярусов. Шаг интегрирования задачи Коши был подобран из условия устойчивости вычислительного процесса на рассматриваемом интервале времени. В данном случае его величина менялась в интервале 0,01 – 0,001. Рассматривался режим раскрытия. Его продолжительность составляла 100 – 400 сек. Величина изгибной жесткости стержней EJ принималась в диапазоне 200 – 500 Нм². При исследовании динамических процессов, связанных с трансформированием пантографной конструкции, в качестве начального состояния КА выбрано его положение после начального успокоения, при котором оси связанного базиса параллельны одноименным осям орбитального базиса, а начальные значения компонент вектора угловой скорости КА в орбитальном базисе не превышают 0,01 град/с. В этом случае нельзя считать, что продольная ось конструкции остается прямолинейной, поскольку при разворачивании конструкции, переносное движение которой является вращательным, на ее точки действуют силы Кориолиса, способные деформировать упругую конструкцию в поперечном направлении. В то же время в направлении бинормали орбиты поперечные силы отсутствуют, следовательно, перемещения точек конструкции в направлении оси Oy можно пренебречь.

В процессе моделирования динамики раскрытия пантографа была проведена серия вычислений при разных значениях параметров системы. Исследовалось изменение ориентации несущего тела КА под действием раскрытия пантографной конструкции, а также динамика изменения формы самой пантографной конструкции в зависимости от принятых параметров.

На рис. 6 показано поведение обобщенных координат z_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) при раскрытии конструкции, имеющей изгибную жесткость стержней 20 Нм², в течение 100 с. Здесь видно, что все эти координаты, геометрический смысл которых – z-компонента радиус-вектора точек E_i , возрастают в процес-

се развертывания, имеют колебательные составляющие, вызванные возбуждением упругих колебаний стержней конструкции. При этом амплитуды этих колебаний возрастают с возрастанием номера обобщенной координаты. Это объясняется тем фактом, что для всех ярусов возмущения от нижележащих ярусов суммируются. В рассмотренном случае максимальная амплитуда колебаний z_5 (т. е. полной длины конструкции) составляет 0,25 м. Здесь мы не учитываем возможное конструкционное демпфирование и другие диссипативные факторы, следовательно, в такой постановке мы исследуем максимально возможные возмущения конструкции.

На рис. 7 показано поведение обобщенных координат x_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), которые определяют отклонение средних шарниров пантографа от плоскости Oyz . Здесь видно, что по мере развертывания конструкция вначале отклоняется в сторону, обратную движению КА, а затем по мере приближения к концу развертывания колебания становятся симметричными относительно нуля.

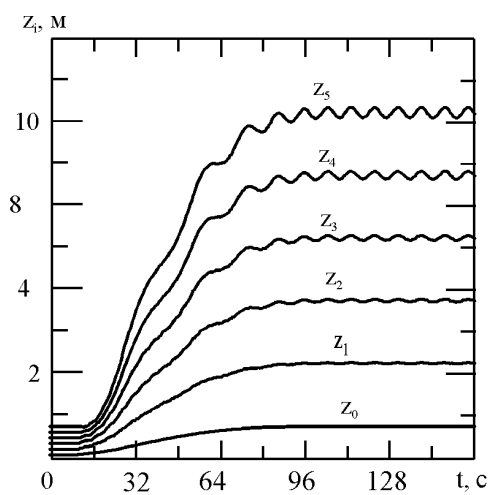


Рис. 6

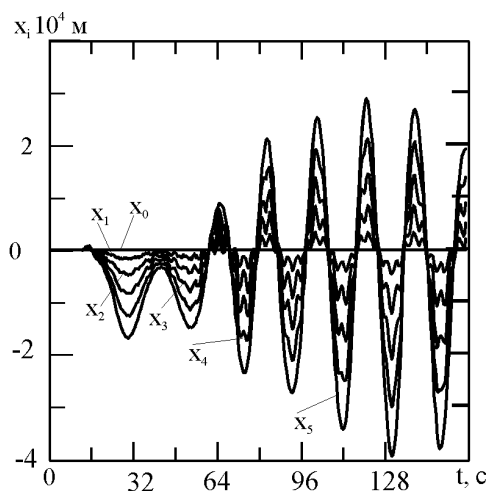


Рис. 7

Эти отклонения вызваны силами Кориолиса. При выбранной жесткости стержней эти отклонения невелики, но даже при очень гладком законе раскрытия, показанном на рис. 8 сплошной линией, характер отклонения достаточно сложен. Особенно это заметно для нижних ярусов, хотя силы Кориолиса для них заметно меньше, чем для верхнего яруса, скорость движения которого выше других. Закон развертывания, показанный на рис. 8 пунктирными линиями, который обычно применяют на практике в подобных случаях, приводит к более существенным возмущениям системы.

На рис. 9 показано изменение во времени диагональных компонент тензора инерции всего КА в процессе развертывания конструкции. Здесь видно, что $\Theta_{1,1}$ и $\Theta_{2,2}$, которые вначале различаются, затем ведут себя практически синхронно, отражая колебания длины пантографа. Компонента $\Theta_{3,3}$ естественно уменьшается, поскольку по мере развертывания пантографа расстояния его точек до оси Oz в целом заметно уменьшаются. Вообще говоря, при наличии поперечных отклонений конструкции вдоль оси Ox тензор инерции перестает быть диагональным. У него появляется отличная от нуля компо-

мента $\Theta_{1,3}$, но в силу малости смещений в направлении оси Ox она мала и существенного влияния на динамику КА не оказывает.

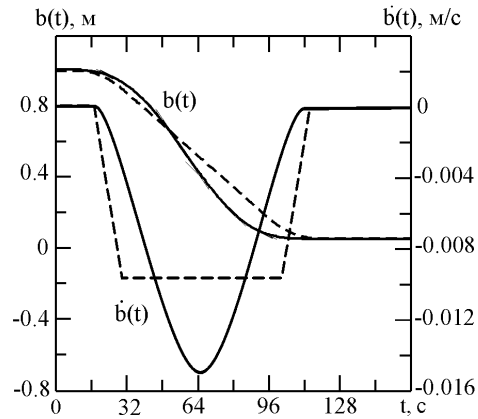


Рис. 8

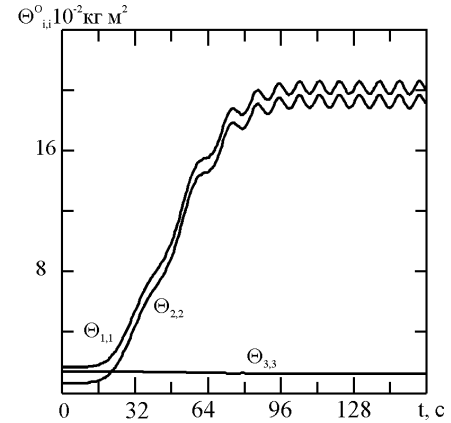


Рис. 9

Далее анализируются результаты моделирования разворачивания 20-ярусного пантографа на интервале 2000 с реального времени. При этом учитываются все диссипативные силы, обсуждаемые выше.

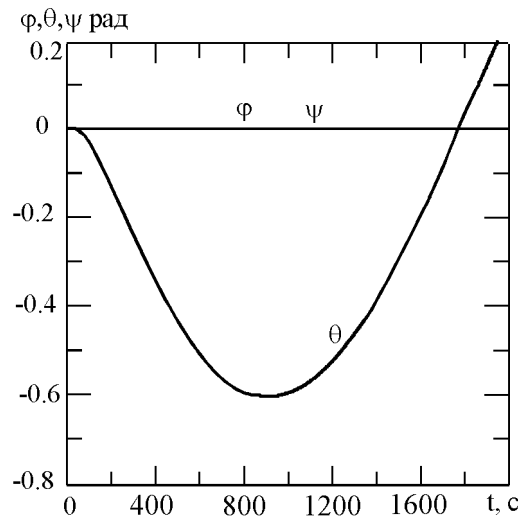


Рис. 10

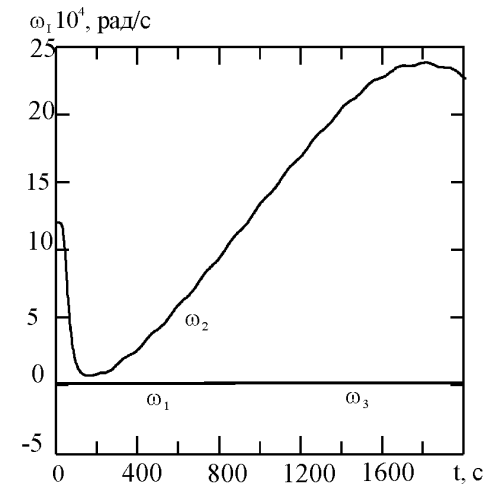


Рис. 11

Рис. 10 и 11 показывают поведение углов ориентации (кватернионы были пересчитаны в традиционные углы Крылова, где φ – угол крена, ϑ – угол тангажа и ψ – угол курса). Очевидно, что после разворачивания КА теряет ориентацию. Его угловая скорость по тангажу становится существенно меньше угловой скорости орбитального движения, но под действием гравитационного момента КА входит в режим близких к гармоническим колебаний со средним значением, равным орбитальной угловой скорости.

Наличие достаточного трения в наружных шарнирах обеспечивает быстрое гашение собственных колебаний конструкции (рис. 12), но в то же время приводит к ее некоторому недораскрытию. Особенно хорошо это заметно на рис. 13, где показано изменение во времени углов наклона стержней к оси Ox . Нижние индексы в обозначениях на рисунках соответствуют номерам ярусов. На этом рисунке четко прослеживается тот факт, что вначале развер-

тывания значения углов наклона становятся меньше своих начальных значений (если в конструкции нет соответствующих ограничителей). Затем происходит явное отставание их от угла наклона стержня нулевого яруса, который совершает движение по заданной программе. Тем не менее, как видно из графика, несмотря на сухое трение в шарнирах, со временем происходит раскрытие пантографа до проектной длины. Это происходит, вне всякого сомнения, под действием поперечных колебаний всей конструкции по типу колебаний консольной балки. Эти медленные колебания дополняются собственными колебаниями упругих стержней, что хорошо заметно на рис. 14.

При таких движениях затухание колебаний произойдет нескоро, если не принять специальные меры.

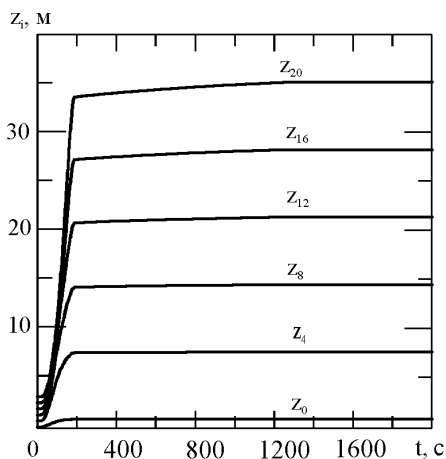


Рис. 12

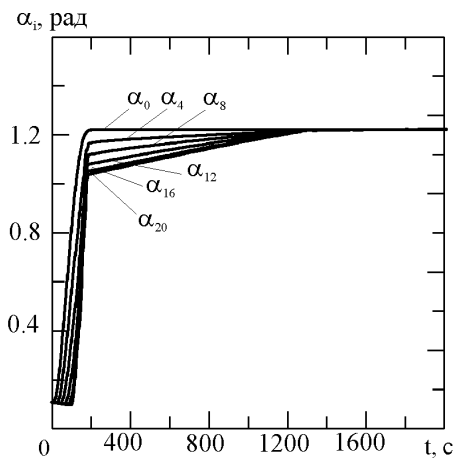


Рис. 13

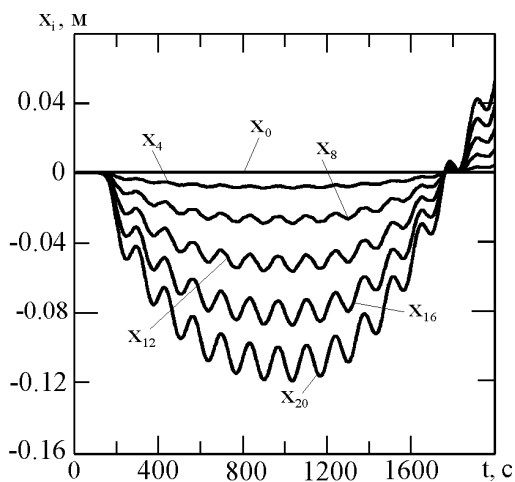


Рис. 14

Дело в том, что при поперечных колебаниях движение в боковых шарнирах, где действуют силы трения, практически отсутствует. Такие колебания происходят в основном за счет упругих деформаций самих стержней. В рамках принятой дискретной модели это сводится к поворотам в фиктивных центральных шарнирах, которые учитывают только конструкционное демпфирование. При тех скоростях движения, которые показаны на рисунке, диссипация энергии колебаний практически не происходит.

Заключение. Таким образом, в этой статье проведено построение математической модели сложной пространственной конструкции переменной конфигурации, смонтированной на космическом аппарате, и изучена ее динамика в процессе развертывания на орбите. Полученная математическая модель может рассматриваться как обобщение теории относительного движения тел на случай, когда конфигурация системы определяется не только его обобщенными координатами, но и временем непосредственно. Для изучения

поведения системы под действием разнообразных возмущающих факторов создан пакет вычислительных программ, который позволил получить информацию для создания представления о поведении системы и может быть достаточно просто адаптирован для исследования развертываемых конструкций других типов.

Полученная в процессе численного моделирования информация позволила обнаружить основные свойства рассматриваемой системы и сделать вывод, что приемлемое для практики раскрытие исследуемой конструкции может быть достигнуто только при рациональном выборе параметров КА в целом.

1. *Lang W. E.* Simulation of deployment dynamics of spinning spacecraft / *W. E. Lang, G. N. Honeycutt* // TN D-4074, Aug. 1967, NASA.
2. *Cloutier G. J.* Dynamics of deployment of extendible booms from spinning space vehicles / *G. J. Cloutier* // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1968. – 5, N5. – P. 547 – 552.
3. *Bowers E. J.* Optimization of RAE satellite boom deployment timing / *E. J. Bowers, C. E. Williams* // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1970. – 7, N9. – P. 1057 – 1062.
4. *Barakat R.* Transverse vibrations of a moving thin rod / *R. Barakat* // Journal of the Acoustical Society of America. – 1968. – 43, N3. – P. 533 – 539.
5. *Tabarrok B.* On the dynamics of an axially moving beam / *B. Tabarrok, C. M. Leech, Y. I. Kim* // Journal of the Franklin Institute. – 1974. – 297, N3. – P. 201 – 220.
6. *Banerjee A. K.* Extrusion of a beam from a rotating base / *A. K. Banerjee, T. R. Kane* // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1989. – 12, N2. – P. 140 – 146.
7. *Creamer N. G.* Deployment of a flexible beam from an oscillating base / *N. G. Creamer* // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1987. – 15, N2. – P. 527 – 529.
8. *Lewis J. A.* A two-gyro, gravity-gradient satellite attitude control system / *J. A. Lewis, E. E. Zajac* // Bell Syst. Techn. J. – 1964. – 43, N6. – P. 2705 – 2765.
9. *Cherchas D. B.* Dynamics of spin-stabilized satellites during extension of long flexible booms / *D. B. Cherchas* // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1971. – 8, 7. – P. 802 – 804.
10. *Lips K. W.* Three-dimensional response characteristics for spacecraft with deploying flexible appendages / *K. W. Lips, V. J. Modi* // Journal of Guidance and Control. – 1981. – 4, N5. – P. 650 – 656.
11. *Tsuchiya K.* Dynamics of a Spacecraft During Extension of Flexible Appendages / *K. Tsuchiya* // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1983. – 6, N2. – P. 100 – 103.
12. *Lips K. W.* Dynamics and control characteristics for the WISP 300m dipole antenna/shuttle configuration / *K. W. Lips, W. B. Graham, F. R. Vigneron, D. G. Hunter* // AAS. – 1985. – N8. – P. 85 – 365.
13. *Banerjee A. K.* Order-n formulation of extrusion of a beam with large bending and rotation / *A. K. Banerjee* // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1992. – 15, N1.
14. *Banerjee A. K.* Efficient simulation of large overall motion of beams undergoing large deflection / *A. K. Banerjee, S. Nagarajan* // Multibody System Dynamics. – 1997. – N1. – P. 113 – 126.
15. *Закржевский А. Е.* Динамика системы тел с программно изменяемой конфигурацией / *А. Е. Закржевский, Дж. Матараццо, В. С. Хорошилов* // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N3. – P. 345 – 350.
16. *Dranovskii V. I.* Spacecraft dynamics with regard to elastic gravitational stabilizer deployment / *V. I. Dranovskii, V. S. Khoroshilov, A. E. Zakrzhevskii* // Acta Astronautica. – 2009. – 64, N5-6. – P. 501 – 513.
17. *Khoroshilov V.* Deployment of Big Pantograph Designs in an Orbit / *V. Khoroshilov, A. Kovalenko, A. E. Zakrzhevsky* // Proceedings of the 1st International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST-2007), June 14-16, Istanbul, Turkey. – P. 182 – 186.
18. *Beletsky V. V.* Motion of an artificial satellite about its center of mass / *V. V. Beletsky* // Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966.
19. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / *А. И. Лурье*. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.
20. *Тимошенко С. П.* Соппротивление материалов : Т. 1 / *С. П. Тимошенко*. – М.-Л. : Гостехтеориздат, 1932. – 360 с.
21. *Бабаков И. М.* Теория колебаний / *И. М. Бабаков*. – М. : Наука, 1968. – 560 с.
22. *Zakrzhevskii A. E.* Dynamics of the orbital deployment of an elastic ring-shaped antenna / *A. E. Zakrzhevskii, V. S. Khoroshilov* // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 6. – P. 718 – 729 : DOI: 10.1007/s10778-010-0360-y

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
 Киев
 Государственное предприятие
 “Конструкторское бюро “Южное” им. М. К. Янгеля”,
 Днепропетровск

Получено 30.06.11,
 в окончательном варианте 29.07.11