

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ НА ОСНОВІ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНОГО ВАРІАНТА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Разработан эффективный вычислительный алгоритм для решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины с упругим прямоугольным включением на основе проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов. Исследовано влияние разных граничных условий, механических и геометрических характеристик пластины и включения на распределение напряжений и деформаций.

Розроблено ефективний обчислювальний алгоритм для розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану прямокутної пластины з пружним прямокутним включенням на основі проекційно-ітераційного варіанта методу скінченних елементів. Досліджено вплив різних граничних умов, механічних і геометричних характеристик пластины та включення на розподіл напружень і деформацій.

An efficient computational algorithm for solving the problem for determining a stressed-strained state of a rectangular plate with an elastic rectangular inclusion is proposed, based on the projective-iterative version of the finite element method. The influence of different boundary conditions, mechanical and geometrical characteristics of the plate and the inclusion on the stress and strain distributions is investigated.

Вступ. Розвиток технологій створення нових композиційних матеріалів, які мають складну структуру і володіють рядом переваг перед традиційними матеріалами, обумовлює актуальність задач розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) тіл з пружними включеннями. У монографії [8] здійснено поглиблений аналіз бібліографічних джерел, що стосуються дослідження деформівних тіл з включеннями; викладені основи математичної теорії визначення полів температури, переміщень і напружень, а також граничного стану деформівних твердих тіл з тонкими включеннями за температурного та силового впливів. На основі методу функцій стрибка розв'язані різні двовимірні задачі теорії пружності та теплопровідності для однорідних і кусково-однорідних тіл, що містять тонкі включення. У роботі [16] вивчаються процеси руйнування біля включення з використанням двовимірної моделі пружно-пластичного деформування. Дослідженню впливу включень на НДС деформівних тіл присвячені також роботи [1, 6, 10, 11, 13 – 18].

Як свідчать теоретико-експериментальні дослідження, саме біля неоднорідностей матеріалу починаються процеси пластичного деформування та руйнування: безпосередньо біля вершин м'яких (податних) включень спостерігається локальне руйнування, а біля відносно жорстких – згущення смуг ковзання та формування мікротріщин. Загальні характеристики міцності матеріалів істотно залежать від характеру розподілу, форми і фізико-механічних властивостей металевих та неметалевих включень [8].

Задачі для тіл із включеннями виникають при проектуванні неоднорідних тонкостінних конструкцій, зокрема при підкріпленні вирізів різної форми тонкими пружними кільцями, при дослідженні зварних і клейових з'єднань тощо. Тому розробка ефективних розрахункових методів визначення НДС елементів конструкцій з включеннями з ізотропних і анізотропних матеріалів є актуальною проблемою.

У даній роботі досліджено НДС прямокутної пластины з пружним прямокутним включенням на основі проекційно-ітераційних схем реалізації методу скінченних елементів (МСЕ) [3 – 5, 12]. Розглянуто декілька варіантів граничних умов, розмірів включення та його механічних характеристик.

Постановка задачі. Розглядається однорідна ізотропна прямокутна пластину Ω з пружним прямокутним включенням в її центрі. Геометрія пластини з включенням наведена на рис. 1, де позначено: L_1, L_2 – довжини сторін, $(L_1'' - L_1') \times (L_2'' - L_2')$ – розміри включення.

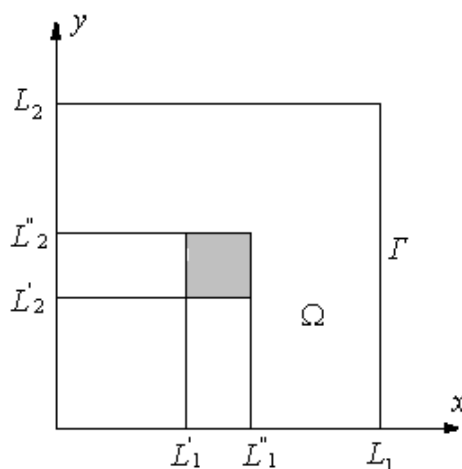


Рис. 1

На границі пластини Γ задані граничні умови у переміщеннях. Розглядаються два варіанти:

1) на границі Γ задані умови:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = g_1(x, y), \quad v(x, y)|_{\Gamma} = g_2(x, y), \quad (1)$$

де $g_1(x, y), g_2(x, y)$ – лінійні функції змінних x, y ;

2) на частині границі Γ ($0 \leq x \leq L_1, y = 0$ та $0 \leq x \leq L_1, y = L_2$) задані стискальні переміщення:

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{y=0, x \in [0, L_1]} &= 0, & v(x, y)|_{y=0, x \in [0, L_1]} &= v_1, \\ u(x, y)|_{y=L_2, x \in [0, L_1]} &= 0, & v(x, y)|_{y=L_2, x \in [0, L_1]} &= -v_1, \end{aligned} \quad (2)$$

де v_1 – задане значення переміщень.

Необхідно визначити поля переміщень і напружень у пластині з включенням.

Виходячи з варіаційного принципу механіки, приходимо до задачі мінімізації функціонала [2]:

$$\Phi = \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (3)$$

де λ, μ – постійні Ламе; Ω – область визначення змінних x, y .

Метод розв'язання. Для розв'язування задачі мінімізації функціонала (2) застосовується проєкційно-ітераційний варіант МСЕ [4, 12]. Основна ідея

цього методу полягає у тому, що для побудови послідовності наближених задач мінімізації використовується МСЕ як проєкційний метод, а для її розв'язання застосовується ітераційний метод верхньої релаксації. Вихідна екстремальна задача апроксимується за допомогою методу скінченних елементів послідовністю ($n = 1, 2, \dots$) дискретних екстремальних задач для функцій багатьох змінних. Кожна з отриманих задач розв'язується за допомогою методу послідовної верхньої релаксації. Починаючи з деякого, досить грубого, розбиття для відповідної функції багатьох змінних, будується лише декілька наближень (k_n) до її точки мінімуму, останнє потім інтерполюється на більш дрібну скінченно-елементну сітку і служить на ній початковим наближенням до точки мінімуму для відповідної функції багатьох змінних. Процес продовжується до тих пір, поки не буде досягнута задана точність.

На n -ому кроці проєкційно-ітераційного процесу розрахункові формули для визначення вузлових значень переміщень u_{ij}, v_{ij} мають вигляд:

$$u_{n,ij}^{(k+1)} = u_{n,ij}^{(k+1)} + \omega(\bar{u}_{ij} - u_{n,ij}^{(k)}),$$

$$v_{n,ij}^{(k+1)} = v_{n,ij}^{(k+1)} + \omega(\bar{v}_{ij} - v_{n,ij}^{(k)}),$$

де k – номер ітерації ($k = 0, 1, \dots, k_n$); ω – параметр релаксації ($0 < \omega < 2$); i, j – номер поточного вузла скінченно-елементної сітки; $\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}$ – переміщення, що визначаються за ітераційним процесом Зейделя [7].

Детальніше алгоритм проєкційно-ітераційного варіанту МСЕ викладено у роботі [3].

Числовий аналіз. Розрахунки проведені на ПК AMD Athlon(tm) (1,80 ГГц) з 1,96 ГБ оперативної пам'яті для пластини розміром $4,5 \times 4,5$ см з пружними включеннями з розмірами $1,5 \times 1,5$ см та $0,5 \times 0,5$ см при різних комбінаціях матеріалів пластини та включення: сталь ($E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$), титан ($E = 120$ ГПа, $\nu = 0,32$), алюміній ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0,36$).

Проєкційно-ітераційний варіант МСЕ реалізовано на 6-ох вкладених вдвічі скінченно-елементних сітках з прямокутних лагранжевих елементів [9]. Кількість k_n наближень на n -му кроці ($n = 1, 2, \dots, 6$) проєкційно-ітераційного процесу вибиралася як найменше ціле k , яке задовольняє нерівності

$$\| z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)} \| \leq \varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, k_n),$$

де ε – задана точність обчислень; $z_h^{(k_n)}$ – наближений розв'язок n -ої скінченновимірної задачі; h – крок сітки.

Проведено велику кількість обчислювальних експериментів. В табл. 1, як приклад, наведені результати реалізації МСЕ та його проєкційно-ітераційного варіанта на послідовності 6-ти скінченно-елементних сіток для сталюї пластини з алюмінієвим включенням $0,5 \times 0,5$ см. З цієї таблиці видно, що наближений розв'язок вихідної задачі на основі проєкційно-ітераційного варіанта МСЕ було отримано за $33+16+24+53+84+108=318$ ітерацій (23 с 69 мс). При розв'язуванні цієї ж задачі звичайним МСЕ результат було отримано за 5951 ітерацію (19 хв 47 с 79 мс). Таким чином, використання проє-

ційно-ітераційного варіанта МСЕ для пластини з включенням в 52 рази ефективніше, ніж при застосуванні традиційного МСЕ.

Таблиця 1

Сітка	Точність розрахунків	III варіант МСЕ		МСЕ	
		Кількість ітерацій	Час розрахунків	Кількість ітерацій	Час розрахунків
19 × 19	32·10 ⁻⁹	33	–	5951	19 хв 47 с 79 мс
37 × 37	16·10 ⁻⁹	16	2 мс		
73×73	8·10 ⁻⁹	24	6 мс		
145×145	4·10 ⁻⁹	53	58 мс		
289×289	2·10 ⁻⁹	84	3 с 70 мс		
577×577	1·10 ⁻⁹	108	19 с 33 мс		
Загальний час розрахунків		23 с 69 мс		19 хв 47 с 79 мс	

Розподіл напружень σ_x , σ_y та σ_{xy} у характерному перерізі пластини ($x = L_1$, $0 \leq y \leq L_2$) при граничних умовах типу (1) ($g_1(x,y) = \gamma_0(y - L_2/2)$, $g_2(x,y) = \gamma_0(x - L_1/2)$, $\gamma_0 = 2 \cdot 10^{-3}$) для трьох варіантів сполучень матеріалів пластини та включення, а саме титанової пластини зі сталевим включенням (Ti_St), сталевій пластини з алюмінієвим включенням (St_Al) та алюмінієвої пластини зі сталевим включенням (Al_St) зображено на рис. 2 – 4 відповідно. Розмір включення 1,5×1,5 см.

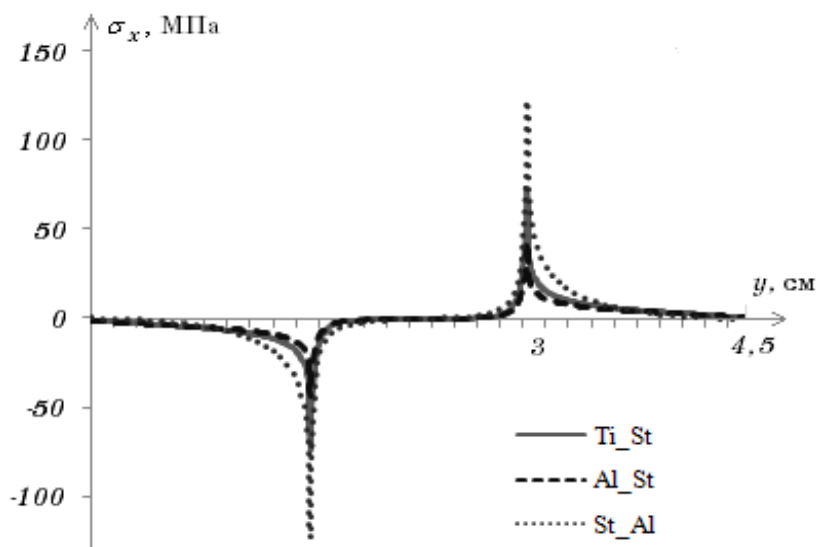


Рис. 2

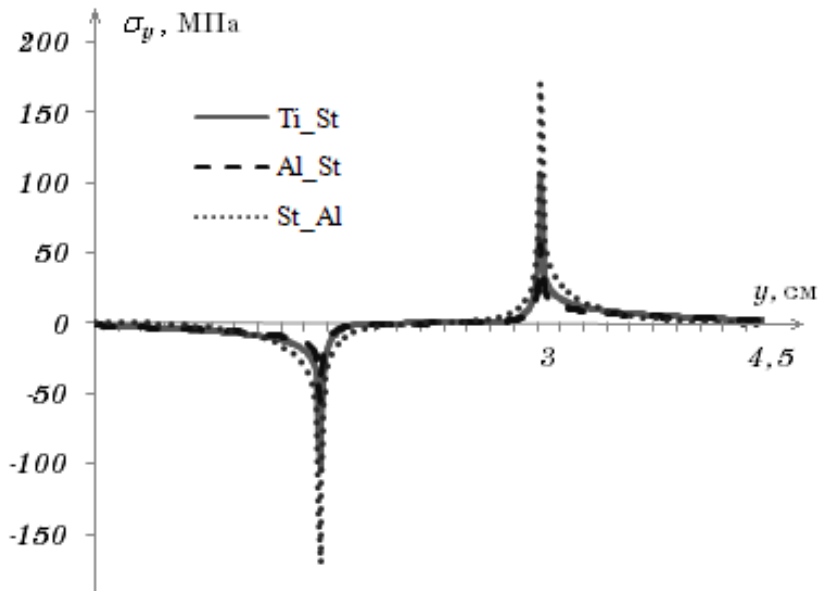


Рис. 3

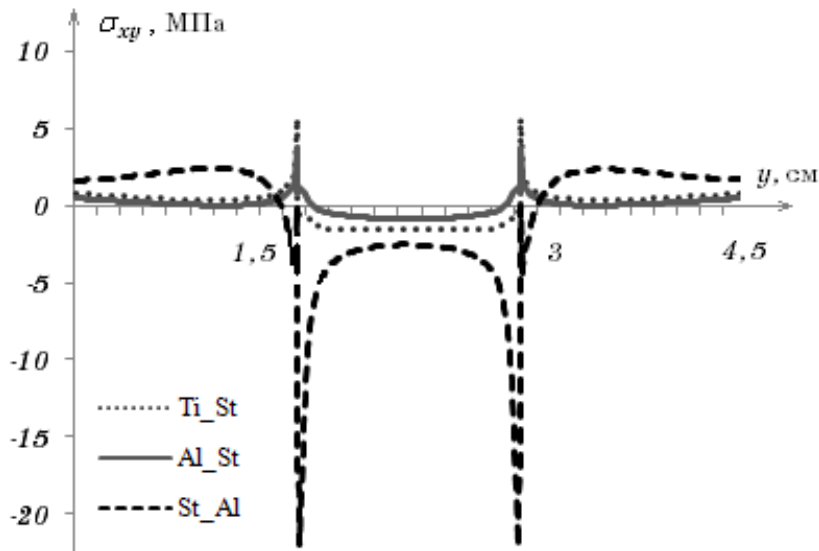


Рис. 4

З рис. 2 – 4 видно, що максимальні напруження в пластинах з пружним включенням концентруються на межі пластини і включення. Така ж сама залежність спостерігається і для інших розмірів включення. З ростом розмірів включення концентрація напружень зростає. Максимальні напруження більше в тих пластинах, модуль пружності яких більший. Тобто із матеріалів, що розглядаються, найбільші за величиною напруження утворюються в сталевій пластині, а найменші – в алюмінієвій.

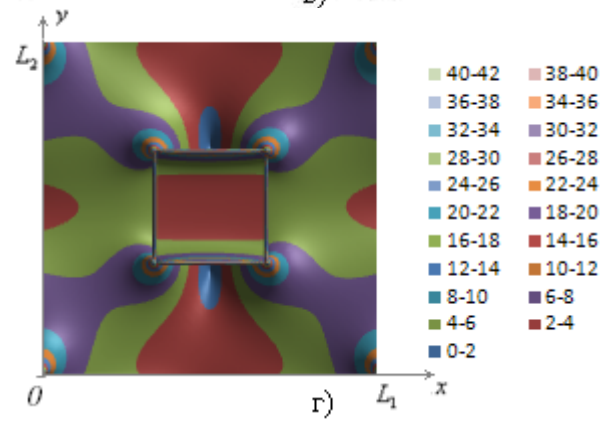
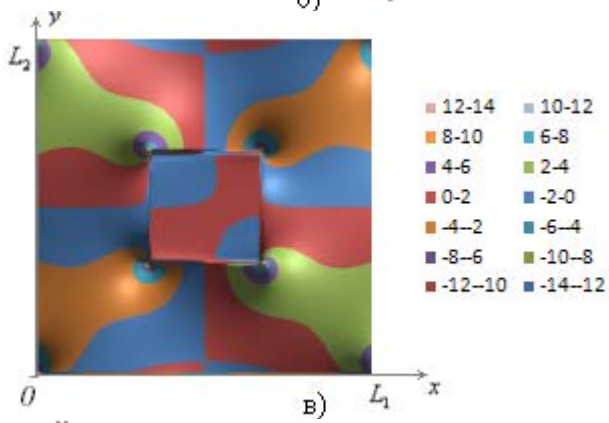
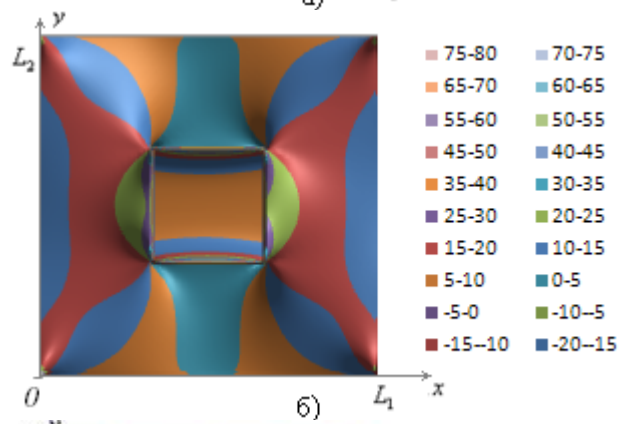
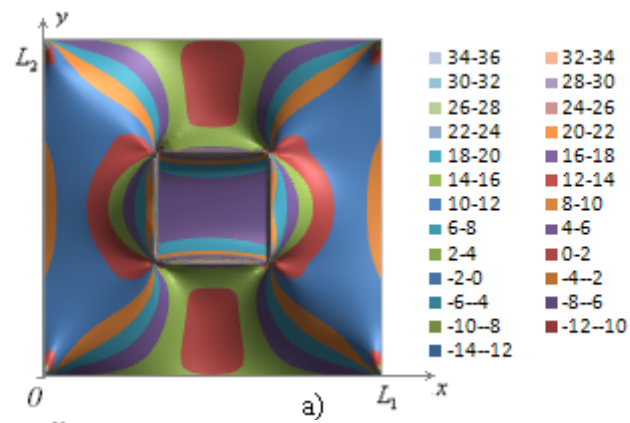


Рис. 5

На рис. 5, а – г, як приклад, наведено розподіл напружень σ_x , σ_y , σ_{xy} , σ_{12} , відповідно, для сталюї пластини з алюмінієвим включенням (St_Al) розміром $1,5 \times 1,5$ см у випадку граничних умов (2). Тут крім концентрації напружень на межі пластини і включення має місце крайовий ефект [8].

На рис. 6 приведено розподіл напружень σ_{xy} у перерізі пластини $x=L_1$, $0 \leq y \leq L_2$ у випадку граничних умов (2) для титанової пластини зі сталюим включенням (Ti_St) при розмірах включення $1,5 \times 1,5$ см і $0,5 \times 0,5$ см. Аналіз розподілу напружень свідчить, що при граничних умовах (2) найбільші напруження утворюються на стику пластини і включення та в кутових точках пластини (крайовий ефект), але де саме будуть сконцентровані максимальні значення, залежить як від розмірів включення, так і від матеріалу пластини та включення. За результатами розрахунків виявлено, що при зменшенні розміру включення величина напруження σ_{xy} в області стику пластини і включення зменшується, а в кутових точках пластини, навпаки, збільшується, тим самим досягаючи максимальних значень.

Картина розподілу напружень також залежить від матеріалу пластини та включення. Так, наприклад, для алюмінієвої пластини зі сталюим включенням розміром $1,5 \times 1,5$ см максимальні напруження виникають у кутових точках пластини, в той час, як для титанової пластини з таким же включенням максимальні напруження сконцентровані на стику пластини і включення, тобто первинну роль у розподілі напружень грає матеріал пластини. Якщо не зважати уваги на розміри включення, то ймовірність утворення максимальних напружень в кутових точках пластини тим більше, чим модуль пружності матеріалу пластини менше. Максимальні напруження σ_x та σ_y при граничних умовах (2) виникають на стику пластини і включення, як і у випадку граничних умов (1).

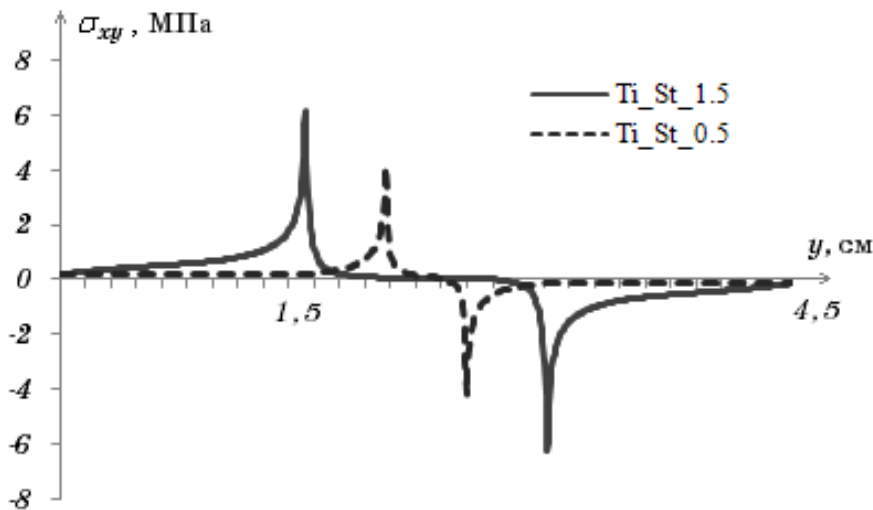


Рис. 6

Порівнюючи вплив двох розглянутих видів граничних умов, маємо, що максимальні напруження, які були утворені за умовами, заданими у вигляді лінійного закону по всієї границі пластини (умови типу (1)) перевищують

максимальні напруження, які були отримані для пластини з включенням при граничних умовах у вигляді стискаючих переміщень на частині границі (умови типу (2)). Це проілюстровано на прикладі розподілу напружень σ_y у титановій пластині зі стальним включенням (Ti_St) розміром $1,5 \times 1,5$ см (рис. 7).

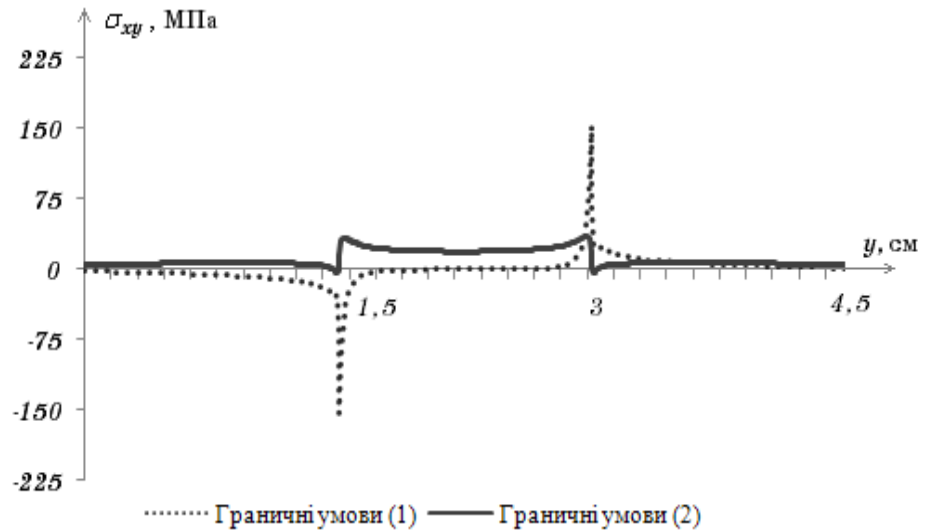


Рис. 7

Слід зазначити, що в усіх розрахунках значення напружень не перевищують межі пропорційності для використаних матеріалів, тобто розрахунків не виходить за межі теорії пружного тіла.

Висновки. 1. Розроблений алгоритм на основі проєкційно-ітераційного варіанту МСЕ дозволяє досить ефективно розв'язувати клас задач теорії пружності для пластин з пружними включеннями. Час розрахунків за цим алгоритмом у порівнянні з часом розрахунків на основі традиційного МСЕ менше ніж в 50 разів.

2. Досліджено вплив різних граничних умов і механічних та геометричних характеристик пластини та включення на її НДС. Зокрема, встановлено, що

- незалежно від розміру включення, матеріалу пластини та включення, концентрація напружень спостерігається на межі стику пластини і включення; з ростом розмірів включення концентрація напружень збільшується;
- граничні умови впливають на розподіл напружень у пластині з включенням, але не суттєво. При стискаючих граничних умовах концентрація напружень має місце як у зоні стику пластини і включення, так і в кутових точках пластини (крайовий ефект), а при граничних умовах за лінійним законом – в області стику пластини і включення. При цьому максимальні напруження при граничних умовах (2) декілька більше, ніж при умовах (1);
- значний вплив на розподіл напружень мають механічні властивості матеріалу пластини та включення. При однакових розмірах включен-

ня концентрація напружень на межі включення та пластини зростає з ростом модуля пружності матеріалу пластини;

- наявність пружного включення суттєво впливає на НДС пластини. На відміну від однорідної пластини (без включення), тут спостерігається поява максимальних напружень не тільки на границі пластини, але й в області стику пластини і включення.

Запропонований підхід можна застосовувати для розв'язування більш складних задач теорії пружності для пластин з декількома довільно розташованими включеннями різної форми і при інших видах граничних умов, а також з урахуванням пластичних деформацій [5].

1. Барило В. Г. Устойчивость деформирования твердых тел с дефектами типа трещин и включений / В. Г. Барило // Проблемы прочности. – 2005. – № 1. – С. 118 – 135.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 544 с.
3. Гарт Э. Л. Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению задачи Кирша / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконь // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д.: Наука і освіта, 2008. – Вип. 12. – С. 34 – 42.
4. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости / Э. Л. Гарт // Доповіді НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56 – 61.
5. Гарт Е. Л. Розв'язування задач пружно-пластичної рівноваги пластин з прямокутним і круговим отворами на основі проекційно-ітераційних схем реалізації методу скінченних елементів / Е. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконь // Вісник Київськ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2009, № 3. – С. 61 – 66.
6. Мирсалимов В. М. Обратная периодическая задача теории изгиба пластины с упругим включением / В. М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 3. – С. 171 – 179.
7. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М.: Мир, 1989. – 288 с.
10. Шарафутдинов Г. З. Тонкий диск с центральным жестким круговым включением под действием радиальных напряжений / Г. З. Шарафутдинов // Вестн. МГУ. Сер. 1. – 2004. – № 6. – С. 60 – 63.
11. Duong C. N. Analysis of a plate containing a polygon-shaped inclusion with a uniform eigencurvature / C. N. Duong, J. Yu // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 70, № 3. – P. 404 – 407.
12. Hart E. L. Projection-iterative version of the pointwise relaxation method / E. L. Hart // J. Math. Sci. – 2010. – Vol. 167, № 1. – P. 76 – 88.
13. Mura T. Inclusion problems / T. Mura, H. M. Shodja, Y. Hirose // Appl. Mech. Rev. – 1996. – Vol. 49, № 10/2. – P. 118 – 127.
14. Ouinas D. Numerical analysis of the effect of notch-inclusion interaction in a loaded plate / D. Ouinas, B. Boutabout, B. Bachir Bouiadja, A. Megueni // J. Mater. Sci. and Technol. – 2004. – Vol. 12, № 1. – P. 26 – 35.
15. Shen H. Stress analysis of an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity / H. Shen, P. Schiavone, C. Q. Ru, A. Mioduchowski // J. Elasticity. – 2001. – Vol. 62. – P. 25 – 46.
16. Trantina G. G. Elastic-plastic analysis of small defects-voids and inclusions / G. G. Trantina, M. Barishpolsky // Eng. Fract. Mech. – 1984. – Vol. 20, № 1. – P. 1 – 10.
17. Wang X.-F. Bending of a thin plate containing a rigid inclusion and a crack / X.-F. Wang, N. Hasebe // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2000. – Vol. 24. – P. 145 – 153.
18. Yu H. Y. Elastic inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic solids / H. Y. Yu, S. C. Sanday, C. I. Chang // Proc. Roy. Soc. London (Proceedings: Math. and Phys. Sci.). – 1994. – Vol. A444, № 1920. – P. 239 – 252.