ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2014

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 536.24

В. В. Панин, Ф. А. Кривошей, Ю. А. Богдан

Ретроспективная задача для нестационарного оператора теплопроводности

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Б. И. Баском)

Рассмотрен предельный случай ретроспективной задачи нестационарной теплопроводности — восстановление начального распределения температур. Необходимость в нем может возникнуть при экспертных оценках тепловой предыстории объекта, например, двигателя внутреннего сгорания. Регуляризация решения некорректного интегрального уравнения Вольтерра I рода для начального распределения температур путем стохастического преобразования Лапласа в квадратичном приближении сводит уравнение I рода к уравнению II рода, решение которого единственно и устойчиво относительно ошибок исходных данных.

Ретроспективной задачей, или задачей с обратным направлением времени, в общем случае называют отыскание пространственного распределения некоторой величины в момент времени τ, предшествующий заданному t. Применительно к нестационарной теплопроводности ретроспективная задача сводится к восстановлению температурного поля в моменты времени $\tau < t$, причем при $\tau \geqslant t$ поле известно. Предельным случаем ретроспективной задачи нестационарной теплопроводности является задача восстановления начального условия $T(x, y, z, 0)$ по известному полю $T(x, y, z, t > 0)$. Необходимость в знании $T(x, y, z, 0)$ может возникнуть при экспертных оценках тепловой предыстории объекта (например, двигателя внутреннего сгорания), которая в аварийном режиме или грубых нарушениях может привести к его термическому повреждению.

Рассмотрим необратимую задачу нестационарной теплопроводности для противоположного направления времени. Используемый в тепловых расчетах оператор нестационарной теплопроводности $(\partial/\partial t - a\Delta)T$ приводит к некорректной постановке задачи "обращения" времени. Поэтому широко используется замена этого оператора оператором, например $(\partial/\partial t - a\Delta - \varepsilon^2\Delta^2)T$, корректным для обратного направления времени [1]. Существуют различные методы изменения исходного оператора для получения корректной постановки задачи [1]. Все приведенные в [1] методы имеют одну общую особенность — априорный вид оператора. Кроме того, в этих методах отсутствует связь между видом произвольно выбранного оператора, свойствами температурного поля и величиной параметра ε^2. В [2, 3] показано, что введение в детерминированное уравнение Фурье случайного коэффициента теплопроводности, учитывающего случайные ошибки измерения температур, приводит к стохастическому уравнению относительно температуры. Случайный коэффициент теплопроводности имеет корреляционную функцию

$$\langle\lambda(t_1,x_1)\lambda(t_2,x_2)\rangle_c = \langle\delta\lambda(t_1,x_1)\delta\lambda(t_2,x_2)\rangle = \sigma_\lambda^2\delta(t_1-t_2)(x_1-x_2). \tag{1}$$

Приближение (1) полагается допустимой реализацией реальной теплопроводности. В такой постановке задача "обращения" времени формулируется на основе уравнения для среднего значения поля температур

$$c\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} - \overline{\lambda}\Delta\overline{T} - \sigma_\lambda^2\Delta^2\overline{T} = 0. \tag{2}$$

Тогда в одномерном случае задача определения начального условия формулируется как задача восстановления среднего начального поля температур $\overline{T}(x,0) = \varphi(x)$ по средним значениям поля температур $\overline{T}(x,t)$, причем $\varphi(x)$ задано в пространстве функций умеренного роста или с интегрируемым квадратом. На основе общей теоремы о единственности решений ретроспективной задачи, доказанной в [4], авторы [5] показали единственность решения применительно к уравнению теплопроводности.

Решение ретроспективной задачи на основе "корректного" оператора (2) сопряжено с необходимостью реализации достаточно громоздкого и трудоемкого конечно-разностного алгоритма [1]. Используем исходную нерегуляризированную задачу нестационарной теплопроводности

$$c\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{3}$$

$$T(0,t) = T_0(t), \tag{4}$$

$$T(x=b,t) = T_b(t), \tag{5}$$

$$T(x,0) = T_H(x). \tag{6}$$

По известному температурному полю $T(x,t)$ в момент времени t требуется восстановить начальное распределение $T_H(x)$. Для иллюстрации метода положим $(c,\lambda) = \mathrm{const}$ и проинтегрируем уравнение (3) по времени в интервале $[0,t]$. При этом полагаем, что $T(x,t)$ — ограниченная функция, имеющая, по крайней мере, одну непрерывную интегрируемую производную $\partial T/\partial t$, тогда

$$T_H(x) = T(x,t) - a\int\limits_0^t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\partial t'. \tag{7}$$

Очевидно, что некорректность задачи "обращения" времени в постановке (7) состоит в некорректной процедуре вычисления второй производной $\partial^2 T/\partial x^2$ по неточным (измеренным) исходным данным $T(x,t)$. Избежать этой процедуры можно, дважды проинтегрировав уравнение (7) по координате

$$\int\limits_0^x (x-x')T_H(x')dx' = \int\limits_0^x (x-x')T(x')dx' - a\int\limits_0^t (T-T_0)dt', \tag{8}$$

где $T_0 = T(0, t)$. Выражение (8) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра I рода относительно искомой функции $T_H(x)$. Известно, что решение этого уравнения неустойчиво при неточно заданной правой части уравнения (8).

Таким образом, двукратное интегрирование уравнения (7) трансформирует некорректность вычисления производной $\partial^2 T/\partial x^2$ в некорректность решения интегрального уравнения Вольтерра I рода. Регуляризируем уравнение (8), применив к нему стохастическое преобразование Лапласа в квадратичном приближении [6]

$$T(s) = (1 + \sigma_x^2 s)\overline{T}(s). \tag{9}$$

Полагаем, что коррелируют температура и ошибки отсчета координат. В результате такой процедуры получаем интегральное уравнение Вольтерра II рода относительно осредненной функции начального распределения $\overline{T}_H(x)$

$$\overline{T}_H(x) + \alpha^2 \int\limits_0^x \left[\frac{2}{\alpha} + (x - x')\right]\overline{T}_H(x')dx' =$$

$$= T(x,t) + \alpha^2 \int\limits_0^x \left[\frac{2}{\alpha} + (x - x')\right]\overline{T}(x',t)dx' - a\alpha^2 \int\limits_0^t (T - T_0)dt', \tag{10}$$

где $\alpha = \sigma_x^{-2}$. Устойчивое единственное решение этого уравнения при заданном осредненном температурном поле $\overline{T}(x,t)$ имеет вид

$$\overline{T}_H(x) = \overline{T}(x,t) - a\alpha^2 \left\{ \int\limits_0^t T dt' - 2\alpha \int\limits_0^t \int\limits_0^x T \exp[-\alpha(x - x')]dx'dt' + \right.$$

$$\left. + \alpha^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^x (x - x')T \exp[-\alpha(x - x')]dx'dt' - (1 - \alpha x)e^{-\alpha x} \int\limits_0^t T_0 dt' \right\}. \tag{11}$$

Если теплофизические свойства зависят от температуры, решение задачи усложнится. Табличные зависимости $\lambda(T)$, $c(T)$ необходимо аппроксимировать некоторыми функциями, а для численной реализации решения (11) заданное температурное поле $\overline{T}(x,t)$ аппроксимировать, например, полиномами или экспонентой.

Сходимость решения (11) по параметру α следует из уравнения для изображения по Лапласу осредненного начального распределения

$$\overline{T}_H(s) = T(s) - a\alpha^2 \int\limits_0^t \frac{s^2 T(s)}{(s + \alpha)^2} dt'. \tag{12}$$

Из этого уравнения при $\sigma_x \to 0 (\alpha \to \infty)$ следует

$$\lim_{\alpha \to \infty} \overline{T}_H(s) = T_H(s) = T(s) - a \int\limits_0^t s^2 T(s)\, dt',$$

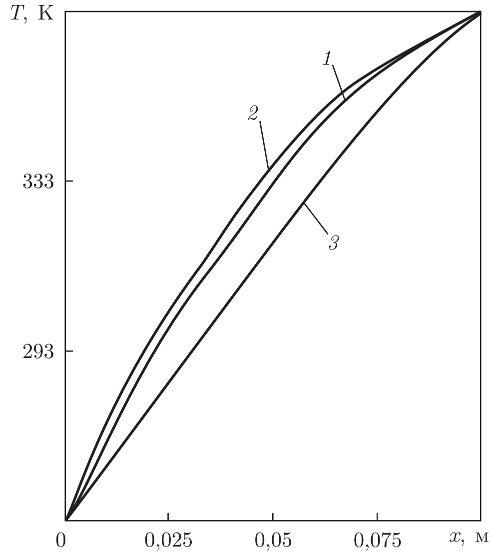

Рис. 1. Точное и восстановленные начальные распределения температур: *1* — точное; *2* — $\sigma_x^2 = 4\cdot 10^{-4}$; *3* — $\sigma_x^2 = 25\cdot 10^{-4}$

т. е. при стремлении дисперсии к нулю (при “точных” измерениях) задача отыскания начального распределения сводится к исходной некорректной задаче решения уравнения (7).

Рассмотрим тестовую задачу восстановления начального распределения $T_H(x)$ по решению прямой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (0 < x < h), \tag{13}$$

$$T(0,t) = 0, \tag{14}$$

$$T(h,t) = T_h, \tag{15}$$

$$T(x,0) = T_H(x) = T_h \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{h}\right). \tag{16}$$

Известное решение задачи (13)–(16) имеет вид

$$T = T_h \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{h}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\frac{at}{h^2}\right). \tag{17}$$

Решение (11) для задачи (13)–(16) имеет вид

$$\overline{T}_H(x) = T_h\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{h}\right) - \frac{2h}{\pi}\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta}[1-\exp(-a\beta t)]\left[x^2 - \frac{\beta}{2(\alpha^2+\beta)}\right]\exp(-\alpha x)\right\}. \tag{18}$$

Ошибки измерения термодатчиков моделировались возмущением точных координат в (18) случайными нормально распределенными числами с различными значениями дисперсии σ_x^2. На рис. 1 приведены результаты восстановления начального распределения $\overline{T}_H(x)$ с дисперсиями $\sigma_x^2 = 4\cdot 10^{-4}$, $\sigma_x^2 = 25\cdot 10^{-4}$. Наибольшие относительные отклонения от точного значения составили соответственно 0,035 и 0,18. Такой результат можно считать удовлетворительным приближением и сделать вывод о пригодности интегрального представления задачи (11) для восстановления начального распределения температур.

1. *Латтес Р., Лионс Ж.* Метод квазиобращения и его приложения. – Москва: Мир, 1970. – 336 с.
2. *Лаврентьев М. М.* Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, вып. 1. – С. 12–15.
3. *Кривошей Ф. А.* Метод статистического осреднения функционалов для обработки данных теплофизических экспериментов // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 108–112.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики. – Москва: Наука, 1980. – 288 с.
5. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.
6. *Кривошей Ф. А.* Гидродинамическая и тепловая самоорганизация при кипении водных растворов полимеров // Теорет. основы хим. технологии. – 1993. – **33**, – № 7. – С. 453–458.

Киевская государственная академия водного транспорта им. гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного

Поступило в редакцию 31.03.2014

В. В. Панін, Ф. О. Кривошей, Ю. О. Богдан

Ретроспективна задача для нестаціонарного оператора теплопровідності

Розглянуто граничний випадок ретроспективної задачі нестаціонарної теплопровідності — відновлення початкового розподілу температур. Необхідність в ньому може виникнути при експертних оцінках теплової передісторії об'єкта, наприклад, двигуна внутрішнього згоряння. Регуляризація розв'язку некоректного інтегрального рівняння Вольтерра I роду для початкового розподілу температур шляхом стохастичного перетворення Лапласа в квадратичному наближенні зводить рівняння I роду до рівняння II роду, розв'язок якого є единим і стійким відносно помилок вихідних даних.

V. V. Panin, F. A. Krivoshey, Yu. A. Bogdan

Retrospective task for a non-stationary operator of heat conductivity

The limit case of a retrospective task of non-stationary heat conductivity (namely, the restoration of the initial distribution of temperatures) is considered. The need for it can arise at expert estimates of the thermal prehistory of an object, for example, an internal combustion engine. The regularization of the solution of a non-correct Volterra integral equation of the first kind for the initial distribution of temperatures by Laplace's stochastic transformation in the square approximation reduces the first-kind equation to a second-kind equation, whose solution is unique and stable relative to the errors of initial data.