УДК 532.542.537.311.6:62-52

С.И. ДОЛГОПОЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИМПЕДАНСНЫМ МЕТОДОМ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ СОВМЕСТНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНСТРУКЦИИ ТРУБОПРОВОДА И ЖИДКОСТИ

Представлена математическая модель трубопровода с распределенными параметрами, учитывающая взаимодействие в продольном направлении жидкости и конструкции трубопровода. Определены элементы передаточной матрицы трубопровода. Разработана математическая модель сильфона в продольном направлении и определена его передаточная матрица. Получены выражения для определения импедансных соотношений гидроупругой системы. Для тестового трубопровода линии питания жидкостного ракетного двигателя показано, что влияние взаимодействия жидкости и конструкции трубопровода в продольном направлении на собственные частоты колебаний связанной гидроупругой системы эффективно при определенной близости собственных частот колебаний парциальных систем жидкости и конструкции трубопровода.

Представлено математичну модель трубопроводу з розподіленими параметрами, що враховує взаємодію в поздовжньому напрямку рідини й конструкції трубопроводу. Визначено елементи передаточної матриці трубопроводу. Розроблено математичну модель сильфона в поздовжньому напрямку й визначена його передаточна матриця. Отримано вирази для визначення імпедансних співвідношень гідропружної системи. Для тестового трубопроводу лінії живлення рідинного ракетного двигуна показано, що вплив взаємодії рідини й конструкції трубопроводу в поздовжньому напрямку на власні частоти коливань зв'язаної гідропружної системи є ефективним при певній близькості власних частот коливань парціальних систем рідини й конструкції трубопроводу.

A mathematical model of the pipe with distributed parameters considering a longitudinal interaction between the fluid and the pipe structure is presented. The elements of the pipe transmission matrix are defined. A mathematical model of the bellows in a longitudinal direction is developed and its transmission matrix is determined. Expressions for defining impedance relations of a hydroelactic system are derived. It is shown for the test pipe of the LRE feedline that the effects of the interaction between the fluid and the pipe structure in a longitudinal direction on natural oscillation frequencies of a coupled hydroelactic system are effective under a certain relationship of natural oscillation frequencies of partial systems of the fluid and the pipe structure.

Введение. Амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ) линий питания жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) используются при анализе динамики ЖРД, продольной устойчивости ракет на жидком топливе [1]. При этом часто предполагается, что конструкция трубопроводов является абсолютно жесткой. Однако на практике трубопроводы зачастую испытывают вибрации, а опоры трубопроводов являются подвижными. При этом происходит взаимное влияние пульсаций жидкости и вибраций конструкции, которое может привести к изменению АФЧХ трубопроводов. Задача определения взаимодействия пульсаций рабочей среды и вибраций конструкций является актуальной в авиационной, ракетной, судостроительной технике, в гидравлических системах станков, наземных транспортных и энергетических установок, в трубопроводных системах химической, нефтяной и газовой промышленности, в отопительных и вентиляционных системах [2]. Известны экспериментальные и теоретические работы [3 – 7], где показано, что это взаимное влияние может быть существенным и приводить к возникновению неустойчивости течения, к изменению частотных характеристик связанной системы, к усилению интенсивности волн давления в жидкости при переходных процессах и изменению собственных частот колебаний трубопроводной системы. Для теоретического определения АФЧХ гидросистем с распределенными параметрами обычно используются численные методы характеристик либо метод конечных элементов, получивший распространение в последнее время в связи с развитием методов численного моделирования и использующий различные программные комплексы (например ANSYS) [8].

Целью настоящей работы является применение импедансного метода, основанного на аналитическом решении дифференциальных уравнений, для определения АФЧХ при совместных связанных продольных колебаниях конструкции прямолинейного трубопровода и текущей по нему жидкости.

1. Передаточная матрица трубопровода и сильфона. Математическую модель прямолинейного трубопровода круглого сечения с распределенными параметрами, учитывающую взаимодействие в продольном направлении жидкости и конструкции трубопровода, получим из уравнений в частных производных, представленных в работе [7] и дополненных здесь учетом потерь давления жидкости и демпфированием конструкции. В число этих уравнений входит уравнение движения жидкости, уравнение неразрывности жидкости, уравнение движения стенки трубопровода в осевом направлении и уравнение состояния стенки трубопровода (в принятой системе координат ось z направлена по течению жидкости)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{1}{gA_{ж}}\dfrac{\partial G}{\partial t}+\dfrac{2\Delta\bar{p}}{l\bar{G}}\left(G-\gamma_{ж}A_{ж}\dot{u}_z\right)=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{c^2\gamma_{ж}}{g}\left(\dfrac{1}{\gamma_{ж}A_{ж}}\dfrac{\partial G}{\partial z}-2\nu\dfrac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\right)=0, \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial z}-\dfrac{\gamma_{м}A_{м}}{g}\dfrac{\partial \dot{u}_z}{\partial t}=0, \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial t}-A_{м}E_{м}\left(1+\mu_z\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}-\nu\dfrac{DA_{м}}{2\delta_T}\dfrac{\partial p}{\partial t}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где p, G – давление и весовой расход жидкости; F_z, $\dot{u}_z$ – продольная сила и скорость перемещения трубопровода; t – время; $\gamma_{ж}$, $\gamma_{м}$ – удельный вес жидкости и материала трубопровода; $A_{ж}$, $A_{м}$ – площади поперечных сечений трубопровода, занятых жидкостью и стенкой трубопровода; g – ускорение свободного падения; $\Delta\bar{p}$ – потери давления на участке трубопровода длиной l; c – скорость звука в жидкости; ν – коэффициент Пуассона; $E_{м}$ – модуль упругости материала трубопровода; μ_z – коэффициент демпфирования конструкции трубопровода; D, δ_T – внутренний диаметр и толщина стенки трубопровода; черта над параметром означает его постоянство.

В этой модели влияние колебаний жидкости на колебания конструкции трубопровода осуществляется за счет изменения внутреннего давления жидкости, которое приводит к появлению в стенке трубопровода окружных напряжений и, в соответствии с эффектом Пуассона, осевых напряжений. Влияние колебаний конструкции на колебания жидкости осуществляется за счет осевого сокращения или удлинения конструкции трубопровода.

Получим передаточную матрицу трубопровода с распределенными параметрами в виде

$$\begin{cases} p(z,s)=b_{1,1}\,p(0,s)+b_{1,2}\,G(0,s)+b_{1,3}\,F_Z(0,s)+b_{1,4}\,\dot{u}_Z(0,s), \\ G(z,s)=b_{2,1}\,p(0,s)+b_{2,2}\,G(0,s)+b_{2,3}\,F_Z(0,s)+b_{2,4}\,\dot{u}_Z(0,s), \\ F_Z(z,s)=b_{3,1}\,p(0,s)+b_{3,2}\,G(0,s)+b_{3,3}\,F_Z(0,s)+b_{3,4}\,\dot{u}_Z(0,s), \\ \dot{u}_Z(z,s)=b_{4,1}\,p(0,s)+b_{4,2}\,G(0,s)+b_{4,3}\,F_Z(0,s)+b_{4,4}\,\dot{u}_Z(0,s), \end{cases} \tag{2}$$

где $p(0,s)$, $G(0,s)$, $F_Z(0,s)$, $\dot{u}_Z(0,s)$ –соответствующие параметры на входе в рассматриваемый элемент трубопровода; $p(z,s)$, $G(z,s)$, $F_Z(z,s)$, $\dot{u}_Z(z,s)$– соответствующие параметры на расстоянии z от входа в рассматриваемый элемент трубопровода; $b_{i,j}$, $i,j=1,2,3,4$ – элементы передаточной матрицы трубопровода.

Для определения элементов передаточной матрицы трубопровода будем поступать аналогично тому, как это принято при использовании импедансного метода в теории гидравлических систем [9]. Применяя преобразование Лапласа по переменной t к системе (1) при нулевых начальных условиях, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dz} = -Z_Ж \cdot G(s) + \delta_Ж \cdot \dot{u}_Z(s), \\ \dfrac{dG}{dz} = -Y_Ж \cdot p(s) - D_Ж \cdot F_Z(s), \\ \dfrac{dF_Z}{dz} = Z_M \cdot \dot{u}_Z(s), \\ \dfrac{d\dot{u}_Z}{dz} = Y_M \cdot F_Z(s) + D_M \cdot p(s), \end{cases} \tag{3}$$

где s – переменная Лапласа;

$$Z_Ж = \frac{s}{g\,A_Ж} + \frac{2\,\Delta\bar{p}}{l\left(\bar{G} - \bar{\dot{u}}_Z\,A_Ж\,\gamma_Ж\right)}; \qquad D_Ж = \frac{-2\,\nu\,g\,s}{c^2\,\gamma_Ж\,A_M\,E_M\,(1+\mu_Z\,s)};$$

$$Y_Ж = \frac{g\,A_Ж\,s}{c^2}\left(1 + \frac{\nu^2 D}{\gamma_Ж\,\delta_T\,E_M\,(1+\mu_Z\,s)\,A_Ж}\right); \; \delta_Ж = \frac{2\,\Delta\bar{p}\,A_Ж\,\gamma_Ж}{l\left(\bar{G} - \bar{\dot{u}}_Z\,A_Ж\,\gamma_Ж\right)};$$

$$Z_M = \frac{\gamma_M\,A_M\,s}{g}; \; Y_M = \frac{s}{A_M\,E_M\,(1+\mu_Z\,s)}; \; D_M = \frac{-\nu\,D\,s}{2\,\delta_T\,E_M\,(1+\mu_Z\,s)}.$$

Система уравнений (3) является системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными (независимыми от z) коэффициентами. При неучете взаимодействия между пульсациями жидкости и вибрациями конструкции трубопровода коэффициенты связи $D_Ж = \delta_Ж = D_M = 0$ и система (3) распадается на две независимые подсистемы уравнений, описывающие несвязанные колебания жидкости и конструкции трубопровода.

Сведем систему уравнений (3) к дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4 p}{dz^4} + B_1\,\frac{d^2 p}{dz^2} + B_2\,p = 0\,, \tag{4}$$

где $B_1 = -(Z_Ж\,Y_Ж + Z_M\,Y_M) - D_M\,\delta_Ж$; $B_2 = Z_Ж\,Z_M\,(Y_Ж\,Y_M - D_Ж\,D_M)$.

В результате решения (4) получим корни характеристического уравнения γ_1 и γ_2

$$\gamma_1 = \pm\sqrt{\frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4\,B_2}}{2}} \text{ и } \gamma_2 = \pm\sqrt{\frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4\,B_2}}{2}}\,.$$

Тогда решение системы (3) можно представить в виде

$$F_Z(z,s)=c_1\,ch(\gamma_1 z)+c_2\,sh(\gamma_1 z)+c_3\,ch(\gamma_2 z)+c_4\,sh(\gamma_2 z),$$

$$\dot u_Z(z,s)=\frac{\gamma_1}{Z_M}\left[c_1\,sh(\gamma_1 z)+c_2\,ch(\gamma_1 z)\right]+\frac{\gamma_2}{Z_M}\left[c_3\,sh(\gamma_2 z)+c_4\,ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$p(z,s)=\frac{\gamma_1^2-Y_M}{Z_M\,D_M}\left[c_1\,ch(\gamma_1 z)+c_2\,sh(\gamma_1 z)\right]+\frac{\gamma_2^2-Y_M}{Z_M\,D_M}\left[c_3\,ch(\gamma_2 z)+c_4\,sh(\gamma_2 z)\right],$$

$$G(z,s)=\frac{\gamma_1}{Z_M\,Z_Ж}\left(\delta_Ж-\frac{\gamma_1^2-Y_M}{D_M}\right)\left[c_1\,sh(\gamma_1 z)+c_2\,ch(\gamma_1 z)\right]+$$
$$+\frac{\gamma_2}{Z_M\,Z_Ж}\left(\delta_Ж-\frac{\gamma_2^2-Y_M}{D_M}\right)\left[c_3\,sh(\gamma_2 z)+c_4\,ch(\gamma_2 z)\right],$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 – комплексные постоянные интегрирования.

Постоянные c_1, c_2, c_3 и c_4 определяются из условия, что заданы граничные условия на входе в рассматриваемый элемент трубопровода $p(0,s)$, $G(0,s)$, $F_Z(0,s)$, $\dot u_Z(0,s)$. Тогда элементы передаточной матрицы трубопровода (2) будут определяться выражениями

$$b_{1,1}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left[-\left(\gamma_2^2-Z_Ж Y_Ж-\delta_Ж D_M\right)ch(\gamma_1 z)+\right.$$
$$\left.+\left(\gamma_1^2-Z_Ж Y_Ж-\delta_Ж D_M\right)ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{1,2}=\frac{Z_Ж}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left[\left(\gamma_2^2-Z_Ж Y_Ж-\delta_Ж D_M\right)\frac{sh(\gamma_1 z)}{\gamma_1}-\right.$$
$$\left.-\left(\gamma_1^2-Z_Ж Y_Ж-\delta_Ж D_M\right)\frac{sh(\gamma_2 z)}{\gamma_2}\right],$$

$$b_{1,3}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left(Z_Ж\,D_M+\delta_Ж\,Y_M\right)\left[ch(\gamma_1 z)-ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{1,4}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left[\left(Z_Ж\,Z_M\,D_Ж+\delta_Ж\,\gamma_1^2\right)\frac{sh(\gamma_1 z)}{\gamma_1}-\right.$$
$$\left.-\left(Z_Ж\,Z_M\,D_Ж+\delta_Ж\,\gamma_2^2\right)\frac{sh(\gamma_2 z)}{\gamma_2}\right],$$

$$b_{2,1}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\,\frac{1}{Z_Ж}\left[\gamma_1\left(\gamma_2^2-Z_Ж Y_Ж\right)sh(\gamma_1\cdot z)-\gamma_2\left(\gamma_1^2-Z_Ж Y_Ж\right)sh(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{2,2}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left[-\left(\gamma_2^2-Z_{Ж}Y_{Ж}\right)ch(\gamma_1 z)+\left(\gamma_1^2-Z_{Ж}Y_{Ж}\right)ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{2,3}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\frac{1}{Z_{Ж}Z_M}\left[-\gamma_1\left(Z_{Ж}Z_M D_{Ж}+\delta_{Ж}\gamma_2^2\right)sh(\gamma_1 z)+\right.$$
$$\left.+\gamma_2\left(Z_{Ж}Z_M D_{Ж}+\delta_{Ж}\gamma_1^2\right)sh(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{2,4}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left(Z_M D_{Ж}+\delta_{Ж}Y_{Ж}\right)\left[-ch(\gamma_1 z)+ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{3,1}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}Z_M D_M\left[ch(\gamma_1 z)-ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{3,2}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}Z_M Z_{Ж} D_M\left[-\frac{sh(\gamma_1 z)}{\gamma_1}+\frac{sh(\gamma_2 z)}{\gamma_2}\right],$$

$$b_{3,3}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left[-\left(\gamma_2^2-Z_M Y_M\right)ch(\gamma_1 z)+\left(\gamma_1^2-Z_M Y_M\right)ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{3,4}=\frac{Z_M}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left[-\left(\gamma_2^2-Z_M Y_M-\delta_{Ж}D_M\right)\frac{sh(\gamma_1 z)}{\gamma_1}+\right.$$
$$\left.+\left(\gamma_1^2-Z_M Y_M-\delta_{Ж}D_M\right)\frac{sh(\gamma_2 z)}{\gamma_2}\right],$$

$$b_{4,1}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}D_M\left[\gamma_1 sh(\gamma_1 z)-\gamma_2 sh(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{4,2}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}Z_{Ж}D_M\left[-ch(\gamma_1 z)+ch(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{4,3}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\frac{1}{Z_M}\left[-\gamma_1\left(\gamma_2^2-Z_M Y_M\right)sh(\gamma_1 z)+\right.$$
$$\left.+\gamma_2\left(\gamma_1^2-Z_M Y_M\right)sh(\gamma_2 z)\right],$$

$$b_{4,4}=\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left[-\left(\gamma_2^2-Z_M Y_M-\delta_{Ж}D_M\right)ch(\gamma_1 z)+\right.$$
$$\left.+\left(\gamma_1^2-Z_M Y_M-\delta_{Ж}D_M\right)ch(\gamma_2 z)\right].$$

Анализ выражений для элементов передаточной матрицы (2) показывает, что передаточная матрица (2) является несимметричным (поскольку $b_{1,1}\neq b_{2,2}$ и $b_{3,3}\neq b_{4,4}$) и пассивным (определитель матрицы $\left|b_{i,j}\right|=1$) восьмиполюсником. Только при отсутствии потерь давления ($\delta_Ж = 0$) передаточная матрица (2) становится симметричным восьмиполюсником.

Положив в выражениях для элементов передаточной матрицы $b_{i,j}$ коэффициенты связи $D_Ж = \delta_Ж = D_M = 0$, можно получить известные выражения для элементов четырехполюсника гидросистемы [9] и аналогичные выражения для элементов четырехполюсника конструкции трубопровода $b^*_{i,j}$, $i, j = 3, 4$

$$\begin{cases} F_Z(z,s) = b^*_{3,3}\, F_Z(0,s) + b^*_{3,4}\, \dot{u}_Z(0,s), \\ \dot{u}_Z(z,s) = b^*_{4,3}\, F_Z(0,s) + b^*_{4,4}\, \dot{u}_Z(0,s), \end{cases} \tag{5}$$

где $b^*_{3,3} = b^*_{4,4} = ch(\gamma z)$; $b^*_{3,4} = \dfrac{Z_M}{\gamma} sh(\gamma z)$; $b^*_{4,3} = \dfrac{\gamma}{Z_M} sh(\gamma z)$; $\gamma = \sqrt{Z_M\, Y_M}$.

Четырехполюсник (5) является решением системы уравнений движения стенки трубопровода в осевом направлении и состояния стенки трубопровода (см. (1)), которое может быть использовано для определения АФЧХ стержневых систем.

В продольных колебаниях конструкции трубопровода определяющее значение может играть сильфон, у которого при одинаковой продольной силе продольные перемещения, как правило, значительно больше, чем у трубопровода. Математическую модель сильфона получим из системы (1), используя две основные характеристики сильфона в продольном направлении. Это зависимости продольной силы и давления жидкости от величины сжатия или растяжения сильфона [10]

$$F_z = k_z\, u_z, \qquad p = k_p\, u_z, \tag{6}$$

где u_z – продольное перемещение трубопровода; k_z, k_p – коэффициенты жесткостей по продольной силе и по давлению.

Между коэффициентами жесткости k_z и k_p существует связь через эффективную площадь $A_{эф}$

$$k_z = A_{эф}\, k_p. \tag{7}$$

Для параметра глубины гофрировки $k = R_H / R_B = 1 - 1{,}2$ (R_H, R_B – наружный и внутренний радиусы сильфона) различные методики определения эффективной площади $A_{эф}$ дают близкие значения [10]. Поэтому для определения $A_{эф}$ воспользуемся простейшей формулой, включающей средний радиус $R_{ср}$

$$A_{эф} = \pi\, R_{ср}^2, \quad R_{ср} = \frac{R_H + R_B}{2}.$$

Объединяя уравнения (6) и учитывая (7), получим

$$u_z = \frac{F_z}{k_z} - \frac{p}{k_p}, \quad \text{или} \quad F_z - k_z\, u_z - A_{эф}\, p = 0. \tag{8}$$

Тогда из системы (1) при условиях $ch(\gamma_1\, l) = ch(\gamma_2\, l) = 1$, $sh(\gamma_1\, l) = \gamma_1\, l$, $sh(\gamma_2\, l) = \gamma_2\, l$ и $l \to 0$ с учетом уравнения (8) выражения для элементов передаточной матрицы сильфона $b^C_{i,j}$, $i, j = 1,2,3,4$ примут вид

$$b^C_{1,1} = 1;\; b^C_{1,2} = -\frac{2\,\Delta\bar{p}}{\bar{G} - \bar{\dot{u}}_Z\, A_Ж\, \gamma_Ж} = -R_1;\; b^C_{1,3} = 0;\; b^C_{1,4} = R_1\, A_Ж\, \gamma_Ж;$$

$$b^C_{2,1} = -\frac{2\,\nu\, A_Ж\, \gamma_Ж\, A_{эф}\, s}{k_Z\,(1 + \mu_Z\, s)};\; b^C_{2,2} = 1;\; b^C_{2,3} = \frac{2\,\nu\, A_Ж\, \gamma_Ж\, s}{k_Z\,(1 + \mu_Z\, s)};\; b^C_{2,4} = 0;$$

$$b^C_{3,1} = b^C_{3,2} = 0;\quad b^C_{3,3} = 1;\; b^C_{3,4} = m\, s;$$

$$b^C_{4,1} = -\frac{A_{эф}\, s}{k_Z\,(1 + \mu_Z\, s)};\quad b^C_{4,2} = 0;\quad b^C_{4,3} = \frac{s}{k_Z\,(1 + \mu_Z\, s)};\quad b^C_{4,4} = 1,$$

где m – масса сильфона.

2. Импедансный метод. Для определения АФЧХ импедансным методом при совместных продольных колебаниях жидкости и конструкции трубопровода будем использовать граничные условия, представленные в общем виде аналогично тому, как в работе [11]. Пусть заданы граничные условия на выходе элемента гидроупругой системы (трубопровода, сильфона) в виде

$$\begin{cases} p_2 = \varphi_{1,1}\, G_2 + \varphi_{1,2}\, F_{Z2}, \\ \dot{u}_{Z2} = \varphi_{2,1}\, G_2 + \varphi_{2,2}\, F_{Z2}, \end{cases} \tag{9}$$

где p_2, G_2, F_{Z2} и $\dot{u}_{Z2}$ – параметры гидроупругой системы на выходе элемента; $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{2,1}$ и $\varphi_{2,2}$ – импедансные соотношения на выходе элемента.

Используя передаточную матрицу элемента (2), требуется определить граничные условия на входе в рассматриваемый элемент в аналогичном (9) виде

$$\begin{cases} p_1 = \psi_{1,1}\, G_1 + \psi_{1,2}\, F_{Z1}, \\ \dot{u}_{Z1} = \psi_{2,1}\, G_1 + \psi_{2,2}\, F_{Z1}, \end{cases} \tag{10}$$

где p_1, G_1, F_{Z1} и $\dot{u}_{Z1}$ – параметры гидроупругой системы на входе элемента; $\psi_{1,1}$, $\psi_{1,2}$, $\psi_{2,1}$ и $\psi_{2,2}$ – импедансные соотношения на входе элемента.

Для определения импедансных соотношений $\psi_{1,1}$, $\psi_{1,2}$, $\psi_{2,1}$ и $\psi_{2,2}$ можно использовать следующий порядок расчета:

– находим матрицу $a_{i,j}$, $i, j = 1,2,3,4$, обратную матрице $b_{i,j}$, $i, j = 1,2,3,4$;

– подставляем граничные условия (9) в матрицу $a_{i,j}$, $i,j = 1,2,3,4$;

– исключая из полученной системы уравнений G_2, F_{Z2}, получим искомые импедансные соотношения $\psi_{1,1}$, $\psi_{1,2}$, $\psi_{2,1}$ и $\psi_{2,2}$

$$\psi_{1,1} = \left[\left(a_{1,1}\varphi_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,4}\varphi_{2,1}\right)\left(a_{3,1}\varphi_{1,2} + a_{3,3} + a_{3,4}\varphi_{2,2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(a_{1,1}\varphi_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4}\varphi_{2,2}\right)\left(a_{3,1}\varphi_{1,1} + a_{3,2} + a_{3,4}\varphi_{2,1}\right)\right] / D,$$

$$\psi_{1,2} = \left[- \left(a_{1,1}\varphi_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,4}\varphi_{2,1}\right)\left(a_{2,1}\varphi_{1,2} + a_{2,3} + a_{2,4}\varphi_{2,2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(a_{1,1}\varphi_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4}\varphi_{2,2}\right)\left(a_{2,1}\varphi_{1,1} + a_{2,2} + a_{2,4}\varphi_{2,1}\right)\right] / D,$$

$$\psi_{2,1} = \left[\left(a_{4,1}\varphi_{1,1} + a_{4,2} + a_{4,4}\varphi_{2,1}\right)\left(a_{3,1}\varphi_{1,2} + a_{3,3} + a_{3,4}\varphi_{2,2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(a_{4,1}\varphi_{1,2} + a_{4,3} + a_{4,4}\varphi_{2,2}\right)\left(a_{3,1}\varphi_{1,1} + a_{3,2} + a_{3,4}\varphi_{2,1}\right)\right] / D,$$

$$\psi_{2,2} = \left[- \left(a_{4,1}\varphi_{1,1} + a_{4,2} + a_{4,4}\varphi_{2,1}\right)\left(a_{2,1}\varphi_{1,2} + a_{2,3} + a_{2,4}\varphi_{2,2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(a_{4,1}\varphi_{1,2} + a_{4,3} + a_{4,4}\varphi_{2,2}\right)\left(a_{2,1}\varphi_{1,1} + a_{2,2} + a_{2,4}\varphi_{2,1}\right)\right] / D,$$

$$D = \left(a_{2,1}\varphi_{1,1} + a_{2,2} + a_{2,4}\varphi_{2,1}\right)\left(a_{3,1}\varphi_{1,2} + a_{3,3} + a_{3,4}\varphi_{2,2}\right) -$$
$$- \left(a_{2,1}\varphi_{1,2} + a_{2,3} + a_{2,4}\varphi_{2,2}\right)\left(a_{3,1}\varphi_{1,1} + a_{3,2} + a_{3,4}\varphi_{2,1}\right).$$

При определении коэффициентов усиления элемента гидроупругой сети импедансные соотношения следует представить в виде

$$\begin{cases} p_2 = W_{1,1}\, p_1 + W_{1,2}\, \dot{u}_{Z1}, \\ \dot{u}_{Z2} = W_{2,1}\, p_1 + W_{2,2}\, \dot{u}_{Z1}, \end{cases} \qquad (11)$$

где $W_{1,1}$, $W_{1,2}$, $W_{2,1}$ и $W_{2,2}$ – коэффициенты усиления элемента.

Для определения частотных характеристик $W_{1,1}$, $W_{1,2}$, $W_{2,1}$ и $W_{2,2}$ можно в передаточную матрицу элемента (2) подставить матрицу, обратную (10). Тогда получим

$$\begin{cases} W_{1,1} = b_{1,1} + b_{1,2}\, \psi^*_{1,1} + b_{1,3}\, \psi^*_{2,1}, \\ W_{1,2} = b_{1,4} + b_{1,2}\, \psi^*_{1,2} + b_{1,3}\, \psi^*_{2,2}, \\ W_{2,1} = b_{4,1} + b_{4,2}\, \psi^*_{1,1} + b_{4,3}\, \psi^*_{2,1}, \\ W_{2,2} = b_{4,4} + b_{4,2}\, \psi^*_{1,2} + b_{4,3}\, \psi^*_{2,2}, \end{cases}$$

где $\psi^*_{1,1} = \dfrac{\psi_{2,2}}{\Delta}$; $\psi^*_{1,2} = \dfrac{-\psi_{1,2}}{\Delta}$; $\psi^*_{2,1} = \dfrac{-\psi_{2,1}}{\Delta}$; $\psi^*_{2,2} = \dfrac{\psi_{1,1}}{\Delta}$; $\Delta = \psi^*_{1,1}\, \psi^*_{2,2} - \psi^*_{1,2}\, \psi^*_{2,1}$.

Для определения собственных частот колебаний гидроупругой системы необходимо иметь в каком-либо сечении граничные условия, перенесенные “слева” и “справа” от сечения. Так, если на входе в элемент гидроупругой сети известны граничные условия (10), полученные при переносе граничных условий от выхода на вход элемента, и граничные условия, перенесенные с другого конца гидроупругой системы

$$\begin{cases} p_1 = \varphi_{1,1}^* G_1 + \varphi_{1,2}^* F_{Z1}, \\ \dot{u}_{Z1} = \varphi_{2,1}^* G_1 + \varphi_{2,2}^* F_{Z1}, \end{cases} \tag{12}$$

то, приравнивая (10) и (12), получим уравнение для определения собственных частот колебаний гидроупругой системы

$$\Psi = \left(\psi_{1,1} - \varphi_{1,1}^*\right)\left(\psi_{2,2} - \varphi_{2,2}^*\right) -$$

$$- \left(\psi_{1,2} - \varphi_{1,2}^*\right)\left(\psi_{2,1} - \varphi_{2,1}^*\right) = 0 \tag{13}$$

При неучете взаимодействия между колебаниями жидкости и вибрациями конструкции трубопровода выражение (13) распадается на два уравнения для определения частот колебаний парциальных систем жидкости и конструкции трубопровода

$$\psi_{1,1} - \varphi_{1,1}^* = 0 \quad \text{и} \quad \psi_{2,2} - \varphi_{2,2}^* = 0.$$

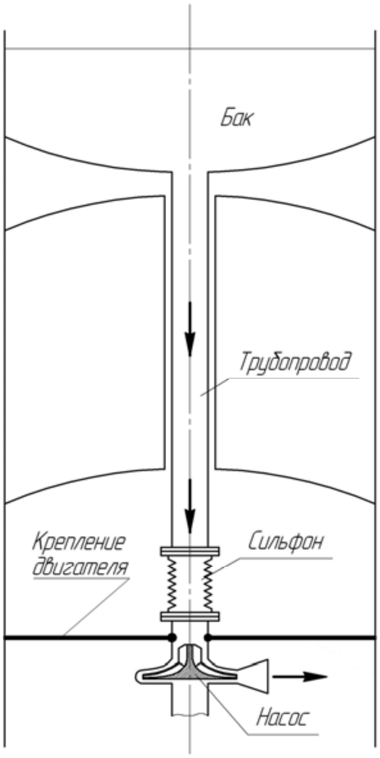
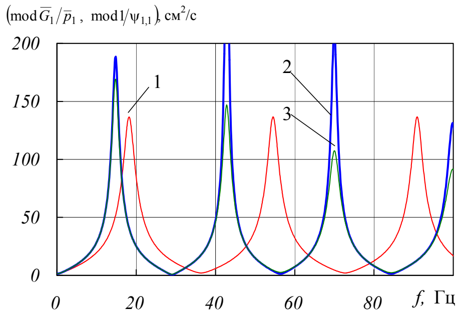


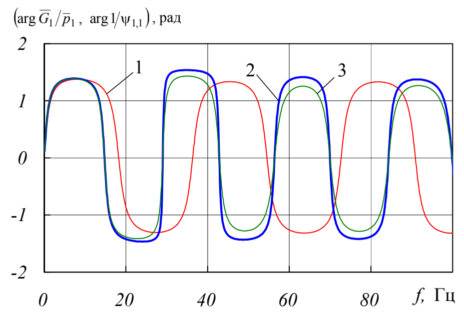
Рис.1

3. Численный пример. Для исследования взаимного влияния конструкции трубопровода и жидкости при определении АФЧХ рассмотрим тестовый прямолинейный трубопровод линии питания ЖРД, схема которого представлена на рис. 1. Алюминиевый трубопровод длиной 10 м, внутренним диаметром 0,4 м и толщиной стенок 4 мм соединяет питающий бак и двигатель. Скорость рабочей жидкости в трубопроводе 5 м/с, потери давления 1,5 кГс/см^2. Зададим граничные условия в месте соединения трубопровода с двигателем $\varphi_{1,1} = 0{,}7\ c/см^2$, $\varphi_{1,2} = 0$, $\varphi_{2,1} = 0$, $\varphi_{2,2} = 0$ и в месте соединения трубопровода с питающим баком $\varphi_{1,1}^* = 0$, $\varphi_{1,2}^* = \varphi_{2,1}^* = 0$, $\varphi_{2,2}^* = 0$.

Продольную жесткость сильфона k_z будем задавать в долях продольной жесткости трубопровода $k_z^{тр}$, которая может быть найдена из формулы, связывающей напряжение σ_z и относительное изменение длины трубопровода в продольном направлении ε_z

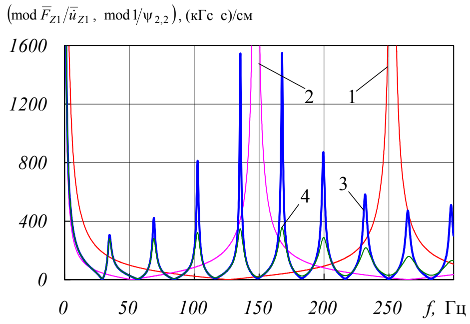


а)

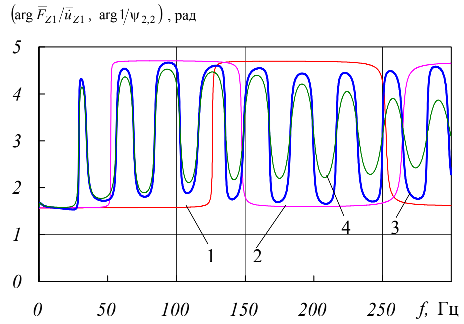


б)

Рис. 2

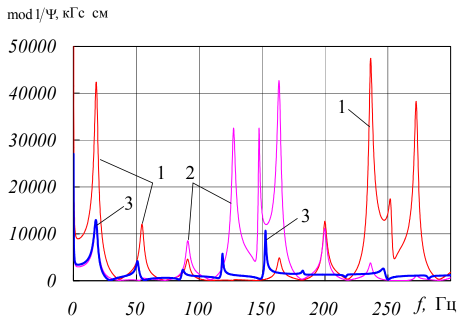


а)

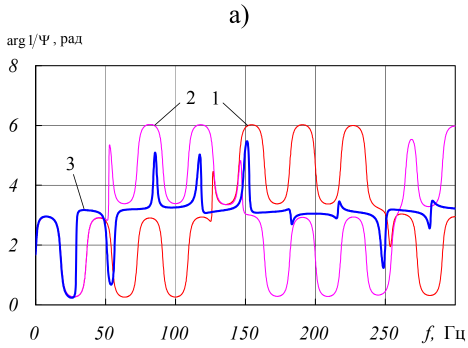


б)

Рис. 3



а)



б)

Рис. 4

$$\sigma_z = E_M\ \varepsilon_z .$$

Из этой формулы может быть определен коэффициент жесткости трубопровода

$$k_z^{mp} = \frac{E_M\ A_M}{l} .$$

Под парциальными колебательными системами будем понимать колебательные системы с распределенными параметрами жидкости и конструкции трубопровода без учета взаимодействия между жидкостью и конструкцией трубопровода ($D_Ж = \delta_Ж = D_M = 0$). На рис. 2 – 4 представлены результаты расчетов некоторых АФЧХ исследуемого трубопровода. Из рис. 2 (позиция 1) и рис. 4 (позиция 1) видно, что первая собственная частота колебаний парциальной системы жидкости составляет 18,2 Гц. Первая собственная частота колебаний парциальной системы конструкции трубопровода без сильфона составляет 252,6 Гц (рис. 3, позиция 1 и рис. 4, позиция 1). При установке сильфона с жесткостью $0{,}5\,k_z^{mp}$ первая собственная частота колебаний парциальной системы конструкции трубопровода снижается до 147,5 Гц (см. рис. 3, позиция 2 и рис. 4, позиция 2), при установке сильфона с жесткостью $0{,}2\,k_z^{mp}$ – снижается до 135,7 Гц, при установке сильфона с жесткостью $0{,}1\,k_z^{mp}$ – снижается до 131,2 Гц, приближаясь к частоте колебаний 126,3 Гц, которая соответствует собственной частоте колебаний парциальной системы конструкции трубопровода со свободным концом ($F_{Z2} = 0$).

При учете взаимного влияния пульсаций жидкости и вибраций конструкции трубопровода АФЧХ трубопровода могут существенно изменяться. Об этом свидетельствуют результаты расчетов АФЧХ трубопровода с жесткостью сильфона $0{,}5\,k_z^{mp}$, представленные на рис. 2 (позиция 2), рис. 3 (позиция 3) и рис. 4 (позиция 3). При этом для определения собственных частот совместных продольных колебаний конструкции трубопровода и жидкости следует использовать частотные характеристики Ψ или $1/\Psi$ по формуле (13), результаты расчетов по которой помещены на рис. 4 (позиция 3). Из этого рисунка видно, что первая собственная частота колебаний гидроупругой системы (18,1 Гц) слабо изменяется при учете взаимного влияния пульсаций жидкости и вибраций конструкции трубопровода. Это обусловлено большим отличием собственных частот колебаний парциальных систем жидкости (18,2 Гц) и конструкции трубопровода (147,5 Гц). Вторая собственная частота колебаний гидроупругой системы уменьшилась на 3,6 Гц и составила 50,9 Гц, третья – на 4 Гц и составила 86,9 Гц соответственно. Собственная частота колебаний гидроупругой системы, близкая к частоте колебаний парциальной системы конструкции трубопровода (147,5 Гц), увеличилась до 152,7 Гц. Такие соотношения между частотами колебаний парциальных и связанной систем, когда частоты колебаний парциальных систем располагаются между частотами колебаний связанной системы, находятся в соответствии с теорией колебаний [12].

Следует также отметить, что в данной работе сильфон не является, как это обычно принято считать [13], сосредоточенной упругостью для гидравлической подсистемы. Входящее в уравнение неразрывности жидкости (1) слагаемое с продольной скоростью перемещения трубопровода $\dot{u}_z$ может быть соизмеримым с другими членами этого уравнения, но взаимное влияние продольных колебаний жидкости и вибраций конструкции в соответствии с теорией колебаний [12] определяется в первую очередь близостью частот колебаний парциальных систем жидкости и конструкции трубопровода. Если эти частоты колебаний достаточно разнесены, то характеристики сильфона, прежде всего его жесткость в продольном направлении, не будут оказывать существенного влияния на динамику гидравлической подсистемы.

Представленные выше результаты расчетов АФЧХ выполнены с учетом демпфирования, соответствующего демпфированию материала трубопровода. Эти результаты мало отличаются от результатов расчета АФЧХ без учета демпфирования. На рис. 2 (позиция 3) и рис. 3 (позиция 4) помещены результаты определения АФЧХ с учетом демпфирования, соответствующего конструкционному демпфированию. Из этих рисунков видно, что демпфирование конструкции трубопровода может оказывать заметное влияние не только на АФЧХ конструкции трубопровода, но также на АФЧХ гидравлической подсистемы.

Заключение. В работе представлена математическая модель трубопровода с распределенными параметрами, учитывающая взаимодействие в продольном направлении жидкости и конструкции трубопровода, а также потери давления и демпфирование конструкции трубопровода. Определены элементы передаточной матрицы трубопровода, которая является пассивным восьмиполюсником.

Разработана математическая модель сильфона в продольном направлении и определена его передаточная матрица.

Получены выражения для определения импедансных соотношений гидроупругой системы.

Для тестового трубопровода линии питания ЖРД определены АФЧХ без учета и с учетом взаимодействия в продольном направлении жидкости и конструкции трубопровода. Показано, что влияние взаимодействия жидкости и конструкции трубопровода в продольном направлении на собственные частоты колебаний связанной гидроупругой системы эффективно при определенной близости собственных частот колебаний парциальных систем жидкости и конструкции трубопровода. Отмечено влияние демпфирования конструкции трубопровода не только на АФЧХ конструкции трубопровода, но и на АФЧХ гидравлической подсистемы.

Перспективным в данном направлении исследований является разработка методики определения АФЧХ гидроупругой системы с трубопроводом пространственной конфигурации.

1. *Натанзон М. С.* Продольные автоколебания жидкостной ракеты / *М. С. Натанзон*. – М. : Машиностроение, 1977. – 208 с.
2. *Самарин А. А.* Вибрации трубопроводов энергетических установок и методы их устранения / *А. А. Самарин*. – М. : Энергия, 1979. – 288 с.
3. *Фэшбог* Резонанс в системах топливоподачи ракет с ЖРД / *Фэшбог, Стритер* // Тр. амер. о-ва инж-мех. ТОИР – 1965. – № 4. – С. 181 – 188.
4. *Вуд* Исследование связанных колебаний конструкции с протекающей жидкостью под действием периодических возмущений / *Вуд* // Тр. амер. о-ва инж.-мех. ТОИР – 1968. – № 4. – С. 106 – 115.
5. *Торли* Нестационарные давления в гидравлических трубопроводах / *Торли* // Тр. амер. о-ва инж.-мех. ТОИР – 1969. – № 3. – С. 131 – 141.
6. *Зилке* Вынужденные и самовозбуждающиеся колебания в линиях подачи топлива / *Зилке, Уайли, Келлер* // Тр. амер. о-ва инж.-мех. ТОИР – 1968. – № 4. – С. 112 – 119.
7. *Уиггерт* Влияние степени закрепления колена на переходной режим изменения давления в трубопроводе / *Уиггерт, Отуэлл, Хатфилд* // Теор. основы инж. расчетов. – 1985. – № 3. – С. 249 – 258.
8. Снижение виброакустических нагрузок в гидромеханических системах / *А. А. Иголкин, А. Н. Крючков, Г. М. Макарьянц, А. Б. Прокофьев, Е. В. Шахматов, В. П. Шорин* – Самара, 2005. – 314 с.
9. *Пилипенко В. В.* Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем / *В. В. Пилипенко, В. А. Задонцев, М. С. Натанзон* – М. : Машиностроение, 1977. – 352 с.
10. Сильфоны. Расчет и проектирование / *Л. Е. Андреева, А. И. Беседа, Ю. А. Богданова, Л. Н. Горячева, Г. Е. Зверьков, В. В. Петровский.* – М. : Машиностроение, 1975. – 156 с.
11. *Гликман Б. Ф.* Нестационарные течения в пневмогидравлических цепях / *Б. Ф. Гликман*. – М. : Машиностроение, 1979. – 256 с.
12. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний / *Л. И. Мандельштам*. – М.: Наука, 1972. – 470 с.
13. *Колесников К. С.* Динамика ракет / *К. С. Колесников*. – М. : Машиностроение, 1980. – 376 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 07.09.09
в окончательном варианте 07.09.09