

КОЛЕБАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Выполнен численный анализ спектра частот продольных и изгибных колебаний регулярных континуальных балок, имеющих сосредоточенные включения в виде упругих опор или шарниров. Определены зависимости параметров колебаний от количества пролетов, граничных условий, типа сосредоточенных включений и жесткости упругих связей. Показана высокая эффективность применения теории конечных автоматов в расчетах свободных колебаний непрерывно-дискретных балок с повторяющимися элементами.

A numerical analysis of a spectrum of frequencies of longitudinal and bending vibrations of regular continuous beams with lumped inclusions in the form of elastic supports or joint hinges is carried out. Dependences of parameters of vibrations on quantity of spans, boundary conditions, type of the lumped inclusions and stiffness of elastic elements are defined. High efficiency of application of the theory of finite state machines in computations of free vibrations of continuous-discrete beams with recurring elements is shown.

Расчетные схемы различных механических систем содержат, как правило, большое число повторяющихся элементов, а также дискретные включения в распределенные параметры в виде сосредоточенных масс, упругих опор или шарниров [1]. В мостовых конструкциях такие задачи возникают при моделировании колебаний неразрезных пролетных строений балочных мостов, многопанельных рам, ферм, балок проезжей части и др. Количество вычисляемых параметров собственных колебаний может быть различным для каждой конкретной задачи и в ряде случаев охватывает как минимум первую зону сгущения [2]. Анализ спектра частот и форм колебаний необходим при учете динамического воздействия подвижных нагрузок, диагностике различных повреждений, например трещин, ослабления упругих связей, предварительных напряжений, оценки степени защемления и др. Встречаются также почти регулярные конструкции, которые путем включения небольшого числа элементов могут быть преобразованы в регулярные, что упрощает последующие динамические расчеты.

В этой связи целесообразно изучение широкого класса регулярных и квазирегулярных балочных конструкций для установления зависимости их динамических свойств от количества пролетов, граничных условий, типа сосредоточенных включений, жесткости упругих закреплений и других факторов.

Наиболее эффективное решение достигается для полностью регулярных стержневых систем, когда краевые условия допускают периодические продолжения в каждом из направлений. Это свойство использовали в своих работах многие авторы [3 – 5], применяя метод перемещений (деформаций) к динамическому расчету многократно симметричных систем. Другие направления построения уравнений частот основываются на применении обобщенных функций к исследованию колебаний одномерных стержневых систем [1, 6] или методов начальных параметров, динамических жесткостей и податливостей, прогонки и др. [7 – 9].

В данной статье показано применение теории конечных автоматов к исследованию колебаний непрерывно-дискретных балок с повторяющимися элементами.

Рассмотрим сначала продольные колебания одномерной балочной конструкции с сосредоточенными включениями в виде дискретных упругих связей с жесткостями c_k и c'_k (рис. 1).

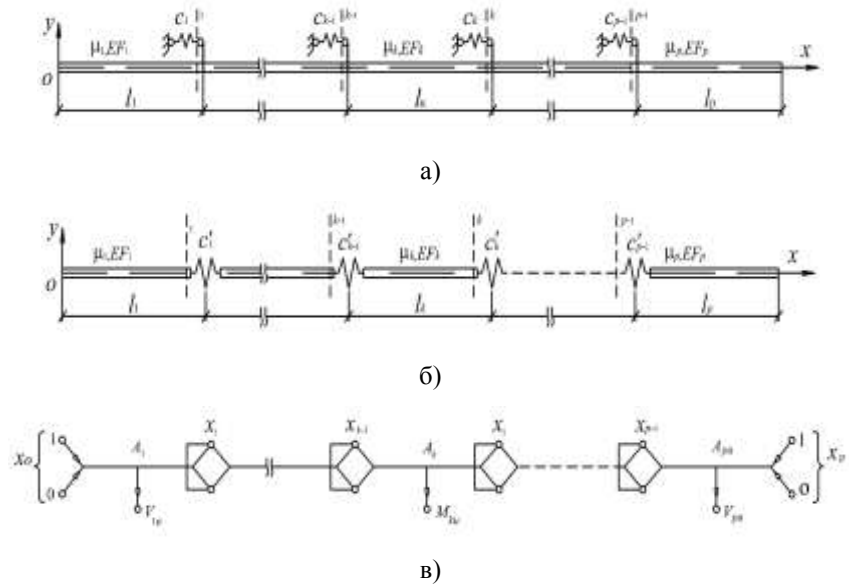


Рис. 1

На рис. 1,а, б представлены континуальные балки с сосредоточенными включениями двух типов: в жесткость упругой среды в виде дискретных упругих опор жесткостью c_k и с включениями в продольную жесткость балки с участками, соединенными между собой упругими связями жесткостью c'_k . Интенсивность массы μ_k , продольная жесткость EF_k приняты постоянными по длине k -го участка и в общем случае различными для каждого из участков.

Согласно [10], а также логической схеме балки (рис. 1,в) из последовательно связанных конечных подавтоматов A_1, A_2, \dots, A_p , представим уравнение частот продольных колебаний в виде произведения ассоциированных матриц $V_1, M_2, \dots, M_{p-1}, V_p$ с характеристиками соответствующих участков балки ($k = 1, 2, \dots, p$)

$$V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k V_p = 0, \quad (1)$$

или для случая, когда длины пролетов, продольная жесткость и интенсивность массы одинаковы для всех частей составной балки,

$$V_1 M_k^{p-2} V_p = 0. \quad (2)$$

Так как рассматриваемое сечение находится слева от упругой связи, то матрица M_k k -го участка балки с непрерывно-дискретными параметрами определяется соотношением

$$M_k = R_{ck} M_{xu}, \quad (3)$$

где R_{ck} – матрица упругой связи; M_{xu} – ассоциированная матрица для продольных колебаний обычного участка балки, не имеющего сосредоточенных включений.

Для двух типов упругих связей (рис. 1,а, б) матрицы R_{ck} и R'_{ck} будут иметь вид:

$$R_{ck} = \begin{vmatrix} 1 & c_k \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; R'_{ck} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/c'_k & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

В результате, для M_k и M'_k можно записать

$$M_k = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} \text{КП} \\ \text{НП} \end{array} & \begin{array}{c} 01 \\ 10 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 10 \\ 01 \end{array} & \begin{vmatrix} \cos \lambda_k + \frac{c_k}{\alpha \lambda_k} \sin \lambda_k & -\alpha \lambda_k \sin \lambda_k + c_k \cos \lambda_k \\ \frac{1}{\alpha \lambda_k} \sin \lambda_k & \cos \lambda_k \end{vmatrix} & \end{array}; \quad (5)$$

$$M'_k = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} \text{КП} \\ \text{НП} \end{array} & \begin{array}{c} 01 \\ 10 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 10 \\ 01 \end{array} & \begin{vmatrix} \cos \lambda_k & -\alpha \lambda_k \sin \lambda_k \\ \frac{1}{\alpha \lambda_k} \sin \lambda_k + \frac{1}{c'_k} \cos \lambda_k & \cos \lambda_k - \frac{\alpha \lambda_k}{c'_k} \sin \lambda_k \end{vmatrix} & \end{array}; \quad (6)$$

или в сокращенной форме с учетом обозначений [11]

$$M_k = M_{xu} + c_k M_{01}^{(1)}; M'_k = M_{xu} + \frac{1}{c'_k} M_{10}^{(2)}. \quad (7)$$

Очевидно, что при $c_k \rightarrow 0$, $c'_k \rightarrow \infty$ приходим к схеме в виде сплошной балки, а при $EF_k \rightarrow \infty$ получим дискретную схему из абсолютно твердых тел массой m_k , соединенных упругими связями, для которой

$$M_k = \begin{vmatrix} 1 & c_k - m_k \omega_i^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; M'_k = \begin{vmatrix} 1 & -m_k \omega_i^2 \\ \frac{1}{c'_k} & 1 - \frac{m_k \omega_i^2}{c'_k} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Например, для трехпролетной квазирегулярной балки с двумя одинаковыми включениями I и II типов (рис.1,а, б) с закрепленным левым и свободным правым концами можно записать

$$V_1 = V'_1 = \begin{vmatrix} 1 & \\ \alpha \lambda_k & \cos \lambda_k \end{vmatrix}; V_3 = \begin{vmatrix} -\alpha \lambda_k \sin \lambda_k + c_k \cos \lambda_k & \\ & \cos \lambda_k \end{vmatrix};$$

$$V_3' = \left\| \begin{array}{cc} -\alpha\lambda_k \sin \lambda_k & \\ \cos \lambda_k - \frac{\alpha\lambda_k}{c_k'} \sin \lambda_k & \end{array} \right\|; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_k; c_1 = c_2 = c_k; c_1' = c_2' = c_k'.$$

После подставки в (1) и преобразований получим характеристические уравнения:

– для включений I типа

$$\cos 3\lambda_k + \frac{c_k}{\alpha\lambda_k} \left(\sin 3\lambda_k + \frac{c_k}{\alpha\lambda_k} \sin^2 \lambda_k \cos \lambda_k \right) = 0; \quad (9)$$

– для включений II типа

$$\cos 3\lambda_k - \frac{\alpha\lambda_k}{c_k'} \left(\sin 3\lambda_k - \frac{\alpha\lambda_k}{c_k'} \sin^2 \lambda_k \cos \lambda_k \right) = 0. \quad (10)$$

Используя предельные переходы, несложно получить частные случаи этой задачи. Так при $c_k \rightarrow 0$, $c_k' \rightarrow \infty$ уравнения (9), (10) будут одинаковыми и равны $\cos 3\lambda_k = 0$, как для однородной балки длиной $3l_k$. Если $c_k' = 0$, получим уравнения частот $\cos \lambda_k = 0$; $\sin \lambda_k = 0$ отдельных участков балки с кодами граничных условий 01–10 и 10–10. Переход к дискретной системе с двумя степенями свободы осуществляется при $EF_k \rightarrow \infty$, что приводит к следующему уравнению

$$\psi_k^2 - 3\psi + 1 = 0, \quad (11)$$

где $\psi_k = \frac{m_k \omega_i^2}{c_k'}$.

Уравнения (10), (11) в точности совпадают с решениями, приведенными в работе [1].

Условия периодичности в балочных конструкциях позволяют упростить значительную часть расчетов и получить несложные машинные алгоритмы и программы для ЭВМ. Так при возведении в n -ю степень слагаемых (7) получим:

$$M_{xu}^n = \left\| \begin{array}{cc} \cos n\lambda_k & -\alpha\lambda_k \sin n\lambda_k \\ \frac{1}{\alpha\lambda_k} \sin n\lambda_k & \cos n\lambda_k \end{array} \right\|; \quad (12)$$

$$\left(c_k M_{01}^{(1)} \right)^n = c_k^n \left(\frac{\sin \lambda_k}{\alpha\lambda_k} \right)^{n-1} M_{01}^{(1)}; \left(\frac{1}{c_k'} M_{10}^{(2)} \right)^n = \frac{1}{(c_k')^n} (-\alpha\lambda_k \sin \lambda_k)^{n-1} M_{10}^{(2)}.$$

Далее, используя свойства биномиальных коэффициентов, несложно получить выражения для матриц M_k^n и $(M_k')^n$:

$$M_k^n = \sum_{m=0}^n C_n^m M_{xu}^{n-m} c_k^m \left(M_{01}^{(1)} \right)^m; \quad n=1, 2, \dots, p-2; \quad (13)$$

$$(M'_k)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m M_{xu}^{n-m} \left(\frac{M_{10}^{(2)}}{c'_k} \right)^m, \quad (14)$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$; $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Решения (5), (6) и (13), (14) дают возможность в простой форме получить уравнения частот для продольных колебаний регулярной балки с сосредоточенными включениями. В результате вычислений получены значения корней уравнения (2) для различных сочетаний однородных граничных условий и соответствующие графики зависимости значений λ_k от числа пролетов p , относительной жесткости упругих связей \tilde{c}_k , \tilde{c}'_k , ($\tilde{c}_k = c_k l_k / EF_k$), ($\tilde{c}'_k = c'_k l_k / EF_k$) и номера формы колебаний i .

На рис. 2 представлен график-номограмма собственных значений λ_k для балки с защемленными концами и первым типом сосредоточенных включений (верхняя часть графика) и балки со свободными концами и вторым типом сосредоточенных включений (нижняя часть графика). Линия, разделяющая эти две части, соответствует предельному случаю, когда $\tilde{c}_k = 0$, $\tilde{c}'_k = \infty$.

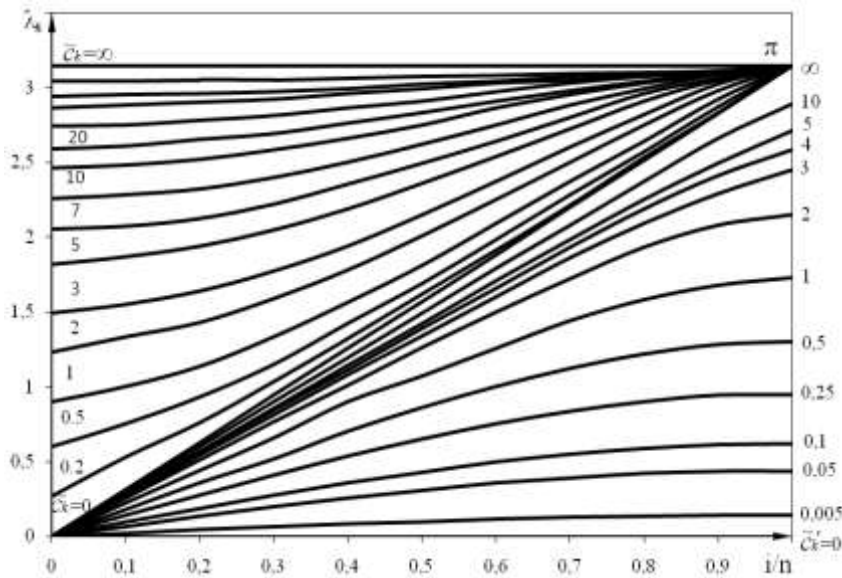


Рис. 2

Для нахождения величины λ_k по графикам на рис. 2 необходимо отрезок между крайними границами спектра частот по оси абсцисс разделить на количество пролетов неразрезной балки. Ординаты точек пересечения прямых линий, параллельных оси ординат, с соответствующей кривой дают значения частотного параметра λ_k первой зоны сгущения.

Уравнения частот собственных колебаний для других граничных условий имеют отличия только в матрицах концевых участков V_1 и V_p . Графики λ_k по своей конфигурации будут совершенно аналогичны графикам на рис. 2, но смещены по оси абсцисс на величину δ , зависящую от типа гра-

ничных условий [11]. Так значения λ_k для однопролетных балок можно представить в виде выражения $\lambda_k = \pi(i + \delta)$, где $\delta = 0$ для балок с включениями I типа и защемленными концами и II типа – со свободными; $\delta = -0,5$ – для балок двух типов, один конец которых заделан, другой – свободен; $\delta = -1$ – для балок I типа со свободными и II типа – с защемленными концами. При этом количество значений λ_k , которое можно определить по рис. 2 для p -пролетной балки составляет соответственно p , когда $\delta = 0$; $(p-1)$, $\delta = -0,5$ и $(p-2)$, $\delta = -1$.

Полученные результаты несложно распространить также на задачи о крутильных колебаниях балок с сосредоточенными включениями.

Теперь рассмотрим свободные изгибные колебания регулярной балки, которая имеет постоянную жесткость EI_k и интенсивность массы μ_k , а также сосредоточенные включения в жесткость основания в виде упругих опор и защемлений и в изгибную жесткость балки – упругих шарниров I и II рода [1].

Как и в предыдущем случае, исследуем закономерность изменения частотного параметра λ в зависимости от граничных условий, количества пролетов, типа сосредоточенных включений, жесткости упругих связей и формы колебаний. Сосредоточенные включения рассматривались в следующих сочетаниях (рис. 3):

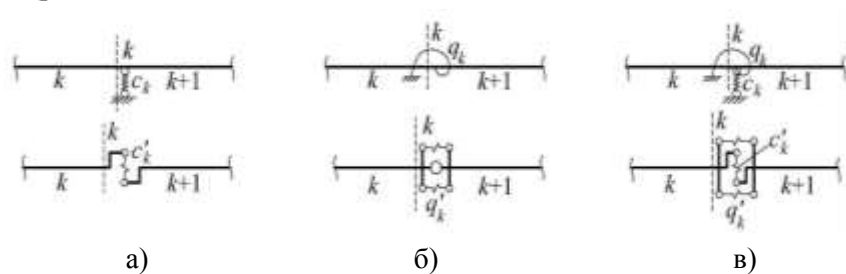


Рис. 3

Структура ассоциированных матриц для участка балки, имеющего включения I типа на левом конце, будет аналогичной [11]. Второй тип включений описывается матрицей M_k с учетом некоторых особенностей. Так, для включения в изгибную жесткость балки в виде упругой связи между концами двух участков (рис. 3,а) любой из подавтоматов A_2, A_3, \dots, A_{p-1} определяется четырьмя состояниями граничных параметров и, следовательно, матрицей M_{1k} второго порядка с элементами матрицы M_{xy} [10], соответствующими кодам 1100-0101, 1100-1100 и 0101-0101, 0101-1100. При этом к элементам второй строки прибавляются элементы первой, умноженные на величину, обратную жесткости упругой связи c'_k .

Аналогичным образом ассоциированная матрица M_{2k} для упругого шарнира I рода жесткостью q'_k (рис. 3,б) может быть получена из матрицы M_{xy} прибавлением к элементам второй и шестой строк соответствующих элементов первой и пятой, умноженных на упругую постоянную $(q'_k)^{-1}$.

Наконец, для общего случая упругого шарнира (рис. 3,в), включенного в изгибную жесткость произвольного участка балки, матрица M_{3k} получается из матрицы M_{xy} последовательным прибавлением к второй, пятой и шестой строкам элементов первой строки, умноженных соответственно на произведение обратных жесткостей $(c'_k q'_k)^{-1}$ и отдельно на каждую из них. Кроме того, дополнительно к шестой строке прибавляются элементы второй и пятой строк, умноженные соответственно на величины $(c'_k)^{-1}$ и $(q'_k)^{-1}$.

В матричной форме структуру M_{3k} можно представить следующим образом:

$$M_{3k} = M_{xy} + (q'_k)^{-1} M_{1100}^{(2)} + (c'_k)^{-1} M_{1100}^{(5)} + (c'_k q'_k)^{-1} M_{1100}^{(6)} + (c'_k)^{-1} M_{1010}^{(6)} + (q'_k)^{-1} M_{0101}^{(6)}. \quad (15)$$

Предельные переходы позволяют получить все частные случаи задачи для сосредоточенных включений второго типа с различными упругими связями. Векторы V_1 и V_p в уравнениях (1), (2) соответствуют строкам или столбцам матриц M_{xy} , M_{2k} , M_{3k} с кодами заданных граничных условий.

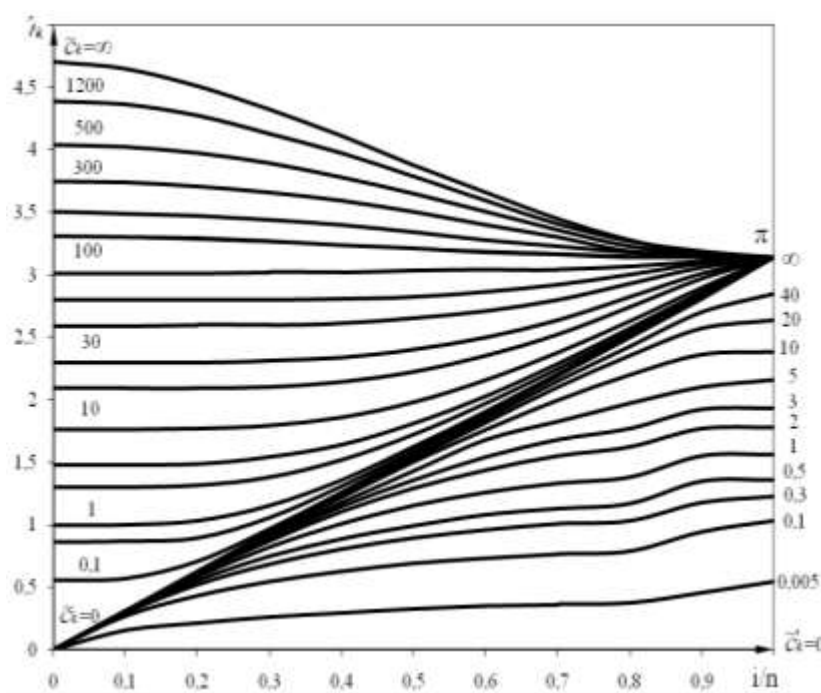


Рис. 4

На рис. 4 – 6 приведены графики-номограммы значений λ_k первой зоны сгущения для балок с сосредоточенными включениями I, II типов (рис. 3) с произвольным количеством пролетов и жесткостью упругих связей. Граничные условия для балок с включениями, представленными на рис. 3,а и 3,б, принимались в виде шарнирного опирания (коды 0101 – 0101), а для балок (рис. 3,в) – в виде заделки (0011 – 0011).

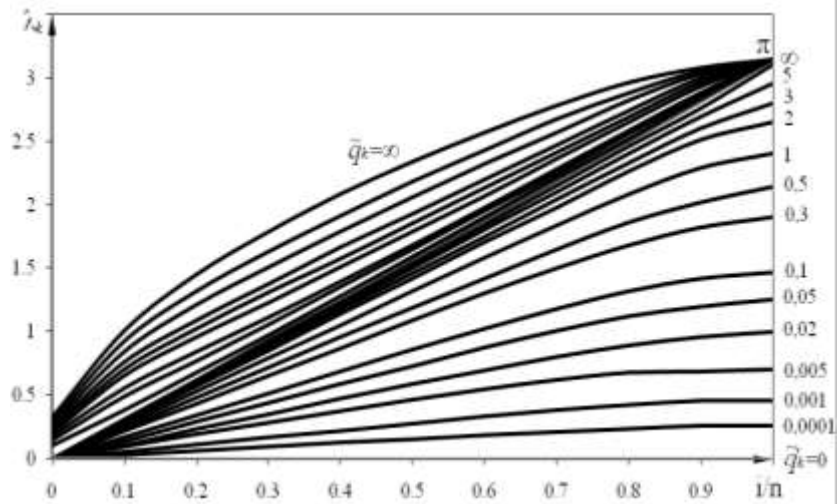


Рис. 5

Как и в предыдущих случаях интервал по оси абсцисс между вертикальными ограничивающими линиями необходимо разделить на количество пролетов p и восстановить перпендикуляры до пересечения с линией, соответствующей относительной жесткости упругой связи, с последующим определением значений частотного параметра λ_k .

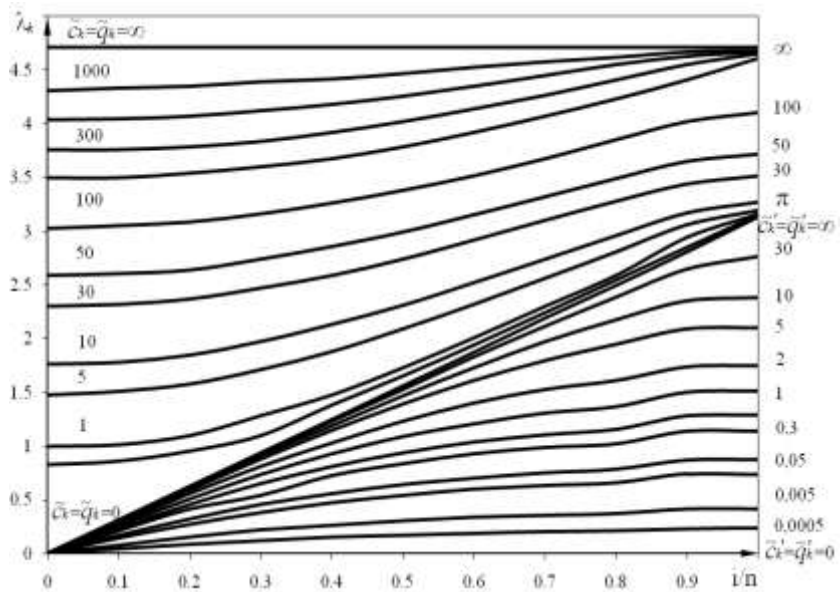


Рис. 6

Нетрудно заметить, что весь спектр частот многопролетных балок с упругими связями довольно плотный и заключен между линиями с предельными значениями жесткостей (0, ∞). При значениях λ_k от 0 до π возможно равенство частот для различных типов сосредоточенных включений и отно-

сительных жесткостей \tilde{c}_k , \tilde{c}'_k , $(\tilde{c}_k = c_k l_k^3 / 2EJ_k)$, $(\tilde{c}'_k = c'_k l_k^3 / 2EJ_k)$. Номера форм колебаний i на графиках (рис. 5, 6) располагаются в порядке возрастания и в обратном порядке в интервале параметра λ_k от π до 4,73 (рис. 4). Исключения составляют области кратных частот при \tilde{c}_k в диапазоне от 50 до 65 и значениях λ_k , близких π (рис. 4).

Таким образом, спектры частот для составных многопролетных балок с сосредоточенными включениями двух типов как при продольных (крутильных), так и при изгибных (поперечных) свободных колебаниях будут дополнять друг друга с последующим чередованием для второй и выше зон сгущения.

В дальнейших исследованиях предполагается рассмотреть вынужденные колебания балочных конструкций с непрерывно-дискретными параметрами, когда имеется внешнее и внутреннее вязкое сопротивление.

1. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщенные функции в задачах механики. – К.: Наук. думка, 1974. – 192 с.
2. Распопов А. С. Применение логических моделей к расчету колебаний неразрезных мостовых конструкций // 6th International Conference "Modern Building Materials, Structures and Techniques" (19 – 21 May 1999, Vilnius, Lithuania): Proceedings. – V.III. – 1999. – P.223 – 228.
3. Kolousek V. Dynamics in Engineering Structures. – Prague: Czech. Acad. Sci., 1973. – 580 p.
4. Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.
5. Игнатьев В. А. Расчет регулярных, статически неопределимых стержневых систем. – Изд-во Саратов. ун-та, 1979. – 296 с.
6. Jacquot R. G., Gibson J. D. The effects of discrete masses and elastic supports on continuous beam natural frequencies // J. Sound and Vibr. – 1972. – 23, N2. – P.237 – 244.
7. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: Справочник. – М.: Машиностроение, 1981. – 183 с.
8. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
9. Hobst E. Modalna analiza spojitych nosnikov metodou prenosovych na samocinnom pocitaci // Stavebn. cas. – 1975. – 23, N7. – S.454 – 478.
10. Распопов А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций // Вестник Днепр. нац. ун-та жел. дор. тр-та. Выпуск 19. – 2007. – С.125 – 133.
11. Распопов А. С. Колебания континуальных балок с промежуточными опорами // Вестник Днепр. нац. ун-та жел. дор. тр-та. Выпуск 9. – 2005. – С.199 – 202.

Днепропетровский национальный
университет железнодорожного
транспорта имени академика В. Лазаряна

Получено 21.03.08,
в окончательном варианте 28.03.08