УДК 622.73

Н.С. ПРЯДКО

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЗОСТРУЙНОГО ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Предложен стохастический подход к математическому моделированию измельчения материалов в помольной камере газоструйной мельницы и алгоритм оценки параметров полученного аналитического решения.

The stochastic approach to mathematical modelling of materials crushing in milling chamber of the gas-jet mill and the estimating algorithm for obtained analytical solution parameters is proposed.

Процесс измельчения сыпучих материалов в помольной камере газоструйной мельницы довольно сложный, и полная модель должна учитывать пульсационную природу движения частиц при соударениях и особенности взаимодействия частиц при столкновениях в газовых высокоскоростных потоках. Необходимо отметить, что хотя процесс газоструйного измельчения до сих пор теоретически не исследован, существуют разработки и описания критериев разрушения материала. Имеющиеся основные критерии разрушения либо чрезмерно локализованы (критерий Гриффитса), либо чрезмерно делокализованы (критерий поврежденности). Процесс разрушения горных пород является дисперсным и случайным, поэтому теории измельчения и диспергирования также должны содержать элементы множественности и случайности. Таким образом, в рамках газодинамических уравнений рассмотреть движение частиц, носящее хаотический и случайный характер, не представляется возможным. Решение задачи рассматривается в рамках теории вероятностей и функционального анализа.

Цель данной работы – на основе стохастического подхода создать математическую модель газоструйного измельчения в помольной камере и разработать алгоритм оценки параметров полученного решения.

Процесс перемещения частиц рассматривается как случайное блуждание при диффузии и броуновском движении. В схеме случайных блужданий отдельные шаги крайне малы, но очень быстро следуют друг за другом. В пределе такой процесс будет казаться непрерывным движением, что объясняется наложением многих малых воздействий на частицу. При переходе к пределу получаемые формулы сохраняют смысл и согласуются с физически осмысленными формулами теории диффузии.

Для постановки задачи в рамках теории вероятностей и функционального анализа объект изучения (смесь частиц) должен быть достаточно формализован. Рабочее пространство разбивается на элементарные объемы кубической формы и считается, что частицы находятся в каждом из них. Тогда мгновенная картина состава смеси будет известна. Возьмем один из элементарных объемов, который условно обозначается dV, и определим его материальный состав. Интересующие нас частицы занимают только часть объема, равную mdV $(m<1)$, а остальная часть, равная $(1-m)dV$, занята газом. Далее рассматриваем только ту часть объема dV, которая занята частицами. Последняя может обладать различными свойствами, т.е. частицы могут отличаться друг от друга крупностью, минеральным составом, скоростью движения и т.д. Все свойства учесть невозможно.

В качестве количественной меры для оценки материального состава рабочего пространства и смеси частиц в нем определена концентрация частиц в элементарном объеме dV в помольной камере. При $dV \to 0$ получаем состав смеси в окрестности точки $P(x,y,z)$, в которую стягивается объем dV. Это математическая абстракция, которая имеет физический смысл при обволакивании этой точки объемом dV. В общем случае состав смеси в точке будет зависеть не только от координат (x,y,z), но и от времени t, так как в помольной камере частицы непрерывно двигаются и состав их в каждой точке непрерывно меняется. Смесь, находящаяся в рабочем пространстве, содержит n компонентов с различными плотностями ρ_i, тогда состояние ее характеризуется n переменными числами $\tilde{n}_{pi}$ – концентрациями отдельных компонентов. Эти числа являются функциями координат и времени, т.е. $\tilde{n}_{pi} = \tilde{n}_i(x,y,z,t)$, так как состав пространства от точки к точке меняется. Введем еще функцию $\gamma(\rho,x,y,z)$ такую, что величина $\gamma d\rho$ равна объемной доле узкой фракции частиц с плотностью в диапазоне от ρ до $\rho + d\rho$ в точке (x,y,z) в момент времени t.

Рассмотрение всех сил, которые действуют на объем частиц при их движении, приводит к интегро-дифференциальному уравнению типа Колмогорова-Фоккера-Планка. Подробное рассмотрение сил, действующих на частицу в среде, состоящей из таких же частиц, рассмотрено в [1,2]. Для простоты рассуждений допустим, что все частицы в среднем увлекаются вдуваемым потоком газа с некоторой постоянной скоростью $\nu_{\div}$. Процесс газоструйного измельчения можно представить следующим образом.

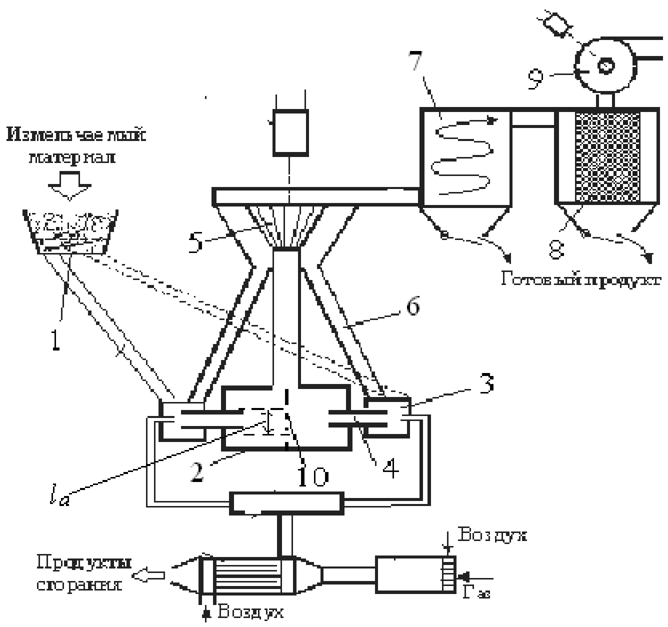

Рис.1

Конструктивно-компоновочная схема газоструйного измельчительной установки (помольной камеры с каскадным классификатором) представлена на рис. 1. Сверху из загрузочного бункера 1 в помольную камеру 2 загружаются частицы различной крупности. Под действием вдуваемого воздуха через эжекторы 3 с разгонными трубками 4 с обеих сторон камеры навстречу друг другу вносятся частицы и сталкиваются между собой. Некоторые разрушаются, делятся на несколько частей. При этом частицы совершают хаотичное, случайное блуждание. Измельченные до определенного размера частицы, попавшие в зону разряжения, создаваемого классификатором 5, пневмотранспортом выносятся из камеры. Разработанная новая конструктивная схема классификатора гравитационного типа позволяет разделять уносимый измельчаемый продукт и возвращать крупные фракции повторно в камеру помола по специальной магистрали возврата 6. Наиболее мелкие фракции измельченного материала попадают в циклон 7. Часть наиболее мелких частиц улавливает рукавный фильтр 9, который осуществляет очистку выходящего воздуха.

Главная цель разработки и усовершенствования процесса газоструйного измельчения состоит в создании условий, при которых наибольшее количество частиц измельчилось до размера, менее заданного, за наименьший период времени. Для математического описания измельчения частицы в камере процесс считается законченным, когда частица вынесена из камеры в классификатор.

По физической картине процесса создана математическая модель с использованием уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка относительно концентрации частиц $c(x,y,z,t)$. Эта концентрация является функцией, убывающей вдоль математического ожидания траектории блуждания l, направленной от начального положения частицы в объеме камеры либо до точки пересечения с вертикальной плоскостью сечения камеры, в которой происходит вынос частицы 10 (см. рис.1), либо до точки столкновения данной частицы с другой. Блуждания частицы рассматриваются в выделенном слое с радиусом l_a, равным абсолютному отклонению в подвижной системе координат от траектории детерминированного движения частицы. Этот слой определен для блуждания всего класса частиц данной характеристики крупности x.

При рабочих режимах измельчения (до разгрузки камеры) концентрация частиц довольно высокая, поэтому необходимо рассматривать нелинейные уравнения для моделирования массопереноса в стесненных условиях [2]. В этом случае вводится понятие локальной концентрации частиц в смеси, определяемое как математическое ожидание случайной величины плотности смеси.

Для процесса измельчения частиц в камере нелинейные уравнения массопереноса в случае высококонцентрированных потоков частиц получаем, исходя из следующих соображений. Пусть $c(x,y,z,t)$ функция концентрации частиц узкого класса крупности в пространстве и времени. Тогда $g(x,y,z,t)=1-c(x,y,z,t)$ – доля газовой составляющей. Изменение локальной средней плотности смеси в этом случае выражается как $\bar{\rho}=[1-c(x,y,z,t)]\cdot\rho_m+c(x,y,z,t)\rho_T$. Здесь ρ_m – средняя плотность смеси газа; ρ_T – плотность частиц твердой фазы. Коэффициент сноса в этом случае будет пропорционален не разности плотностей частиц и газа, как в случае слабо концентрированных смесей, а разности между плотностью частиц и средней плотностью смеси $V=\alpha g(\rho-\rho_m)(1-c)$, где α – коэффициент сопротивления при обтекании частицы газом, g – ускорение силы тяжести.

Уравнение массопереноса для одномерной задачи получается в виде $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \alpha g(\rho_T - \rho_m)(1-2c)\frac{\partial c}{\partial x}$. Решение этого уравнения позволяет осуществить аналитическое моделирование процесса измельчения и создать методику нахождения неопределенных параметров модели. Для изменения концентрации частиц в процессе измельчения в зависимости от поставленных граничных условий уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка позволяет получать параметрическое решение либо в явном виде, либо с помощью численного алгоритма [2, 3].

Концентрация частиц с заданным свойством (крупность) x меняется в аппарате по закону, который описывается уравнением диффузии в частных производных. Решение содержит вектор параметров $\bar{\theta}$. Его составляющие в общем случае неизвестны, и они численно оцениваются путем сравнения с экспериментом. Для этого экспериментально определенный остаток помольной камеры $\tilde{\varepsilon}(x)$ частиц крупности x необходимо сравнить с теоретическим значением остатка $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(x, \bar{\theta})$, найденным в результате решения уравнения диффузии в смысле некоторой метрики, например $\rho = \max\limits_x \left|\frac{\tilde{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}}\right|$ или $\rho = \max\limits_x |\tilde{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}|$. Это также может быть сумма квадратов отклонений от полученного решения или сумма модулей таких отклонений. Минимизируя $\rho(\bar{\theta})$, находим такие значения вектора параметров $\bar{\theta}^*$, которые обеспечивают минимум функционала $\rho(\bar{\theta})$, то есть $\rho\left(\bar{\theta}^*\right) = \min\limits_{\bar{\theta}} \max\limits_x |\tilde{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}|$.

Рассмотрим в общем случае плоскость движения частиц, перпендикулярную горизонтальному центральному сечению камеры и направленную вдоль ее длины. Тогда уравнение случайного блуждания вдоль вертикальной оси камеры в этой плоскости, записанное в форме уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка относительно концентраций, имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial^2 l} + V\frac{\partial c}{\partial l}. \tag{1}$$

Здесь $c(t,l)$ – значение концентрации частиц в момент времени t в точке траектории блуждания l, D – коэффициент диффузии, V – коэффициент сноса, соответствующий результирующей составляющей скорости частицы. Смесь неоднородна по своим физическим свойствам. Для каждого класса (или фракции) записывается уравнение случайного блуждания в рабочем объеме со своими условиями прохождения частиц сквозь слой до линии уноса l_a из помольной камеры. Достигнув точки $l - l_a = 0$, частица с вероятностью $1-p$ отражается от границы слоя (разрушенная после соударения или неизмененная, т.к. не произошло соударения) и возвращается к процессу блуждания или с вероятностью p уносится в классификатор, т.е. выходит из процесса блуждания. Отражение происходит от нижней или верхней границы камеры. Таким образом, в общем случае величина l – это величина приближения к точке возможной реализации фазового перехода, т.е. измельчении частицы до уноса из камеры.

Отражение происходит с вероятностью $1 - p = 1 - ð(x)$. Следовательно, условие полного отражения записывается как равенство нулю потока частиц через экран, т.е. $D\frac{\partial c}{\partial l} + Vc = 0$. Условию полного измельчения и уноса соответствует $c = 0$. Это событие происходит с вероятностью p, т.е. с этой вероятностью частица данного класса крупности переходит в новое фазовое состояние, становится принадлежностью смеси газовой среды. Она далее не рассматривается в процессе блуждания.

Поэтому взвешенная сумма этих двух равенств дает граничное условие для дифференциального уравнения (1) в частных производных при условии $l - l_a = 0$:

$$(1-p)(D\frac{\partial c}{\partial t} + Vc) - \mu Vpc = 0, \tag{2}$$

где $\mu > 0$ – безразмерный коэффициент.

Решение уравнения (1) находится в виде $\tilde{N}(t,l) = H(l)\cdot G(t)$. Эта процедура была представлена в [3,4] и без учета граничного условия решение получено в виде: $\tilde{N}(t,l) = (C_1 e^{k_1 l} + C_2 e^{k_2 l})e^{-\lambda t}$. Неопределенные коэффициенты найдены из граничных и начальных условий. Затем находится доля продукта $m_x(t)$, остающегося в процессе измельчения по истечении времени t. Это дает возможность найти степень измельчения (остаточное содержание в камере) $\varepsilon(x)$ частицы с характеристикой x $s(x) = \frac{\gamma - m_x}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\lambda_m}\cdot\int\limits_0^{\lambda_m}\left(\int\limits_0^{\infty} H(l)\cdot G(t)dl\right)d\lambda = 1 - \frac{1-e^{-\lambda_m t}}{\lambda_m t}$. Обозначим через τ безразмерное время $\tau = V^2 t/4D$, через $K(x)$ – вспомогательную функцию: $K(x) = \tau\cdot K_1(2-g)$, $K_1 = \frac{1-p_m}{p_m}\cdot\frac{p(x)}{1-p(x)}\theta$, через $f(x)$ промежуточную функцию $f(x) = \left(1 - e^{-K(x)}\right)/K(x)$. Тогда остаточное содержание частиц с характеристикой (крупностью) x при заданном фракционном составе частиц находится в виде $\varepsilon(x) = 1 - f(x)$. При этом параметры p_m и k имеют конкретный смысл, связанный с конструктивными и технологическими характеристиками.

Полученные зависимости используются для прогнозирования результатов технологического процесса измельчения и выбора оптимальных режимов измельчения. На практике представляет интерес определение результатов процесса измельчения, в частности, получение измельченных частиц в готовом продукте с фракционным составом $\varepsilon(x)$. Значения $\varepsilon(x)$ могут быть получены экспериментально как функция $\tilde{\varepsilon}(x)$ или теоретически $\hat{\varepsilon}(x)$ решением уравнения (1).

Для нахождения функции измельчения $\varepsilon(x,\overline{\theta})$, адекватно описывающей рассматриваемый процесс, необходимо определить вектор параметров $\overline{\theta}$. Задавая начальный вектор параметров $\overline{\theta}_0$ и используя алгоритм статистической оценки параметров, минимизирующий расхождение между теоретическими и экспериментальными характеристиками технологического процесса измельчения, можно получить решение с необходимой точностью. Реализация этого алгоритма позволяет быстро находить необходимые значения параметров функции $\varepsilon(x,\overline{\theta})$.

Программная реализация алгоритма поиска с оптимизацией Optimizing.exe позволяет произвести подбор параметров уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка, используя оптимизатор. Для опробования созданной математической модели и программы ее реализации использовались данные экспериментальных исследований процесса измельчения песка на газоструйной измельчительной установке УСИ-20 ИТМ НАНУ и НКАУ. Начальные значения параметров: $\overline{\theta} = 0{,}01$; $L = 1{,}7$; $\tau = 18$; $k = 0{,}2$.

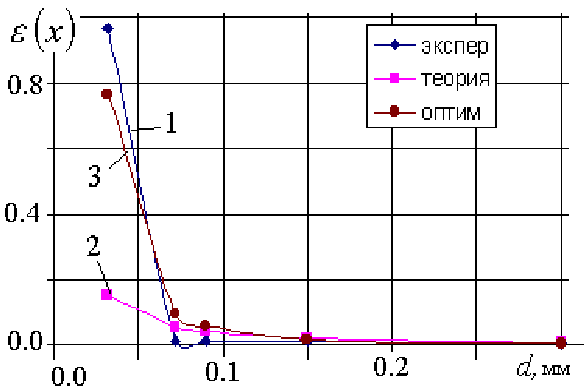

Рис.2

Результаты гранулометрического анализа остатков частиц в помольной камере строим в виде экспериментальной кривой $\tilde{\varepsilon}(x)$. На рис.2 приведены экспериментальные (1), расчетные (2) и оптимизированные (3) данные относительного количества частиц каждого класса крупности. Оптимальные значения параметров в этом случае равны: $\overline{\theta} = 0{,}15$; $L = 0{,}85$; $\tau = 18{,}7$; $k = 0.05$. Результаты расчета функции измельчения приведены в таблице.

Таблица

Фракции, мм	Доля, г	$\tilde{\varepsilon}(x)$	$\hat{\varepsilon}(x)$	$\hat{\varepsilon}_{\text{ĩò}}(x)$
-0,4+0,2	0,21	0,003	0,0046	0,0016
-0,2+0,1	0,73	0,009	0,019	0,014
-0,1+0,08	0,75	0,0094	0,04	0,056
-0,08+0,063	0,84	0,011	0,05	0,092
-0,063	77,33	0,968	0,15	0,765

Полученные теоретические результаты удовлетворительно согласовываются с результатами экспериментального измельчения материала. Применение оптимизационного алгоритма значительно уменьшает погрешность (до $\delta \approx 10^{-6}$) и позволяет уточнить необходимые параметры вектора $\bar{\theta}$, используемого для нахождения теоретического решения.

Разработанный подход к математической модели измельчения сыпучих материалов в помольной камере газоструйной мельницы на основе применения уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка описывает принципиальные особенности совместного распределения физических и вещественных признаков частиц смеси и обеспечивает связь различных ее характеристик, позволяет в едином комплексе рассматривать общие закономерности этих распределений во всем диапазоне изменения признаков, включая фазовые переходы процесса измельчения.

1. *Пожидаев В.Ф.* О построении математических моделей многокомпонентных смесей // Техническая кибернетика. – 1970. – №6. – С.56 – 67.
2. *Гарус В.К., Грачов О.В., Пожидаев В.Ф., Полулях О.Д.* Формализация результатов разделительных процессов в углеобогащении. – Луганск: изд-во ООО"НВФ"СТЕК", 2003. –176с.
3. *В.Ф. Пожидаев, Н.С. Прядко, А.А. Ветров*. Математическое моделирование процесса сжигания угля в поточном кипящем слое // Системные технологии.–2004.– №1(30). – С.41 – 46.
4. *Прядко Н.С.* Усовершенствование топки кипящего слоя с целью газодинамического транспортирования материала. Автореф. дисс. канд. техн. наук: ИТМ НАН Украины и НКА Украины: Днепропетровск. – 2004. – 22с.

Работа выполнена под научным руководством д.т.н. Горобец Л.Ж. и д.т.н. Пожидаева В.Ф.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины
Днепропетровск

Получено 26.03.08,
в окончательном варианте 05.04.08