

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикла

**СВЯЗАННЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ДОЛГОВРЕМЕННОЙ
ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ
ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A theory of long-term damageability is built for the fibrous composite materials with allowance for of the temperature effect. The process of damage of the composite's matrix is modeling by the arising the stochastically located micropores in the matrix. The criterion of fracture of the unit microvolume is characterized by its long-term damageability, which is stipulated for dependence of the brittle fracture time on degree of closeness of equivalent stress to its limit value. For the arbitrary time, the equation of matrix damage balance (porosity) is formulated with allowance for a temperature component. An algorithm is constructed for evaluation of dependences of the matrix microdamage on time and the macrostresses on time. The corresponding curves are built. An effect of temperature on deformation and microdamage of material is studied.

Key words: fibrous composite material, stochastic structure, temperature effect, long-term damageability, porosity, effective characteristics, balance equation of porosity.

Введение.

В условиях достаточно высоких нагрузок материалы и элементы конструкций разрушаются. Разрушению, как правило, предшествует образование и развитие во времени рассеянных микроповреждений.

Микроповреждения представляют собой хаотически расположенные разрушенные микрообъемы материала, которые полностью или частично потеряли несущую способность, что приводит к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам. Микроповреждения могут возникать в процессе деформирования вследствие того, что микронапряжения достигают локальных границ прочности.

Как видим из экспериментов и наблюдений, повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки. В [8, 9, 11] предложена структурная теория кратковременной микроповреждаемости однородных и композитных материалов, в основу которой положены уравнения механики микронеоднородных тел стохастической структуры и моделирование рассеянных микроповреждений системой квазисферических микропор [5]. Длительную повреждаемость обычно рассматривают как результат процесса накопления во времени рассеянных микроповреждений в виде микропор и микротрещин. На микроскопическом уровне прочность материала является неоднородной, т.е. предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности микрообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. При действии на макрообразец постоянного растягивающего напряжения часть микрообъемов, предел прочности которых ниже приложенного напряжения, разрушится, т.е. на их месте образуются микротрещины или микро-

полости. На тех микроучастках, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости напряжения к пределу микропрочности.

В [10, 12, 13] на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред построена теория длительной повреждаемости однородных и волокнистых композитных материалов.

В настоящей статье исследуется влияние температурных воздействий на деформирование и длительную повреждаемость волокнистых композитных материалов с микроразрушениями в матрице. В основу структурной теории длительной повреждаемости композитных материалов положены уравнения механики микронеоднородных сред стохастической структуры. Процесс повреждаемости матрицы волокнистого композита моделируется разрушением рассеянных микрообъемов матрицы материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Шлейхера — Надаи.

Предел кратковременной прочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией распределения на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние волокнистого композита с системой стохастически расположенных микроповреждений в матрице определяются на основе стохастических уравнений термоупругости пористых сред. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулировано для заданных макродеформаций и произвольного момента времени уравнение баланса поврежденности (пористости) матрицы композита, учитывающее температурную составляющую. Зависимости макронапряжения — макродеформации для волокнистого материала с пористой матрицей и уравнения баланса пористости матрицы описывают совместные процессы деформирования и длительной повреждаемости композита с учетом их взаимодействия, что приводит к снижению макронапряжений при заданных макродеформациях, происходящих во времени. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповреждаемости матрицы волокнистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также получены соответствующие кривые в случае дробно-степенной функции долговечности. Исследовано влияние температурных воздействий на кривые макродеформирования и повреждаемости материала.

§1. Рассмотрим однонаправленный волокнистый материал с изотропной матрицей и рассеянными микроповреждениями в ней, которые моделируем пористостью p_2 , причем поры будем считать пустыми. Пусть волокна являются трансверсально-изотропными, направленными по нормали к плоскости изотропии x_1x_2 . Обозначим модули упругости, коэффициенты температурных напряжений и деформаций волокон, соответственно, $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1, \beta_1^1, \beta_3^1, \alpha_1^1, \alpha_3^1$; модули объемного сжатия и сдвига, коэффициенты температурных напряжений и деформаций неразрушенной части матрицы — соответственно, $K_2, \mu_2, \beta_2, \alpha_2$, а объемные содержания волокон и пористой матрицы, соответственно, c_1 и c_2 . Пусть заданы макродеформации $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температура θ композита, тогда макронапряжения $\langle \sigma_{jk} \rangle$ композита связаны с ними соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{jk} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{jk} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle - \beta_1^* \theta) \delta_{jk}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle - \beta_3^* \theta; \quad \langle \sigma_{j3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{j3} \rangle \quad (j, k, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где эффективные модули упругости композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* , коэффициенты температурных напряжений β_1^* , β_3^* и деформаций α_1^* , α_3^* определяются [2, 6, 7] формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})^2}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p})^2}{2c_1\mu_{2p} + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2n}; \\ \lambda_{13}^* &= c_1\lambda_{13}^* + c_2\lambda_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \lambda_{33}^* &= c_1\lambda_{33}^* + c_2(\lambda_{2p} + 2\mu_{2p}) - \frac{2c_1 c_2 (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \lambda_{44}^* &= c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{44}^1 - \mu_{2p})^2}{c_1\mu_{2p} + c_2\lambda_{44}^1 + s}; \\ \beta_1^* &= c_1\beta_1^1 + c_2\beta_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\beta_1^1 - \beta_{2p})}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \beta_3^* &= c_1\beta_3^1 + c_2\beta_{2p} - \frac{2c_1 c_2 (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})(\beta_1^1 - \beta_{2p})}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \alpha_1^* &= \frac{\lambda_{33}^* \beta_1^* - \lambda_{13}^* \beta_3^*}{(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2}; \quad \alpha_3^* = \frac{(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\beta_3^* - 2\lambda_{13}^* \beta_1^*}{(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

В (1.2) принято:

$$2m = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}; \quad 2n = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p} + \mu_{2p}); \quad s = c_1\lambda_{44}^1 + 2c_2\mu_{2p}, \quad (1.3)$$

если жесткость матрицы больше жесткости волокон, и

$$\begin{aligned}2m &= \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_{2p}} \right)^{-1}; \quad 2n = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2(\lambda_{2p} + \mu_{2p})} \right)^{-1}; \\ s &= \left(\frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{2\mu_{2p}} \right)^{-1},\end{aligned}\quad (1.4)$$

если жесткость волокон больше жесткости матрицы.

Эффективные модули и температурные коэффициенты пористой матрицы K_{2p} , μ_{2p} , β_{2p} , α_{2p} согласно [2, 6, 7] определяются формулами

$$K_{2p} = \frac{4K_2\mu_2(1-p_2)^2}{4\mu_2 + (3K_2 - 4\mu_2)p_2}; \quad \mu_{2p} = \frac{(9K_2 + 8\mu_2)\mu_2(1-p_2)^2}{9K_2 + 8\mu_2 - (3K_2 - 4\mu_2)p_2}; \quad \lambda_{2p} = K_{2p} - \frac{2}{3}\mu_{2p};$$

$$\beta_{2p} = \frac{4\beta_2\mu_2(1-p_2)^2}{4\mu_2 + (3K_2 - 4\mu_2)p_2}; \quad \alpha_{2p} = \frac{\beta_{2p}}{3K_{2p}} = \frac{\beta_2}{3K_2}. \quad (1.5)$$

Примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала в форме Шлейхера – Надаи [3]

$$I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}> = k_2; \quad I_{<\sigma>}^{21} = (<\sigma_{pq}^{21}>' <\sigma_{pq}^{21}>')^{1/2}, \quad (1.6)$$

где $<\sigma_{pq}^{21}>'$, $<\sigma_{rr}^{21}>$ – девиатор средних по неповрежденной части материала матрицы напряжений; k_2 – предельное значение инварианта $I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>$ для матрицы, являющееся случайной функцией координат, причем средние по неповрежденной части материала матрицы напряжения $<\sigma_{pq}^{21}>$ определяются формулой [8]

$$<\sigma_{jk}^{21}> = \frac{1}{1-p_2} <\sigma_{jk}^2>. \quad (1.7)$$

Если инвариант $I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>$ для некоторого микрообъема матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2 , то согласно критерию длительной прочности разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^2 , длительность которого зависит от степени близости $I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>$ к предельному значению k_2 . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^2 = \varphi_2(I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>, k_2), \quad (1.8)$$

причем $\varphi_2(k_2, k_2) = 0$, $\varphi_2(0, k_2) = \infty$ согласно (1.6).

Одноточечную функцию распределения $F_2(k_2)$ предела прочности k_2 микрообъема неповрежденной части материала матрицы можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}; \\ \left(\frac{k_2 - k_{02}}{k_{12} - k_{02}} \right)^{\beta_2}, & k_{02} \leq k_2 \leq k_{12}; \\ 1, & k_2 > k_{12} \end{cases} \quad (1.9)$$

или распределением Вейбулла

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}; \\ 1 - \exp[-m_2(k_2 - k_{02})^{\beta_2}], & k_2 \geq k_{02}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь k_{02} – минимальная величина предельного значения k_2 , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах матрицы; k_{12} , m_2 , β_2 – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в матрице.

Считаем, что случайное поле предела микропрочности матрицы k_2 является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры еди-

ничных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами включений и расстояний между ними. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F_2(k_2)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала матрицы, в котором предел микропрочности меньше значения k_2 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{jk}^{21} \rangle$ функция $F_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle)$ определяет согласно (1.6), (1.9), (1.10) относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость матрицы равной p_{02} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости матрицы при кратковременной повреждаемости

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle), \quad (1.11)$$

где согласно (1.7)

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{21} = \frac{1}{1 - p_2} I_{\langle \sigma \rangle}^2; \quad I_{\langle \sigma \rangle}^2 = (\langle \sigma_{jk}^2 \rangle' \langle \sigma_{jk}^2 \rangle')^{1/2}; \quad (1.12)$$

средние напряжения в матрице $\langle \sigma_{jk}^2 \rangle$ связаны со средними в ней деформациями $\langle \varepsilon_{jk}^2 \rangle$ и температурой θ зависимостями

$$\langle \sigma_{jk}^2 \rangle = \lambda_{2p} \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle \delta_{ij} + 2\mu_{2p} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle - \beta_{2p} \theta \delta_{ij}, \quad (1.13)$$

а средние в матрице деформации $\langle \varepsilon_{jk}^2 \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температурой θ зависимостями [2, 6, 7]

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{jk}^2 \rangle &= A_0 \langle \varepsilon_{jk} \rangle - \frac{1}{\Delta_2} (A_1 \langle \varepsilon_{rr} \rangle + A_2 \langle \varepsilon_{33} \rangle - B_1 \theta) \delta_{jk}; \\ \langle \varepsilon_{33}^2 \rangle &= -\frac{1}{\Delta_2} (A_3 \langle \varepsilon_{rr} \rangle + A_4 \langle \varepsilon_{33} \rangle - B_2 \theta); \quad \langle \varepsilon_{j3}^2 \rangle = \frac{\lambda_{44}^* - \lambda_{44}^1}{c_2(\mu_{2p} - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{j3} \rangle \\ & \quad (j, k, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$\Delta_2 = c_2(\lambda_{41}^1 - \lambda_{42}^1 - 2\mu_{2p}) \times [(\lambda_{41}^1 + \lambda_{42}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}) - 2(\lambda_{43}^1 - \lambda_{2p})^2];$$

$$A_0 = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2(2\mu_{2p} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)}; \quad A_1 = (\lambda_{11}^* - \lambda_{11}^1)b_1 - (\lambda_{12}^* - \lambda_{12}^1)b_2 - (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)b_3;$$

$$A_2 = (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)(b_1 - b_2) - (\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)b_3;$$

$$A_3 = (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)b_4 - (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1)b_3;$$

$$A_4 = (\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)b_4 - 2(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)b_3;$$

$$B_1 = (\beta_{11}^* - c_1\beta_{11} - c_2\beta_{2p})(b_1 - b_2) - (\beta_{33}^* - c_1\beta_{33} - c_2\beta_{2p})b_3;$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= (\beta_3^* - c_1 \beta_3^1 - c_2 \beta_{2p}) b_4 - 2(\beta_1^* - c_1 \beta_1^1 - c_2 \beta_{2p}) b_3; \\
b_1 &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{12}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}); \\
b_2 &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{11}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}); \\
b_3 &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}); \\
b_4 &= (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}). \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Если напряжения в матрице $\langle \sigma_{jk}^{21} \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то согласно критерию длительной прочности (1.8) за это время в матрице разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2 , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^2 = \varphi_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle, k_2), \tag{1.16}$$

где инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle$ определяется выражениями (1.13) – (1.15).

Время τ_k^2 хрупкого разрушения матрицы для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{\langle \sigma \rangle}^2 > 0$. В этом случае функцию долговечности $\varphi_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle, k_2)$ матрицы для микрообъема с мгновенным пределом прочности k_2 можно представить, например, дробно-степенной зависимостью

$$\begin{aligned}
\varphi_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle, k_2) &= \tau_{02} \left(\frac{k_2 - I_{\langle \sigma \rangle}^{21} - a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle}{I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle - \gamma_2 k_2} \right)^{n_{12}} \\
(\gamma_2 k_2 \leq I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle \leq k_2, \gamma_2 < 1), \tag{1.17}
\end{aligned}$$

где некоторое характерное время τ_{20} , показатель n_{12} и коэффициент γ_2 определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности матрицы.

Подставляя (1.17) в (1.16), приходим к неравенству

$$k_2 \leq (I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle) \frac{1 + \bar{t}_2^{1/n_{12}}}{1 + \gamma_2 \bar{t}_2^{1/n_{12}}} \quad \left(\bar{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}} \right). \tag{1.18}$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_2(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F_2[(I_{\langle \sigma \rangle}^{21} + a_2 \langle \sigma_{rr}^{21} \rangle) \psi_2(\bar{t}_2)]$, где

$$\psi_2(\bar{t}_2) = \frac{1 + \bar{t}_2^{1/n_{12}}}{1 + \gamma_2 \bar{t}_2^{1/n_{12}}}, \tag{1.19}$$

определяет в момент времени \bar{t}_2 относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала матрицы. Тогда уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для матрицы при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F_2[(I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>)\psi_2(\bar{t}_2)] \quad (1.20)$$

или с учетом (1.7) в виде

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F_2\left[\frac{I_{<\sigma>}^2 + a_2 <\sigma_{rr}^2>}{1 - p_2}\psi_2(\bar{t}_2)\right], \quad (1.21)$$

где пористость матрицы p_2 является функцией безразмерного времени \bar{t}_2 , а инвариант $I_{<\sigma>}^2 + a_2 <\sigma_{rr}^2>$ определяется выражениями (1.13) – (1.15).

Если время τ_k^2 хрупкого разрушения матрицы имеет конечное значение для произвольных $I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью

$$\varphi_2(I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>, k_2) = \tau_{02} \left\{ \exp m_{12} \left[\left(\frac{k_2}{I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>} \right)^{n_{12}} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{22}}, \quad (1.22)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{02} , m_{12} , n_{12} , n_{22} для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (1.17) в (1.16), приходим к неравенству

$$k_2 \leq (I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>) \left[1 + \frac{1}{m_{12}} \ln \left(1 + \bar{t}_2^{1/n_{22}} \right) \right]^{1/n_{12}} \quad \left(\bar{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}} \right). \quad (1.23)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_2(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F_2[(I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>)\psi_2(\bar{t}_2)]$, где

$$\psi_2(\bar{t}_2) = \left[1 + \frac{1}{m_{12}} \ln \left(1 + \bar{t}_2^{1/n_{22}} \right) \right]^{1/n_{12}}, \quad (1.24)$$

определяет в момент времени \bar{t}_2 относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала матрицы.

Тогда с учетом (1.1) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для матрицы при длительной повреждаемости (1.6) можно представить в виде (1.21).

Уравнения баланса пористости (1.21) с учетом (1.2) – (1.5), (1.9), (1.10), (1.12) – (1.15) в начальный момент $\bar{t}_2 = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала матрицы.

С ростом времени уравнения (1.21), (1.2) – (1.5), (1.9), (1.10), (1.12) – (1.15) (1.19) (или (1.24)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

§2. Обобщим описанную в §1 модель повреждаемости однонаправленного волокнистого композитного материала с микроповреждениями в матрице. Предположим, что микроповреждения, которые образуются в ней при нагружении, представляют собой поры, заполненные частицами разрушенного материала, оказывающими определенное сопротивление деформированию. Пусть частицы разрушенного материала не оказывают сопротивления на сдвиг и на всестороннее растяжение, а на всестороннее сжатие сопротивляются как неповрежденный материал. Тогда модуль сдвига разрушенного материала, заполняющего поры, можно принять равным нулю, а модуль объемного сжатия равным нулю при $<\sigma_{rr}^{22}> \geq 0$ и равным соответствующему модулю

неповрежденной матрицы K_2 при $\langle \sigma_{rr}^{22} \rangle < 0$, где $\langle \sigma_{rr}^{22} \rangle$ — напряжения в заполненных разрушенными частицами порах матрицы. Тогда согласно §1 при $\langle \sigma_{rr}^{22} \rangle \geq 0$, т.е. если средние объемные напряжения в заполняющих поры частицах в матрице являются растягивающими, эффективные модули и температурные коэффициенты пористой наполненной частицами разрушенного материала матрицы K_{2p} , μ_{2p} , β_{2p} , α_{2p} определяются формулами (1.5). При $\langle \sigma_{rr}^{22} \rangle < 0$, т.е. если соответствующие напряжения являются сжимающими, они определяются формулами [7]

$$K_{2p} = K_2; \quad \mu_{2p} = \frac{[9K_2 + 8\mu_2(1-p_2)]\mu_2(1-p_2)^2}{9K_2 + 8\mu_2 - (3K_2 + 4\mu_2)p_2 - 4\mu_2 p_2^2}; \quad \beta_{2p} = \beta_2; \quad \alpha_{2p} = \alpha_2. \quad (2.1)$$

Принимая критерий прочности в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Шлейхера – Надаи (1.6), приходим к уравнению баланса пористости (1.20), где $I_{\langle \sigma \rangle}^{21}$ определяется формулами (1.12) – (1.15), функция $\psi(\bar{t})$ – формулой (1.19) или (1.24), а для $\langle \sigma_{rr}^{21} \rangle$ имеем

$$\langle \sigma_{rr}^{21} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{1-p_2} \langle \sigma_{rr}^2 \rangle, & \langle \sigma_{rr}^2 \rangle \geq 0; \\ \langle \sigma_{rr}^2 \rangle, & \langle \sigma_{rr}^2 \rangle < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle$ – средние напряжения в i -компоненте, определяемые формулами (1.13) – (1.15).

Поскольку заданы макродеформации $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температура θ , то с учетом соотношений, связывающих средние напряжения в матрице $\langle \sigma_{jk}^2 \rangle$, макродеформации $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температуру θ (1.13) – (1.15), можно определить выполнение условия $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle \geq 0$ или $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle < 0$.

Учитывая соотношения (1.12), уравнение баланса пористости матрицы (1.20) при выполнении условия $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle \geq 0$ приведем к виду (1.21), где эффективные модули и температурные коэффициенты пористой, наполненной частицами разрушенного материала, матрицы K_{2p} , μ_{2p} , β_{2p} , α_{2p} определяются формулами (1.5). При выполнении условия $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle < 0$ уравнение баланса пористости матрицы (1.20) приведем к виду

$$p_2 = p_{02} + (1-p_{02})F_2 \left(\frac{I_{\langle \sigma \rangle}^2}{1-p_2} + a_2 \langle \sigma_{rr}^2 \rangle \right), \quad (2.3)$$

где средние в матрице напряжения $\langle \sigma_{jk}^2 \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температурой θ зависимостями (1.13) – (1.15), а эффективные модули и температурные коэффициенты пористой, наполненной частицами разрушенного материала, матрицы K_{2p} , μ_{2p} , β_{2p} , α_{2p} определяются формулами (2.1).

§3. На основе соотношений (1.21), (1.2) – (1.5), (1.9), (1.10), (1.12) – (1.15), (1.19) (или (1.24)) и условия $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle \geq 0$ (или (2.3)), (1.2) – (1.4), (2.1), (1.9), (1.10), (2.2), (1.12) – (1.15), (1.19) (или (1.24)) и условия $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle < 0$ можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и напряженно-деформированного состояния волокнистого материала. С этой целью воспользуемся методом секущих [1].

Записав уравнение баланса пористости матрицы (1.20) в виде

$$\varphi_2(p_2) = \{p_2 - p_{02} - (1 - p_{02})F_2[(I_{<\sigma>}^{21} + a_2 <\sigma_{rr}^{21}>)\psi_2(\bar{t}_2)]\} = 0, \quad (3.1)$$

легко проверить, что корень p_2 находится в интервале $[p_{02}, 1]$, так как имеют место неравенства

$$\varphi_2(p_{02}) < 0; \quad \varphi_2(1) > 0. \quad (3.2)$$

Поэтому нулевое приближение корня $p_2^{(0)}$ определяется формулой

$$p_2^{(0)} = \frac{a_2^{(0)}\varphi_2(b_2^{(0)}) - b_2^{(0)}\varphi_2(a_2^{(0)})}{\varphi_2(b_2^{(0)}) - \varphi_2(a_2^{(0)})}, \quad (3.3)$$

где $a_2^{(0)} = p_{02}$, $b_2^{(0)} = 1$.

Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_2^{(m)} = \frac{a_2^{(m)}\varphi_2(b_2^{(m)}) - b_2^{(m)}\varphi_2(a_2^{(m)})}{\varphi_2(b_2^{(m)}) - \varphi_2(a_2^{(m)})}; \quad (3.4)$$

$$a_2^{(m)} = a_2^{(m-1)}; \quad b_2^{(m)} = p_2^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_2(a_2^{(m-1)})\varphi_2(p_2^{(m-1)}) \leq 0;$$

$$a_2^{(m)} = p_2^{(m-1)}; \quad b_2^{(m)} = b_2^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_2(a_2^{(m-1)})\varphi_2(p_2^{(m-1)}) \geq 0$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$|\varphi_2(p_2^{(m)})| < \varepsilon, \quad (3.5)$$

где ε – точность вычисления корня.

На основе проведенных вычислений получены диаграммы макродеформирования зернистых композитных материалов при микроповреждениях в матрице для распределения Вейбулла (1.9) и для дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (1.19). В качестве матрицы и волокон приняты, соответственно, эпоксидная матрица с характеристиками неповрежденной части [2, 4]

$$E_2 = 3 \text{ ГПа}; \quad \nu_2 = 0,35; \quad \alpha_2 = 45 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}, \quad (3.6)$$

где E_2 , ν_2 , α_2 – соответственно, модули Юнга, коэффициенты Пуассона и коэффициенты температурных деформаций неповрежденной части матрицы, а также высококомодульные углеродные волокна с характеристиками [4]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа}; \quad E_3^1 = 226 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12}^1 = 0,2; \quad \nu_{13}^1 = 0,3; \quad G_{12}^1 = 60 \text{ ГПа};$$

$$\alpha_1^1 = 18 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}; \quad \alpha_3^1 = -10^{-6} (\text{°C})^{-1}, \quad (3.7)$$

где E_1^1 и E_3^1 , ν_{12}^1 и ν_{13}^1 , G_{12}^1 и G_{13}^1 , α_1^1 и α_3^1 – соответственно, поперечный и продольный модули Юнга, коэффициенты Пуассона, модули сдвига и коэффициенты температурной деформации волокон, которые связаны с модулями термоупругости λ_{11}^1 , λ_{12}^1 , λ_{13}^1 , λ_{33}^1 , λ_{44}^1 , β_1^1 , β_3^1 формулами

$$\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = E_1^1 E_3^1 \left[E_3^1 \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (\nu_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 = 2G_{12}^1;$$

$$\lambda_{13}^1 = \nu_{13}^1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \frac{E_3^1}{E_1^1} \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1;$$

$$\beta_{11}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \alpha_1^1 + \lambda_{13}^1 \alpha_3^1; \quad \beta_{33}^1 = 2\lambda_{13}^1 \alpha_1^1 + \lambda_{33}^1 \alpha_3^1, \quad (3.8)$$

а также при

$$p_{02} = 0; \quad k_{02}/\mu_2 = 0,01; \quad m_2 \mu_2^{\beta_2} = 1000;$$

$$\beta_2 = 2; \quad \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа} \quad (\sigma_{2p} = \sqrt{3/2} k_{20});$$

$$a_2 = 0,02; \quad \gamma_2 = 0,05; \quad n_{12} = 1; \quad \theta = \pm 20^\circ \text{ C}. \quad (3.9)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,002; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (3.10)$$

согласно (1.1) макронапряжение $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связано с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ и температура θ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \{ [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{11} \rangle - (\lambda_{33}^* \beta_{11}^* - \lambda_{13}^* \beta_3^*) \theta \}. \quad (3.11)$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде соотношений (1.21), (1.2) – (1.5), (1.9), (1.10), (1.12) – (1.15), (1.19) (или (1.24)) при $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle \geq 0$ (или (2.3)), (1.2) – (1.4), (2.1), (1.9), (1.10), (2.2), (1.12) – (1.15), (1.19) (или (1.24)) при $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle < 0$, принимаем

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{[(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*] \langle \varepsilon_{11} \rangle - (\lambda_{13}^* \beta_3^* - \lambda_{33}^* \beta_{11}^*) \theta}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2};$$

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{[(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*] \langle \varepsilon_{11} \rangle - (\lambda_{13}^* \beta_{11}^* - \lambda_{11}^* \beta_3^*) \theta}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2}, \quad (3.12)$$

что эквивалентно условию (3.10).

На рис. 1 показаны кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при различных значениях температуры θ и объемного содержания волокон c_1 . На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном содержании волокон $c_1 = 0$, штриховой линией – при $c_1 = 0,25$, точечной линией – при $c_1 = 0,5$, штрихпунктирной линией – при $c_1 = 0,75$. Такие же обозначения приняты и на рис. 2. Гра-

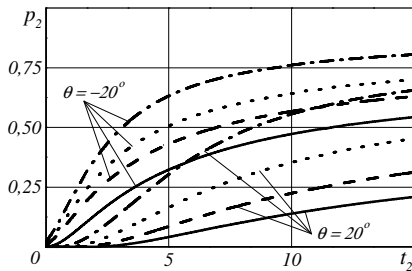


Рис. 1

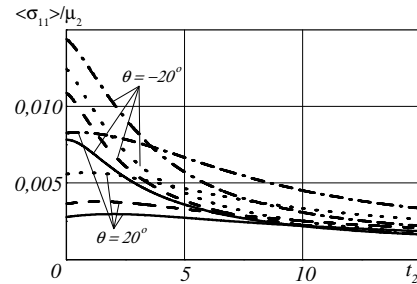


Рис. 2

фики показывают, что с уменьшением температуры и увеличением объемного содержания волокон микроповрежденность p_2 увеличивается.

На рис. 2 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 при различных значениях температуры θ и объемного содержания волокон c_1 . Графики показывают, что эти кривые являются нисходящими для всех значений температуры и объемного содержания волокон. Однако следует отметить, что уменьшение макронапряжений со временем не является монотонной функцией температуры и объемного содержания волокон.

Р Е З Ю М Е . Побудовано теорію довготривалої пошкоджуваності для волокнистих композитних матеріалів з урахуванням температурного впливу. Процес пошкоджуваності матриці композита моделюється утворенням в ній стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короточасну міцність за критерієм Шлейхера – Надаї, яке приймається випадковою функцією координат. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкоженості (пористості) матриці з урахуванням температурної складової. Побудовано алгоритми обчислення залежностей мікропошкоджуваності матриці від часу, макронапружень від часу, а також отримано відповідні криві та досліджено вплив температури на деформування та мікропошкоджуваність матеріалу.

1. Березикович Я.С. Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
2. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
5. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
6. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микро неоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – 14, № 2. – С. 3 – 17.
7. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикла Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т.3).
8. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 10. – P. 1035 – 1041.
9. Khoroshun L.P. Micromechanics of Short-Term Thermal Microdamageability // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 9. – P. 1158 – 1165.
10. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 2. – P. 127 – 135.
11. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Mesomechanics of Deformation and Short-Term Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 6. – P. 591 – 620.
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of Fibrous Materials with the Stress-Rupture Microstrength of the Matrix Described by a Fractional-Power Function // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 11. – P. 1196 – 1205.
13. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled Processes of Deformation and Long-Term Damage of Fibrous Materials with the Microdurability of the Matrix Described by an Exponential Power Function // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 1. – P. 37 – 45.

Поступила 15.06.09

Утверждена в печать 07.12.2010