УДК 539.3

Член-корреспондент НАН Украины **Л. П. Хорошун**

Построение модели деформирования и кратковременной повреждаемости слоистого композита на основе деформационного критерия микропрочности

Построена структурная модель связанных процессов деформирования и кратковременной повреждаемости слоистых композитов с физически нелинейными компонентами, диаграммы деформирования которых имеют ниспадающие ветви. Повреждаемость моделируется рассеянным разрушением микрообъемов компонентов и образованием на их месте стохастически расположенных квазисферических микропор. Условием кратковременного разрушения микрообъема материала принят деформационный критерий прочности относительно второго инварианта девиатора микродеформаций. Исследовано влияние объемного содержания компонентов на деформирование и повреждаемость слоистого композита.

В основе структурных моделей связанных процессов деформирования и повреждаемости однородных и композитных материалов [1–6] лежит представление о стохастической неоднородности микропрочности материала, что ведет при нагружении к рассеянным микроразрушениям, уменьшению жесткости и несущей способности материала. Моделирование микроразрушений порами и применение моделей и методов механики стохастически неоднородных сред [7] позволяет описать связанные процессы деформирования и повреждаемости материала. Если принять силовой критерий микропрочности относительно микронапряжений [1–4, 6], то повреждаемость материала можно описать только для восходящей части нелинейной диаграммы деформирования микрообъема. При деформационном критерии микропрочнсоти повреждаемость материала может быть описана для полной нелинейной диаграммы деформирования микрообъема, включая и ниспадающий участок. На этой основе в работе [5] исследованы связанные процессы деформирования и повреждаемости однородных материалов и стохастических композитов зернистой структуры. В настоящей работе связанные процессы деформирования и повреждаемости исследуются в слоистом композите.

Исходные уравнения. Рассмотрим двухкомпонентный композит слоистой структуры, упругое деформирование компонентов которого следует физически нелинейному закону и сопровождается образованием рассеянных разрушений микрообъемов, обусловленным стохастической неоднородностью микропрочности. Разрушенные микрообъемы моделируем квазисферическими порами с размерами и расстояниями между ними пренебрежимо малыми по сравнению с толщинами слоев. Обозначим объемные содержания, начальные пористости и полные пористости компонентов соответственно c_1, p_{10}, p_1 и c_2, p_{20}, p_2, модули объемного сжатия и сдвига неразрушенных частей компонентов соответственно K_1, μ_1 и K_2, μ_2, а также эффективные модули объемного сжатия и сдвига пористых компонентов соответственно K_1^*, μ_1^* и K_2^*, μ_2^*.

Определение напряженно-деформированного состояния и эффективных свойств слоистого материала с пористыми компонентами сводится к двум однотипным последовательным задачам — определение напряжений и деформаций неразрушенных частей компонентов$\langle\sigma_{ij}^1\rangle$, $\langle\varepsilon_{ij}^1\rangle$, $\langle\sigma_{ij}^2\rangle$, $\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle$ и эффективных свойств пористых компонентов K_1^*, μ_1^*, K_2^*, μ_2^* при заданных макродеформациях пористых компонентов $\langle\sigma_{ij}^{*1}\rangle$, $\langle\varepsilon_{ij}^{*1}\rangle$, $\langle\sigma_{ij}^{*2}\rangle$, $\langle\varepsilon_{ij}^{*2}\rangle$ и эффективных свойств слоистого материала λ_{11}^*, λ_{12}^*, λ_{13}^*, λ_{33}^*, λ_{44}^* при заданных макродеформациях композита $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$.

Каждая из указанных выше задач сводится к следующей формулировке. Рассматривается двухкомпонентный стохастический композитный материал с идеальной связью компонентов, представляющий собой микронеоднородную физически нелинейную статистически однородную упругую среду. Тогда зависимости между микронапряжениями σ_{ij} и микродеформациями ε_{ij} для произвольной точки можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon_{mn}, \tag{1}$$

где тензор модулей упругости λ_{ijmn}, детерминировано зависящий от деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, является случайной статистически однородной функцией координат x_r.

Если макрообъем композита находится в условиях макрооднородного деформирования, то микронапряжения σ_{ij} и микродеформации ε_{ij} будут статистически однородными случайными функциями координат, удовлетворяющими свойству эргодичности. Поэтому их математические ожидания $\langle\sigma_{ij}\rangle$, $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ в произвольной точке макрообъема равны соответственно макронапряжениям и макродеформациям [7]. На основе уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{2}$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3}$$

и зависимостей (1) приходим к физически и статистически нелинейным уравнениям равновесия относительно перемещений u_i

$$[\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta})u_{m,n}]_{,j} = 0. \tag{4}$$

Представляя случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle\sigma_{ij}\rangle + \sigma_{ij}^0, \qquad \varepsilon_{ij} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + \varepsilon_j^0, \qquad u_i = \langle\varepsilon_{ij}\rangle x_j + u_i^0, \tag{5}$$

приведем уравнение (4) к виду

$$\lambda_{ijmn}^c u_{m,nj}^0 + \{[\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \lambda_{ijmn}^c]\varepsilon_{mn}\}_{,j} = 0, \tag{6}$$

где λ_{ijmn}^c — тензор модулей упругости некоторого однородного тела сравнения. Граничное условие на бесконечно удаленной границе S области V макрообъема, согласно (5), будет следующим:

$$u_i^0|_S = 0. \tag{7}$$

С помощью функции Грина $G_{ij}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})$, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda_{ijmn}^{c} G_{mk,jn}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + \delta(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})\delta_{ik} = 0, \tag{8}$$

краевая задача (6), (7) сводится к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})[\lambda_{pqmn}^{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}) - \lambda_{pqmn}^{c}]\varepsilon_{mn}^{(2)}, \tag{9}$$

где интегральный оператор K_{ijpq} определяется правилом

$$K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})\varphi^{(2)} = \int\limits_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})(\varphi^{(2)} - \langle \varphi \rangle)\, dV^{(2)}, \tag{10}$$

причем индекс в круглых скобках вверху обозначает соответствующую точку пространства.

Нелинейные зависимости (1) для точки, находящейся в k-компоненте, имеют вид

$$\sigma_{ij}^{k} = \lambda_{ijmn}^{k}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{k})\varepsilon_{mn}^{k}, \tag{11}$$

где напряжения и деформации можно представить суммами средних и соответствующих флуктуаций по k-компоненту

$$\sigma_{ij}^{k} = \langle \sigma_{ij}^{k} \rangle + \sigma_{ij}^{k0}, \qquad \varepsilon_{ij}^{k} = \langle \varepsilon_{ij}^{k} \rangle + \varepsilon_{ij}^{k0}. \tag{12}$$

Пренебрегая флуктуациями σ_{ij}^{k0}, ε_{ij}^{k0}, из (11), (12) получим

$$\langle \sigma_{ij}^{k} \rangle = \lambda_{ijmn}^{k}(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^{k} \rangle)\langle \varepsilon_{mn}^{k} \rangle, \tag{13}$$

откуда усреднением по макрообъему находим выражение для макронапряжений N-компонентного материала

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k \lambda_{ijmn}^{k}(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^{k} \rangle)\langle \varepsilon_{mn}^{k} \rangle. \tag{14}$$

Усредним интегральное уравнение (9) по условной плотности $f(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \lambda_{ijmn}^{(2)}|_{\nu}^{(1)})$ (плотность распределения деформаций в точках $x_r^{(1)}$, $x_r^{(2)}$и модулей упругости в точке $x_r^{(2)}$ при условии, что точка $x_r^{(1)}$ находится в v-компоненте). Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{n=1}^{N} K_{ijpq}^{\nu k}[\lambda_{pqmn}^{k}(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^{k} \rangle) - \lambda_{pqmn}^{c}]\langle \varepsilon_{mn}^{k} \rangle \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{15}$$

Матричный оператор $K_{ijpq}^{\nu k}$ определяется, согласно (10), равенством

$$K_{ijpq}^{\nu k} = K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})p_{\nu k}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \qquad (\nu, k = 1, \ldots, N), \tag{16}$$

где $p_{\nu k}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) = f(k^{(2)}|_{\nu}^{(1)})$ — вероятность перехода из ν-компонента в точке $x_r^{(1)}$ в k-компонент в точке $x_r^{(2)}$, удовлетворяющая условиям

$$c_k p_{\nu k}(x_r) = c_\nu p_{\nu k}(x_r), \qquad p_{\nu k}(0) = \delta_{\nu k}, \qquad p_{\nu k}(\infty) = c_k, \qquad \sum_{k=1}^{N} p_{\nu k}(x_r) = 1. \tag{17}$$

Рассмотрим двухкомпонентный композитный материал с изотропной матрицей и изотропными однонаправленными квазисфероидальными включениями, т. е.

$$\begin{gathered}\lambda_{ijmn}^k(\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^k\rangle) = \lambda_k(\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^k\rangle)\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_k(\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^k\rangle)I_{ijmn} \qquad (k = 1, 2),\\ \lambda_{ijmn}^c = \lambda_c\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_c I_{ijmn}, \quad p_{\nu k} = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k)\exp\left[-\sqrt{n_1^2(x_1^2 + x_2^2) + n_2^2 x_3^2}\right],\end{gathered} \tag{18}$$

где λ_k, μ_k, λ_c, μ_c — модули упругости компонентов и тела сравнения; $I_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2$ — единичный тензор; n_1, n_2 — величины, обратные к полуосям квазисфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях. В этом случае оператор (16) имеет вид

$$\begin{aligned}&K_{ijpq}^{\nu k} = (\delta_{\nu k} - c_k)\{a_1\delta_{ij}\delta_{pq} + a_2 I_{ijpq} + a_3[\delta_{ij}\delta_{3p}\delta_{3q} + \delta_{i3}\delta_{j3}(\delta_{pq} - 2\delta_{3p}\delta_{3q}) +\\ &\qquad + a_4\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{3p}\delta_{3q}] + a_5(I_{i3pq}\delta_{j3} + I_{j3pq}\delta_{i3} - 2\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{3p}\delta_{3q})\},\\ &a_1 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(1 - s_1 - s_2)}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}, \qquad a_2 = -\frac{(\lambda_c + 3\mu_c)(1 - s_1) + (\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)},\\ &a_3 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(s_1 + 5s_2 - 1)}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}, \qquad a_4 = \frac{\lambda_c + 5\mu_c - (\lambda_c + 13\mu_c)s_1 - 5(\lambda_c + \mu_c)s_2}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)},\\ &a_5 = \frac{\mu_c - (2\lambda_c + 5\mu_c)s_1 + 5(\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)},\\ &s_1 = \frac{1 - s}{1 - n^2}, \qquad s_2 = \frac{1 - (1 + 2n^2)s_1}{2(1 - n^2)}, \qquad n = \frac{n_1}{n_2},\\ &s = \begin{cases} -\dfrac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}\ln(n - \sqrt{n^2 - 1}), & n \geqslant 1,\\ \dfrac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}\arcsin\sqrt{1 - n^2}, & n \leqslant 1.\end{cases}\end{aligned} \tag{19}$$

Отсюда, как предельные случаи при $n = 0$, $n = \infty$, $n = 1$, следуют выражения оператора для слоистых, однонаправленных волокнистых и зернистых материалов соответственно.

Деформирование слоистого композита с пористыми компонентами. Будем считать, что модули объемного сжатия неразрушенных частей слоев K_1, K_2 постоянны, а модули сдвига μ_1, μ_2 задаются функциями

$$\begin{aligned}&\mu_i(J_\varepsilon^i) = \begin{cases} \mu_{i0}, & J_\varepsilon^i < \dfrac{k_i}{2\mu_{i0}},\\ \mu_i' + \left(1 - \dfrac{\mu_i'}{\mu_{i0}}\right)\dfrac{k_i}{2J_\varepsilon^i}, & J_\varepsilon^i \geqslant \dfrac{k_i}{2\mu_{i0}},\end{cases}\\ &J_\varepsilon^i = (\langle\varepsilon_{pq}^i\rangle'\langle\varepsilon_{pq}^i\rangle')^{1/2} \qquad (i = 1, 2),\end{aligned} \tag{20}$$

где $\langle\varepsilon_{pq}^{i}\rangle'$ — девиатор средних по неразрушенной части i-компонента деформаций. При этом, согласно (15)–(19), для $n = 1$ деформации $\langle\varepsilon_{pq}^{i}\rangle$ и эффективные модули пористых волокон и связующего K_ν^*, μ_ν^* определяются соотношениями:

$$\begin{gathered}
\langle\varepsilon_{pq}^{\nu}\rangle = \left[\frac{\overline{K}_\nu}{\overline{K}_\nu + K_\nu p_\nu} V_{ijpq} + \frac{\overline{\mu}_\nu}{\overline{\mu}_\nu + \mu_\nu(J_\varepsilon^\nu)} D_{ijpq}\right]\langle\varepsilon_{pq}^{*\nu}\rangle, \\
K_\nu^* = \frac{4\mu_{\nu0}\xi_\nu(1-p_\nu)^2}{4+(3\xi_\nu-4)p_\nu}, \qquad \mu_\nu^* = \frac{\mu_{\nu0}\widehat{\mu}_\nu(J_\varepsilon^\nu)(1-p_\nu)^2}{1+[\eta_\nu\widehat{\mu}_\nu(J_\varepsilon^\nu)-1]p_\nu}, \qquad \mu_{\nu0}^* = \frac{\mu_{\nu0}(1-p_\nu)^2}{1+(\eta_\nu-1)p_\nu}, \\
\mu_\nu = \mu_{\nu0}\widehat{\mu}_\nu(J_\varepsilon^\nu), \qquad \overline{K}_\nu = \frac{4}{3}\mu_{\nu0}(1-p_\nu), \qquad \overline{\mu}_\nu = \frac{1}{\eta_\nu}\mu_{\nu0}(1-p_\nu), \qquad \xi_\nu = \frac{K_\nu}{\mu_{\nu0}}, \\
\eta_\nu = \frac{6(K_\nu+2\mu_{\nu0})}{9K_\nu+8\mu_{\nu0}}, \quad V_{ijpq} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{pq}, \quad D_{ijpq} = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{pq}) \quad (\nu = 1,2).
\end{gathered} \tag{21}$$

Средние деформации $\langle\varepsilon_{ij}^{*\nu}\rangle$ ν-компонента связаны с макродеформациями $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$, согласно (15)–(19) для $n = 0$, соотношениями

$$\begin{gathered}
\langle\varepsilon_{11}^{*\nu}\rangle = \langle\varepsilon_{11}\rangle, \qquad \langle\varepsilon_{22}^{*\nu}\rangle = \langle\varepsilon_{22}\rangle, \qquad \langle\varepsilon_{12}^{*\nu}\rangle = \langle\varepsilon_{12}\rangle, \\
\langle\varepsilon_{33}^{*\nu}\rangle = s_{\nu1}^*(\langle\varepsilon_{11}\rangle + \langle\varepsilon_{22}\rangle) + s_{\nu2}^*\rangle\varepsilon_{33}\rangle, \qquad \langle\varepsilon_{13}^{*\nu}\rangle = s_{\nu3}^*\langle\varepsilon_{13}\rangle, \qquad \langle\varepsilon_{23}^{*\nu}\rangle = s_{\nu3}^*\langle\varepsilon_{23}\rangle,
\end{gathered} \tag{22}$$

где коэффициенты $s_{\nu1}^*$, $s_{\nu2}^*$, $s_{\nu3}^*$ определяются формулами

$$\begin{gathered}
s_{\nu1}^* = \frac{1}{\lambda_\nu^*+2\mu_\nu^*}\left[\left(\frac{c_1\lambda_1^*}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2\lambda_2^*}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)\left(\frac{c_1}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)^{-1} - \lambda_\nu^*\right], \\
s_{\nu2}^* = \frac{1}{\lambda_\nu^*+2\mu_\nu^*}\left[2\frac{c_1\mu_1^*(\lambda_2^*+2\mu_2^*)+c_2\mu_2^*(\lambda_1^*+2\mu_1^*)}{c_1(\lambda_2^*+2\mu_2^*)+c_2(\lambda_1^*+2\mu_1^*)} + \lambda_\nu^*\right], \\
s_{\nu3}^* = \frac{1}{\mu_\nu}\frac{\mu_1^*\mu_2^*}{c_1\mu_2^*+c_2\mu_1^*}, \qquad \lambda_\nu^* = K_\nu^* - \frac{2}{3}\mu_\nu^*.
\end{gathered} \tag{23}$$

Эффективные модули слоистого двухкомпонентного материала определяются, согласно (14), (18), (19) для $n = 0$, выражениями

$$\begin{gathered}
\lambda_{11}^* = \left(\frac{c_1\lambda_1^*}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2\lambda_2^*}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)^2\left(\frac{c_1}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)^{-1} + \\
+ 4\left[\frac{c_1\mu_1^*(\lambda_1^*+\mu_1^*)}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2\mu_2^*(\lambda_2^*+\mu_2^*)}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right], \\
\lambda_{12}^* = \left(\frac{c_1\lambda_1^*}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2\lambda_2^*}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)^2\left(\frac{c_1}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)^{-1} + 2\left[\frac{c_1\lambda_1^*\mu_1^*}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2\lambda_2^*\mu_2^*}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right], \\
\lambda_{13}^* = \left(\frac{c_1\lambda_1^*}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2\lambda_2^*}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)\left(\frac{c_1}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)^{-1}, \\
\lambda_{33}^* = \left(\frac{c_1}{\lambda_1^*+2\mu_1^*} + \frac{c_2}{\lambda_2^*+2\mu_2^*}\right)^{-1}, \qquad \lambda_{44}^* = 2\left(\frac{c_1}{\mu_1^*} + \frac{c_2}{\mu_2^*}\right)^{-1}.
\end{gathered} \tag{24}$$

Из соотношений (21)–(23) находим

$$J_\varepsilon^\nu = \frac{1-p_\nu}{1+[\eta_\nu \widehat{\mu}_\nu(J_\varepsilon^\nu)-1]p_\nu} J_\varepsilon^{*\nu},$$

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^{*\nu} = \Bigg\{ & \left[1+s_{\nu1}^{*2}-\frac{1}{3}(1+s_{\nu1}^*)^2\right](\langle\varepsilon_{11}\rangle+\langle\varepsilon_{22}\rangle)^2-2\langle\varepsilon_{11}\rangle\langle\varepsilon_{22}\rangle+ \\ & +2\left[s_{\nu1}^* s_{\nu2}^*-\frac{1}{3}\left(1+s_{\nu1}^*\right)s_{\nu2}^*\right]\left((\langle\varepsilon_{11}\rangle+\langle\varepsilon_{22}\rangle)\langle\varepsilon_{33}\rangle+\frac{2}{3}{s_{\nu2}^*}^2\langle\varepsilon_{33}\rangle^2+\right. \\ & +2[\langle\varepsilon_{12}\rangle^2+{s_{\nu3}^*}^2(\langle\varepsilon_{13}\rangle^2+\langle\varepsilon_{23}\rangle^2)]\Bigg\}^{1/2} \qquad (\nu=1,2). \end{aligned} \tag{25}$$

Кратковременная повреждаемость слоистого композита при деформационном критерии микропрочности. Процессы повреждаемости компонентов слоистого материала будем описывать рассеянным разрушением микрообъемов. Если исходить из условия разрушения микрообъема материала в виде силового критерия микропрочности, то для физически нелинейного материала поврежденность можно определить лишь для восходящей части диаграммы деформирования микрообъема [4]. Для оценки полного ресурса работы физически нелинейного материала, включающего ниспадающий участок диаграммы деформирования, примем условие кратковременного разрушения микрообъема неразрушенной части ν-компонента в виде деформационного критерия прочности

$$J_\varepsilon^\nu = r_\nu \qquad (\nu=1,2), \tag{26}$$

где предел прочности r_ν образует эргодическое случайное поле.

Одноточечную функцию распределения $F_\nu(r_\nu)$ будем аппроксимировать распределением Вейбулла

$$F_\nu(r_\nu) = \begin{cases} 0, & r_\nu < r_{\nu0}, \\ 1-\exp[-m_\nu(r_\nu-r_{\nu0})^{n_\nu}], & r_\nu \geqslant r_{\nu0}, \end{cases} \tag{27}$$

где $r_{\nu0}$ — минимальное значение микропрочности ν-компонента по деформационному критерию; m_ν, n_ν — постоянные.

Если разрушенные микрообъемы моделировать случайно расположенными квазисферическими порами, то, исходя из свойств одноточечной функции распределения $F_\nu(r_\nu)$ эргодического случайного поля r_ν, можем записать уравнение баланса поврежденности (пористости) ν-компонента

$$p_\nu = p_{\nu0}+(1-p_{\nu0})F_\nu(J_\varepsilon^\nu) \qquad (\nu=1,2). \tag{28}$$

На основе (25), (28) получим систему нелинейных уравнений относительно инвариантов J_ε^ν и пористостей p_ν

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^\nu\{1+[\eta_\nu\mu_\nu(J_\varepsilon^\nu)-1]p_\nu\} = (1-p_\nu)\Bigg\{ & \left[1+s_{\nu1}^{*2}-\frac{1}{3}(1+s_\nu^*)^2\right](\langle\varepsilon_{11}\rangle+\langle\varepsilon_{22}\rangle)^2- \\ -2\langle\varepsilon_{11}\rangle\langle\varepsilon_{22}\rangle+2\left[s_{\nu1}^* s_{\nu2}^*-\frac{1}{3}(1+s_{\nu1}^*)s_{\nu2}^*\right] & (\langle\varepsilon_{11}\rangle+\langle\varepsilon_{22}\rangle)\langle\varepsilon_{33}\rangle+\frac{2}{3}{s_{\nu2}^*}^2\langle\varepsilon_{33}\rangle^2+ \end{aligned}$$

$$+\,2\left[\langle\varepsilon_{12}\rangle^2+{s^*_{\nu 3}}^2\Big(\langle\varepsilon_{13}\rangle^2+\langle\varepsilon_{23}\rangle^2\Big)\right]\Bigg\}^{1/2}, \tag{29}$$

$$p_\nu = p_{\nu 0} + (1-p_{\nu 0})F_\nu(J^\nu_\varepsilon) \qquad (\nu = 1, 2).$$

Численные результаты. Численное исследование совместных процессов деформирования и повреждаемости проведено для слоистого двухкомпонентного композита на основе стекла и эпоксидного связующего, диаграмма деформирования которого имеет ниспадающий участок, с безразмерными численными значениями характеристик

$$\frac{K_1}{\mu_{20}} = 33{,}584; \quad \frac{\mu_1}{\mu_{20}} = 25{,}188; \quad \frac{K_2}{\mu_{20}} = 3{,}238; \quad \frac{k_2}{\mu_{20}} = 0{,}02207; \quad \frac{\mu_2'}{\mu_{20}} = -0{,}05. \tag{30}$$

Одноточечная функция распределения предела микропрочности связующего принята в виде распределения Вейбулла

$$F_2(r_2) = \begin{cases} 0, & r_2 < r_{20}, \\ 1-\exp[-m_2(r_2-r_{20})^{n_2}], & r_2 \geqslant r_{20}, \end{cases} \tag{31}$$

$$m_2 = 1000; \qquad n_2 = 2; \qquad r_{20} = 0{,}05; \qquad p_{20} = 0.$$

Материал наполнителя принят линейно упругим, причем повреждаемость в нем отсутствует ($p_1 = p_{10} = 0$).

Численные решения нелинейных уравнений (29) с учетом соотношений (21), (23), (24), для слоистого композита при заданных одноосных макродеформациях

$$\langle\varepsilon_{11}\rangle \neq 0, \qquad \langle\sigma_{22}\rangle = \langle\sigma_{33}\rangle = \langle\sigma_{12}\rangle = \langle\sigma_{13}\rangle = \langle\sigma_{23}\rangle = 0, \tag{32}$$

$$\langle\varepsilon_{33}\rangle \neq 0, \qquad \langle\sigma_{11}\rangle = \langle\sigma_{22}\rangle = \langle\sigma_{12}\rangle = \langle\sigma_{13}\rangle = \langle\sigma_{23}\rangle = 0 \tag{33}$$

представлены соответственно на рис. 1, 2 и 3, 4, в виде зависимостей пористости p_2, макронапряжений $\langle\overline{\sigma}_{11}\rangle = \langle\sigma_{11}\rangle/\mu_{20}$, $\langle\overline{\sigma}_{33}\rangle = \langle\sigma_{33}\rangle/\mu_{20}$ соответственно от макродеформаций $\langle\varepsilon_{11}\rangle$

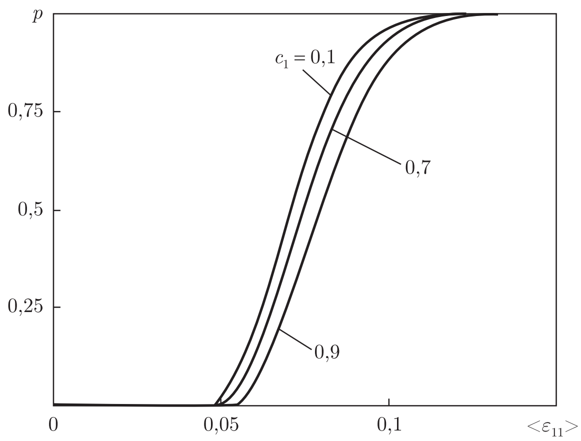

Рис. 1

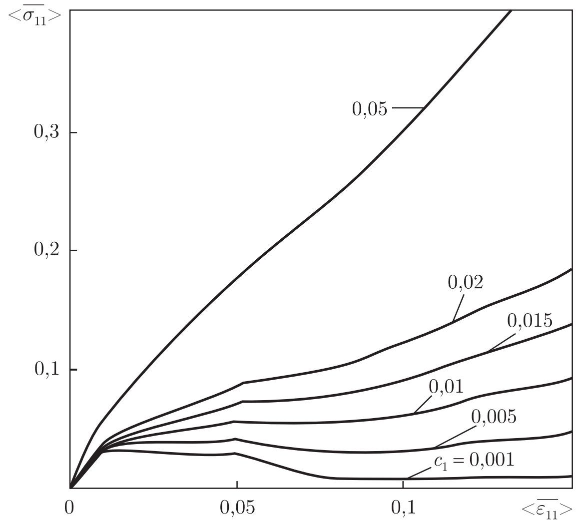

Рис. 2

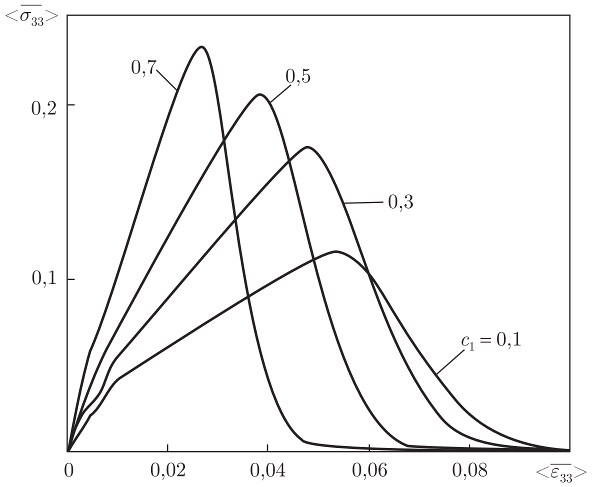

Рис. 3

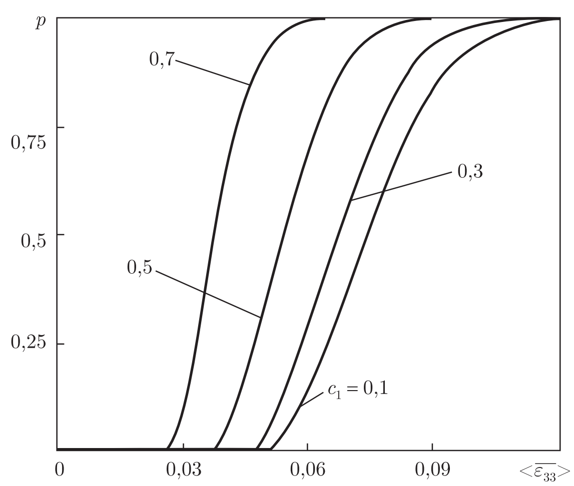

Рис. 4

и $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для различных значений объемного содержания стеклонаполнителя c_1. Как видим, при одноосном растяжении поперек слоев (33) повреждаемость связующего существенно зависит от объемного содержания стеклонаполнителя c_1 (см. рис. 3), возрастая с его ростом. При одноосном растяжении вдоль слоев (31) повреждаемость связующего менее существенно зависит от объемного содержания стеклонаполнителя c_1 (см. рис. 1), причем она убывает с его ростом. Диаграммы деформирования при растяжении поперек слоев (см. рис. 4) имеют восходящие и нисходящие участки, отличаясь только количественно в зависимости от объемного содержания стеклонаполнителя c_1 (см. рис. 4). Нисходящие участки обусловлены совместным влиянием нелинейности и повреждаемости связующего. При растяжении вдоль слоев влияние нелинейности и повреждаемости связующего на диаграммы деформирования является существенным лишь в интервале $0{,}001 \leqslant c_1 \leqslant 0{,}05$ (см. рис. 2). При этом в интервале $0 < c_1 \leqslant 0{,}012$ диаграммы деформирования имеют три участка — восходящий, нисходящий и снова восходящий.

1. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No 10. – P. 1035–1041.
2. *Khoroshun L. P.* Micromechanics of Short-term thermal microdamageability // Ibid. – 2001. – **37**, No 9. – P. 1158–1165.
3. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 2. Long-term damage // Ibid. – 2007. – **43**, No 2. – P. 127–135.
4. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Deformation and damage of composite materials of stochastic structure: physically nonlinear problems (review) // Ibid. – 2012. – **48**, No 4. – P. 359–413.
5. *Khoroshun L. P.* Structural short-term damage model with a strain-based microfailure criterion // Ibid. – 2013. – **49**, No 1. – P. 62–72.
6. *Khoroshun L. P., Nazarenko L. V.* Deformation and damage of composites with anisotropic components (review) // Ibid. – 2013. – **49**, No 4. – P. 388–455.
7. *Khoroshun L. P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Ibid. – 2000. – **36**, No 10. – P. 1284–1316.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.12.2013

Член-кореспондент НАН України **Л. П. Хорошун**

Побудова моделі деформування і короткочасної пошкоджуваності шаруватого композита на основі деформаційного критерію мікроміцності

Побудовано структурну модель зв'язаних процесів деформування і короткочасної пошкоджуваності шаруватих композитів з фізично нелінійними компонентами, діаграми деформування яких мають спадаючі гілки. Пошкоджуваність моделюється розсіяним руйнуванням мікрооб'ємів компонентів і утворенням на їх місці стохастично розташованих квазісферичних мікропор. Умовою короткочасного руйнування мікрооб'єму матеріалу прийнято деформаційний критерій міцності відносно другого інваріанта девіатора мікродеформацій. Досліджено вплив об'ємного вмісту компонентів на деформування і пошкоджуваність шаруватого композита.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **L. P. Khoroshun**

Construction of a model of deformation and short-time damageability for a laminate composite on the basis of the deformation criterion of microstrength

A structural theory of the coupled processes of deformation and short-time damageability for laminate composites with physically nonlinear components and with the decreasing branches of deformation diagrams is constructed. The damageability is modeled by the dispersed destruction of microvolumes of a material and the formation of stochastically arranged quasispherical micropores instead of them. As a condition of short-time destruction of a microvolume of the material, the deformation criterion of strength relative to the second invariant of the deviator of microstrains is assumed. A regularity of the effect of volume components on the deformation and damageability of the laminate composite is studied.