

Н. П. Плахтиенко

О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ, СТЕСНЕННОЙ ПЛОСКОЙ
СИММЕТРИЧНОЙ СВЯЗЬЮ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

Abstract. On the one-parametric set of closed plane constraints with four symmetry axes, the system of continuous processes with periods $T \in [4\sqrt{2}, 8]$ is constructed. They express the values of Cartesian coordinates of the moving point as the functions of passed distance. The 2π – periodic processes are revealed, which are differing from the classical trigonometrical process by the curvature sign in every point of its existence. The asymptotic 222-periodic processes are evaluated and they are applied to the problem on motion of the material point over the closed plane-ribbed surface. A way is shown to construct the continuous evolution processes of hyperbolic type, which arguments are the lengths of arcs of open lines with a pair of symmetry axes. A link is established between the differential of plane curve with Lagrangian of the simple dynamical system of non-natural type. A nonlinear dynamical system of the second order is built, the partial solution of which can be T-periodic or evolution processes of hyperbolic type, what depends on the initial values.

Key words: closed symmetric constraints, 222-periodic and evolution processes of hyperbolic type, Lagrangian of the simple dynamical system of non-natural type.

Введение.

Периодические процессы и симметрические геометрические структуры широко распространены в объектах физической и механической природы. Классическими примерами периодических процессов в природе являются движения планет солнечной системы, рассматриваемые как точечные массы для орбитальных перемещений или абсолютно твердые тела при их вращательных движениях относительно фиксированной в пространстве оси или точки. В качестве природных симметричных структур, описываемых периодическими зависимостями, можно указать на кристаллические объекты, включающие фуллерены. Они составляют основу современной физики твердого тела и наномеханики материалов [2, 12].

Математическим аппаратом исследования циклических движений материальных систем и симметричных пространственных объектов являются классические (круговые, сферические, эллиптические) и другие специальные аналитические функции. Поэтому теория периодических и циклических процессов является наиболее разработанной в современном динамическом анализе дискретных и непрерывных физико-механических систем [1, 3, 4, 7, 8, 11, 13]. Однако некоторые задачи математического моделирования объектов и процессов физико-технических систем требуют также применения периодических функций некруговой и неаналитической природы. К ним относятся задачи динамики виброударных и волновых систем; геометрические задачи об отображении граничных поверхностей сплошных упругих объектов машиностроения, жилищного и промышленного строительства, кристаллографии, включая нанокристаллические совокупности. Неаналитические периодические функции удобны для моделирования колебательных процессов движения механических систем под

действием разрывных нагрузок [3, 6]. Они полезны в задачах параметризации замкнутых плоско-ребристых поверхностей твердых тел, включая плоские и пространственные фуллерены углеродного типа.

Цель данной работы состоит в расширении класса элементарных периодических и эволюционных процессов, пригодных для математического моделирования некоторых неклассических физико-механических задач.

§1. Кинематический способ задания движения точки по симметричной связи.

Рассмотрим на плоскости Oxy однопараметрическое семейство конечных связей

$$F(x, y, p) = |y|^p - |1 - |x|^p| = 0 \quad (0 < p < \infty). \quad (1.1)$$

На рис. 1 показаны кривые (1.1) для трех различных значений параметра p : $p_1 = 0,5615$; $p_2 = 1$; $p_3 = 2$. Переменные x, y и параметр p в (1.1) являются безразмерными величинами.

С уравнением (1.1) связано три группы симметрий: $L_2, 2P, C$. Группа L_2 означает, что при повороте этих линий на угол π относительно перпендикулярной к плоскости Oxy оси, проходящей через точку O , повернутые линии совмещаются с неподвижными линиями. Кривые (1.1) имеют также 2 линии симметрии: $x = 0, y = 0$. Группа $2P$ связана с инвариантностью уравнения (1.1) при замене $x = -x, y = -y$.

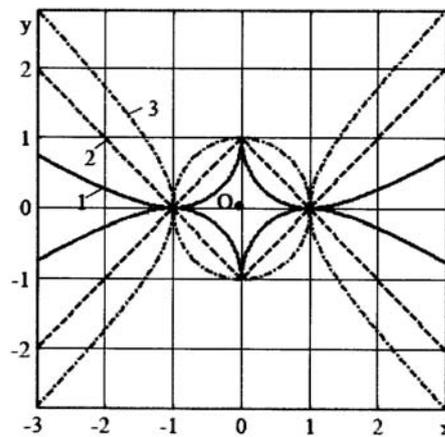


Рис. 1

Далее имеем группу симметрий (C), когда каждой точке $A(x, y)$ линии (1.1) отвечает центрально симметричная ей точка $\bar{A}(-x, -y)$.

Применительно к области изменения аргумента x формулу (1.1) следует использовать отдельно. Для области $D_1(|x| \leq 1)$ она принимает вид

$$|x|^p + |y|^p = 1, \quad (1.2)$$

а в области $D_2(|x| > 1)$, соответственно, имеем

$$|x|^p - |y|^p = 1. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) описывают замкнутые линии более высокого уровня симметрии $L_4 4PC$. Они могут порождать периодические процессы при движении изображающей точки по замкнутым траекториям при задании ее декартовых координат x, y как функций пройденного пути. Соотношение (1.3) описывает разомкнутые линии, которые включают гиперболу при $p = 2$ и могут порождать эволюционные (непериодические) функции типа гиперболических.

В точках $|x|=1$ линии из областей D_1, D_2 с одинаковым параметром p гладко смыкаются, но при переходе точки с замкнутой на разомкнутую ветвь кривой (1.1) и наоборот кривизна траектории претерпевает скачкообразный разрыв. Линия при $p = 1$, содержащаяся в объединенной области $D = D_1 \cap D_2$, является единой и знаковой. Она разделяет линии с противоположными знаками их кривизны.

Далее, развивая подход работ [6, 7], вычислим периодические процессы на замкнутых кривых (1.2), включая их предельное (асимптотическое) значение. Определим

также эволюционные процессы на разомкнутых траекториях. Воспользуемся известными представлениями кинематики точки на плоскости. Поскольку точка на линиях (1.2) плоскости Oxy имеет одну степень свободы, в качестве обобщенной координаты выберем длину дуги (пути) σ , который она проходит в направлении против движения часовой стрелки. Начало отсчета длины пути выберем в точке $y = 0, x = 1$. При прохождении траекторий (1.2) по часовой стрелке параметр σ примем отрицательным. Вычислим длину замкнутых линий (1.2). При единичной скорости движения длина этих линий определяет период обращения точки по замкнутой траектории. Затем искомую длину обозначим $T = T(p)$ и вычислим ее как контурный интеграл по линии (1.2), т.е. $T = \oint d\sigma; d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Принимая во внимание симметрию замкнутых линий, имеем

$$T = T(p) = 4 \int_0^1 K(x, p) dx; \quad K(x, p) = \frac{d\sigma}{dx} = \pm \sqrt{\left[(1 - |x|^p)^{\frac{1}{p}-1} |x|^{p-1} \right]^2 + 1}. \quad (1.4)$$

Здесь перед корнем принимаем знак «+», если $dx > 0$ и «-» – при $dx < 0$. При $p = 1$ вычислим $T(1) = 4\sqrt{2}$. Для всех $p \neq 1$ интеграл (1.4) не является собственным. При $p > 1, x = \pm 1$ ($p < 1, x = 0$) подынтегральная функция имеет разрыв второго рода. Когда $p = 2$, интеграл (1.4) вычисляем в форме трансцендентного числа $T(2) = 2\pi$, которое соответствует длине круга единичного радиуса. Во всех других случаях интеграл формул (1.4) может быть определен численно.

Для получения высокоточных результатов необходимо исключить точки разрыва из интервала интегрирования. Воспользуемся симметричностью линий (1.2) относительно прямой $y = x$. Эта прямая делит дуги траекторий (1.2) в первом и третьем квадранте на равновеликие дуги в точках, которые имеют абсциссы $= \pm(1/2)^{1/p} = y^*$.

Следовательно, для $p > 1$ имеем $T(p) = 8 \int_0^{x^*} K(u, p) du$, а при $p \leq 1$ –

$$T(p) = 8 \int_{x^*}^1 K(u, p) du.$$

Для кривых (1.2) имеют место такие предельные соотношения: $\lim_{p \rightarrow \infty} T(p) = 8$
 $= \lim_{p \rightarrow +0} T(p) = 8$.

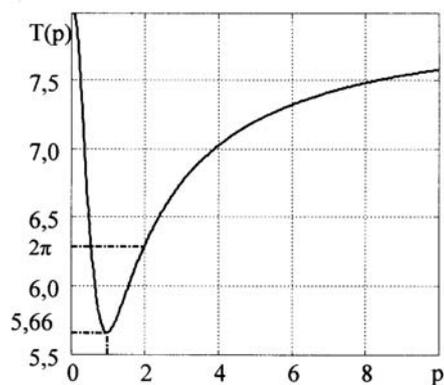


Рис. 2

На рис. 2 показан график линии $T(p)$, которая имеет асимптоту $T = 8$ и точку минимума, где $dT/dp|_{p=4\sqrt{2}} = 0$. Все линии, параллельные оси абсцисс этого графика при $8 > T > 4\sqrt{2}$, пересекают кривую $T(p)$ в двух точках, которые назовем эквипериодными. Эквипериодным точкам отвечают замкнутые линии (1.2) одинаковой длины. Координаты, вычисленные как функции длины траектории (1.2), обозначим через $y_p(\sigma) = \sin ip(\sigma, p), x_p(\sigma, p) = \cos ip(\sigma, p)$. Эти функции являются периодическими по аргументу σ с периодом $T_p = T(p)$:

$$\text{sip}(\sigma, p) = \text{sip}(\sigma + T_p, p); \quad \cos ip(\sigma, p) = \cos ip(\sigma + T_p, p).$$

В дальнейшем параметрический аргумент p функций $\text{sip}(\sigma, p)$, $\cos ip(\sigma, p)$ будем иногда опускать. При движении точки по линиям (1) $\sigma = \sigma(t)$, где t – параметр времени, функции $y_p(\sigma(t))$, $x_p(\sigma(t))$ могут описывать определенные физико-механические процессы.

Введем также функцию p -тангенса: $\text{tap}(\sigma) = \text{sip}(\sigma) / \cos ip(\sigma)$. Эта функция имеет период $T_p / 2$, т. е. $\text{tap} \sigma = \text{tap}(\sigma + T_p / 2)$. Построим функцию $\text{rip}(\sigma)$ по формуле $\text{rip}(\sigma) = \sqrt{\cos ip^2 \sigma + \text{sip}^2 \sigma}$, которая определяет расстояние текущей точки траекторий (1.2) от начала координат, она является периодической с периодом $T_p / 4$, $\text{rip}(\sigma) = \text{rip}(\sigma + T_p / 4)$, но для $p = 2$ – $\text{rip}(\sigma) \equiv 1$. Так же, как и для ромбических функций [6], определенное значение представляют нормированные функции $n\text{sip}(\sigma) = \text{sip}(\sigma) / \text{rip}(\sigma)$, $n \cos ip(\sigma) = \cos ip(\sigma) / \text{rip}(\sigma)$.

Для введенных функций имеют место такие функциональные тождества:

$$|\text{sip}(\sigma)|^p + |\cos ip(\sigma)|^p = 1; \quad n\text{sip}^2(\sigma) + n \cos ip^2(\sigma) = 1. \quad (1.5)$$

Последнее соотношение делает справедливыми классические теоремы синусов и косинусов для плоских треугольников с заменой тригонометрических функций синусов и косинусов на функции $n\text{sip}(\sigma)$, $n\cos ip(\sigma)$. Вычисление функций $\text{sip}(\sigma)$, $\cos ip(\sigma)$ в окрестности точек пересечения траекторий с осями декартовых координат осуществляется по формулам, аналогичным формулам приведения для круговых функций. В дальнейшем используем таблицу, элементы которой являются также следствием симметрии линий (1.2) с группой $L_4 4PC$.

σ	$\text{sip}(\sigma)$	$\cos ip(\sigma)$
$T_p / 4 \mp \sigma$	$\cos ip(\sigma)$	$\pm \text{sip}(\sigma)$
$T_p / 2 \mp \sigma$	$\pm \text{sip}(\sigma)$	$-\cos ip(\sigma)$

Аналогичные формулы имеют место и для нормированных функций $n\text{sip}(\sigma)$, $n\cos ip(\sigma)$.

§2. Интегральные уравнения для множества периодических процессов.

Следуя [7], для построения зависимости $x(\sigma) = \cos ip(\sigma)$ исходим из формулы текущей длины траектории (1.2) как функции абсциссы подвижной точки для произвольного значения параметра p

$$\sigma_p = - \int_1^x K(u, p) du. \quad (2.1)$$

Отсюда находим $\sigma_p = f(x)$. Для обратной функции $\sigma_p = f(x)$ имеем $x = f^{-1}(\sigma_p) = x(\sigma_p)$. В первом квадранте осей Oxy функция $\sigma_p = f(x)$ является монотонной, поэтому построение зависимости $x = f^{-1}(\sigma_p)$ сводится к построению графика откладыванием значения x по оси ординат, а величины σ_p – по оси абсцисс. С учетом двузначности функции $K(u, p)$ согласно формуле (1.4) интегральная формула (2.1) продуцирует зависимость $\cos ip(\sigma)$ как парную функцию аргумента: два значения $\pm \sigma$ имеют место для одного и того же значения верхнего предела интегрирования.

Функцию $sip(\sigma)$ вычисляем согласно (1.2)

$$y(\sigma) = sip(\sigma) = \pm(1 - |x(p)|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

как нечетную функцию σ : $sip(\sigma) = -sip(-\sigma)$. Эту зависимость можно также определить по формуле вида (2.1), изменив в ней знак и интервал интегрирования

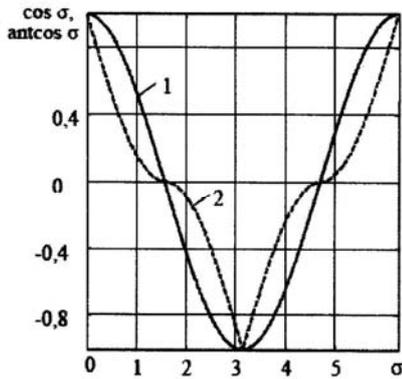
$$\sigma = \int_0^y K(u, p) du. \quad (2.3)$$

Эта формула порождает зависимость $\sigma = H(y)$, обратив которую, имеем $y(\sigma) = sip(\sigma) = H^{-1}(\sigma)$. Нечетность функции $sip(\sigma) = y(\sigma)$ следует из формулы (2.3) при замене в ней y на $-y$, при этом свойство $y(0) = 0$ очевидно.

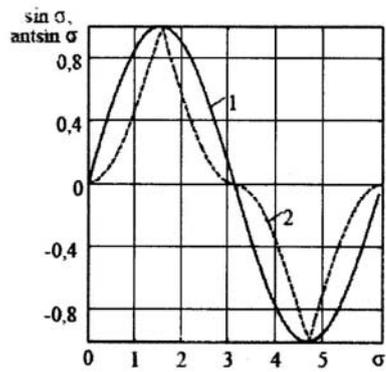
Для получения высокоточных результатов при пользовании формулами (2.1), (2.3) следует исключить точки разрыва функции $K(u, p)$ из интервалов интегрирования.

Математический алгоритм такого исключения, изложенный в [7], предусматривает параллельное вычисление функций $\cos ip(\sigma)$, $sip(\sigma)$ из интегральных соотношений вида (2.1), (2.3) на интервалах x, y , которые не содержат точек разрыва функции $K(u, p)$, и последующего использования уравнения связи (1.2) для интервалов с точками разрыва. При наличии группы симметрии порядка $L_4 PC$ интегральные формулы (2.1), (2.3) используем только в первой четверти периода.

Таким образом, согласно интегральных формул (2.1), (2.3), конечного соотношения (2.2) и таблицы построим две пары эквипериодных процессов, которые отвечают периоду $T = 2\pi$. Подставляя в формулы (1.4) $T(p) = 2\pi$, определим два таких корня: $p_1 = 0,5615$, $p_2 = 2$. На рис. 3, а, б показаны эквипериодные гармоники $\cos ip(\sigma, p_i)$, $sip(\sigma, p_i)$, $i = 1, 2$. Как видим, корень p_2 отвечает классическим тригонометрическим функциям: $\cos ip(\sigma, p_2) = \cos \sigma$, $sip(\sigma, p_2) = \sin \sigma$. Непрерывные функции $\cos ip(\sigma, p_1) = \text{ant} \cos(\sigma)$, $sip(\sigma, p_1) = \text{ant} \sin(\sigma)$ имеют разрывные производные в трех и двух точках на одном периоде их существования, соответственно. Очевидно, что полученные пары периодических функций отличаются знаком $k(\sigma)$ – кривизны в каждой точке ее существования.



а



б

Рис. 3

Вычислим угловую скорость Ω обращения вектора касательной к плоской кривой в точке, которая движется согласно закону $x = x(t)$, $y = y(t)$, где t параметр времени

$$\Omega = \frac{d}{dt} \left(\text{arctg} \frac{dy}{dx} \right) = k(\sigma) \frac{d\sigma}{dt}.$$

На рис. 3, а, б величина Ω для каждой пары кривых отличается знаком. На рис. 4 показаны нормирующий делитель $rip(\sigma)$ и нормированные гармоники при $p = p_1$ $pacos(\sigma)$, $nasin(\sigma)$, т.е.

$$na \cos(\sigma) = ant \cos(\sigma, p_1) / rip(\sigma, p_1); \quad na \sin(\sigma) = ant \sin(\sigma, p_1) / rip(\sigma, p_1);$$

$$rip(\sigma, p_1) = (ant \cos^2(\sigma, p_1) + ant \sin^2(\sigma, p_1))^{1/2}. \quad (2.4)$$

Интегральные уравнения (2.1), (2.3) могут порождать непрерывные периодические процессы, отображаемые кусочно-прямолинейными отрезками. Согласно рис. 2 эти процессы отвечают значениям параметра p , обуславливающим экстремальные (предельные) значения функции $T(p)$. Это, прежде всего, значение $p = 1$, отвечающее её минимуму: $T_{\min} = T(1) = 2^{5/2}$, а также пара асимптотических значений, получаемых при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$, которые обуславливают предельно возможное значение: $T_{\max} = T(0) = T(\infty) = 8$.

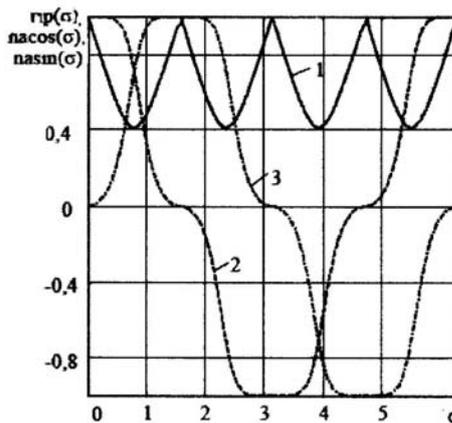


Рис. 4

§3. Вычисление процессов с предельными значениями периодов.

Рассмотрим случай $p = 1$, при котором $K(u, 1) = \sqrt{2} = q$ и функцию $x(\sigma) = \cos ip(\sigma, 1)$ определяем непосредственно из уравнения (2.1), т.е. $\sigma = -q \int_1^x du$.

Отсюда имеем

$$x(\sigma) = \cos ip(\sigma, 1) = 1 - \sigma / q \quad (0 \leq \sigma \leq 2q, \quad -1 \leq x(\sigma) \leq 1). \quad (3.1)$$

Следовательно, искомая функция определена на полупериоде ее аргумента. Далее воспользуемся таблицей (см. выше) $\cos ip(T/2 + \sigma) = -\cos ip(\sigma)$ для произвольных p . Инверсия последней формулы и перенос значений ее линии вправо на $2q$ дает завершающий отрезок функции на втором полупериоде, т.е.

$$x(\sigma) = \cos ip(\sigma, 1) = \sigma / q - 3 \quad (2q < \sigma \leq 4q). \quad (3.2)$$

Функцию $sip(\sigma, 1)$ вычисляем по алгебраической формуле (2.2) для $p = 1$. В результате имеем

$$y(\sigma) = sip(\sigma, 1) = \begin{cases} \sigma / q & \text{при } 0 \leq \sigma \leq q; \\ 2 - \sigma / q & \text{при } q < \sigma \leq 3q; \\ \sigma / q - 4 & \text{при } 3q < \sigma \leq 4q; \end{cases} \quad (-1 \leq y(\sigma) \leq 1). \quad (3.3)$$

Функции $sip(\sigma, 1) = sir(\sigma)$, $\cos ip(\sigma, 1) = cor(\sigma)$ с минимальным периодом $T(1) = 4\sqrt{2}$ назовем ромбическими как порожденные ромбоквадратом, т.е. квадратом с осями декартовых координат Oxy , совпадающими с его диагоналями. Они отвечают единственному минимуму кривой $T(p)$ и не имеют сопряженных с ними эквипериодичных функций. На множестве замкнутых линий (2.2) функции $sir \sigma$, $cor \sigma$ являются единственными функциями минимального периода. Эти функции построены в [5] без связи их с интегральными уравнениями (2.1), (2.3).

Ромбические функции, отвечающие параметру $p = 1$, являются не единственными периодическими процессами, имеющими кусочно-линейную форму. Такую же форму имеют функции $sip(\sigma, p)$, $\cos ip(\sigma, p)$ при граничных или весьма близких к ним значениях параметра p . Они определяются следующим образом: для первой пары имеем

$$\lim_{p \rightarrow 0} sip(\sigma, p) = f_s(\sigma); \quad \lim_{p \rightarrow 0} \cos ip(\sigma, p) = f_c(\sigma). \quad (3.4)$$

Процессы $f_s(\sigma)$, $f_c(\sigma)$ являются периодическими с периодом $T = 8$, $f_s(\sigma) = f_s(\sigma + 8)$, $f_c(\sigma) = f_c(\sigma + 8)$; при этом процесс $f_c(\sigma)$ получаем из процесса $f_s(\sigma)$ сдвигом его на четверть периода влево вдоль оси абсцисс

$$f_c(\sigma) = f_s(2 - \sigma). \quad (3.5)$$

Вторая пара предельных (асимптотических) периодических процессов с максимальным периодом $T = 8$ определяется такими соотношениями:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} sip(\sigma, p) = g_s(\sigma); \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \cos ip(\sigma, p) = g_c(\sigma);$$

$$g_s(\sigma) = g_s(\sigma + 8); \quad g_c(\sigma) = g_s(2 - \sigma). \quad (3.6)$$

Эти процессы получаем как решения интегральных уравнений (2.1), (2.3) с использованием следующих соотношений:

$$x^*(p) = y^*(p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}; \quad \lim_{p \rightarrow 0} x^*(p) = 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x^*(p) = 1; \quad \lim_{p \rightarrow 0} T(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} T(p) = 8;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} K(x, p) = \begin{cases} \pm 1 & \forall x \neq 0; \\ \pm \infty & \text{при } x = 0; \end{cases} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} K(x, p) = \begin{cases} \pm 1 & \forall |x| < 1; \\ \pm \infty & \text{при } x = \pm 1. \end{cases}$$

Применяя эти соотношения, вычислим процессы $f_s(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ и представим их в графической и аналитической форме. На рис. 5, а, б сплошными линиями показаны процессы $f_s(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ на интервале одного периода. Они вычислены при двух значениях параметра p , которые отличаются на четыре порядка: $f_s(\sigma) \approx sip(\sigma, p)|_{p=0.05}$; $g_s(\sigma) \approx sip(\sigma, p)|_{p=500}$.

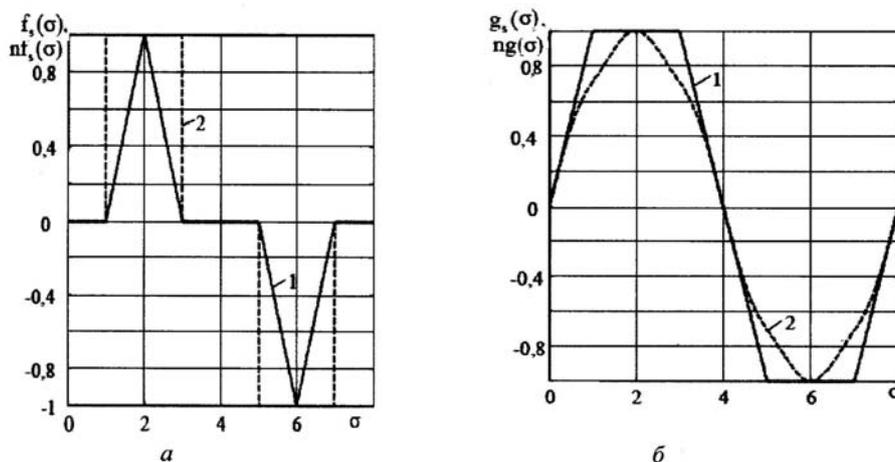


Рис. 5

Таким образом, при предельно малых значениях параметра p имеем систему знакопеременных треугольных импульсов. Они разделены отрезками почти нулевого значения длиной $T/4 = 2$. Для весьма больших значений параметра p имеют место импульсы трапециевидальной формы. Они содержат горизонтальные отрезки длиной $T/4 = 2$, удаленные от оси абсцисс на величину, почти равную единице. Кусочно-линейное представление этих процессов на интервале двух периодов $\sigma \in [-8, 8]$ имеет вид

$$f_s(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq |\sigma| \leq 1; \\ \sigma - \text{sign}\sigma & \text{при } 1 < |\sigma| \leq 2; \\ 3\text{sign}\sigma - \sigma & \text{при } 2 < |\sigma| \leq 3; \\ 0 & \text{при } 3 < |\sigma| \leq 5; \\ -\sigma + 5\text{sign}\sigma & \text{при } 5 < |\sigma| \leq 6; \\ -7\text{sign}\sigma + \sigma & \text{при } 6 < |\sigma| \leq 7; \\ 0 & \text{при } 7 < |\sigma| \leq 8. \end{cases} \quad g_s(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{при } 0 \leq |\sigma| \leq 1; \\ \text{sign}\sigma & \text{при } 1 < |\sigma| \leq 3; \\ 4\text{sign}\sigma - \sigma & \text{при } 3 < |\sigma| \leq 5; \\ -\text{sign}\sigma & \text{при } 5 < |\sigma| \leq 7; \\ \sigma - 8\text{sign}\sigma & \text{при } 7 < |\sigma| \leq 8. \end{cases} \quad (3.7)$$

Аналитическое представление процессов (3.7) можно получить на основе формул (3.5), (3.6). Нормированные процессы $nf_s(\sigma), nf_c(\sigma), ng_s(\sigma), ng_c(\sigma)$ вычисляем по формулам вида (2.4)

$$nf_\lambda(\sigma) = f_\lambda(\sigma)/rif(\sigma); \quad ng_\lambda(\sigma) = g_\lambda(\sigma)/rig(\sigma); \quad \lambda = s, c; \quad rif(\sigma) = \sqrt{f_c^2(\sigma) + f_s^2(\sigma)};$$

$$rig(\sigma) = \sqrt{g_c^2(\sigma) + g_s^2(\sigma)}; \quad rif(\sigma + 2) = rif(\sigma), \quad rig(\sigma + 2) = rig(\sigma).$$

Применительно к формулам (3.1) – (3.3) получены такие выражения:

$$rif(\sigma) = \begin{cases} 1 - |\sigma| & \text{при } 0 \leq |\sigma| \leq 1; \\ |\sigma| - 1 & \text{при } 1 < |\sigma| \leq 2; \end{cases} \quad rig(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{1 + \sigma^2} & \text{при } 0 \leq |\sigma| \leq 1; \\ \sqrt{1 + (2 - |\sigma|)^2} & \text{при } 1 < |\sigma| \leq 2. \end{cases}$$

Процессы $nf_s(\sigma), ng_s(\sigma)$ показаны на рис. 5, а, б штриховыми линиями.

Используя в классических уравнениях замкнутых поверхностей предельные периодические функции $cor(\sigma), sir(\sigma), g_c(\sigma), g_s(\sigma)$ вместо тригонометрических (круговых), можно получить математические модели конечных связей в форме плоско-ребристых поверхностей. Такие модели могут иметь и чисто строительно-архитектурное значение. Ниже рассмотрена аналитико-механическая задача о движении точки, стесненной конечной связью в виде ребристой поверхности.

§4. Неклассическая задача о движении материальной точки по негладкой поверхности.

Классическим примером движения системы, подчиненной связям, является движение материальной точки по поверхности, имеющей в каждой точке конечные главные радиусы кривизны, а произвольная кривая на поверхности имеет конечную нормальную и геодезическую кривизну [10, с. 295]. Поверхность в трехмерном пространстве с декартовой системой координат $Oxyz$ задаем уравнениями

$$\rho = \rho(q_1, q_2) \quad (\rho = x, y, z), \quad (4.1)$$

где правые части являются непрерывными функциями параметров q_1, q_2 . Эти параметры при определенных условиях гладкости поверхности можно называть гауссовыми координатами точки на поверхности.

Скорость материальной точки $\dot{\rho} = \sum_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i$ представляет вектор на поверхности.

Однако вектор ускорения точки $\ddot{\rho}(q_1, q_2)$ не принадлежит поверхности, так как на ней он представляется суммой двух взаимно перпендикулярных векторов – касательного ускорения и геодезически нормального ускорения.

Пусть функции $\rho(q_1, q_2)$ ($\rho = x, y, z$) являются периодическими по каждому из аргументов: $\rho(q_1, q_2) = \rho(q_1 + T_1, q_2 + T_2)$. Такие функции описывают замкнутые поверхности, а движущиеся по ним материальные точки порождают периодические процессы $x(t), y(t), z(t)$ тогда, когда T_1, T_2 – соизмеримые величины. Если же T_1, T_2 – несоизмеримые периоды, то соответствующие им поверхности будут незамкнутыми, а процессы $x(t), y(t), z(t)$ станут лишь почти периодическими.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода для точки с двумя степенями свободы, движущейся по поверхности (4.1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2)$$

$\left(T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, a_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = a_{ij}(q_1, q_2); T \text{ – кинетическая энергия материальной точки единичной массы; } Q_k = Q_k(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) \text{ – обобщенная сила} \right)$.

В этом случае уравнения Лагранжа принимают вид [5]

$$\sum_{i=1}^2 a_{ik} \ddot{q}_i = - \sum_{i,j=1}^2 \left[\begin{matrix} i, j \\ k \end{matrix} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j + Q_k \quad (j, k = 1, 2)$$

$$\left(\left[\begin{matrix} i, j \\ k \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \text{ – символ Кристоффеля первого рода} \right).$$

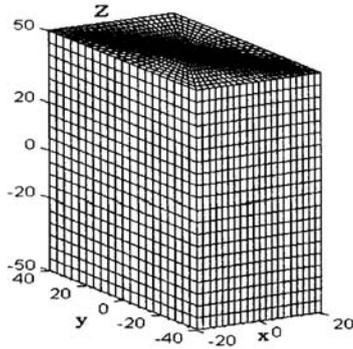
Если в уравнениях (4.1) применить периодические функции $cor(q_i), sir(q_i); g_c(q_i), g_s(q_i)$ ($i = 1, 2$), отвечающие предельным значениям параметра p , можно получить плоскоробристые поверхности [6]. В этом случае коэффициенты a_{ik} квадратичной формы T – функции двух переменных, имеющие разрывы первого рода, а символы Кристоффеля выражаются через обобщенные функции Дирака. Они будут иметь либо разрывы второго рода в точках разрыва первого рода коэффициентов $a_{ij}(q_1, q_2)$, либо принимать нулевое значение в точках, где все коэффициенты квадратичной формы одновременно являются постоянными величинами.

Таким образом, приходим к системе уравнений второго порядка с разрывными левыми и правыми частями, общая математическая теория которых не разработана. В частных случаях интегрирование подобных систем дифференциальных уравнений можно выполнить методом стыкования решений, принадлежащих областям координат q_1, q_2 , не содержащих точек разрывности коэффициентов $a_{ij}(q_1, q_2)$ ($i, j = 1, 2$). В частности, когда смежные плоские грани поверхности смыкаются под прямым углом, характер движения по ней материальной точки можно достаточно просто проследить, используя элементы классической теории удара. В качестве иллюстрации изложено выше, рассмотрим некоторые примеры, при этом везде предполагаем, что обобщающая сила $Q_k(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = 0$ ($k = 1, 2$).

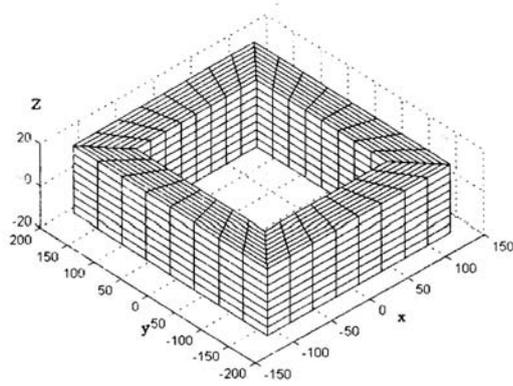
Пусть уравнения (4.1) описывают поверхность параллелепипеда с длиной ребер $2a, 2b, 2c$. С использованием предельных периодических функций $g_c(\sigma), g_s(\sigma)$ уравнение такой поверхности имеет вид $x = a \cdot g_c(\varphi) \cdot g_c(\lambda)$; $y = b \cdot g_c(\varphi) \cdot g_s(\lambda)$; $z = c \cdot g_s(\varphi)$; $q_1 = \varphi \in [-2, 2]$, $q_2 = \lambda \in [0, 8]$, a, b, c – положительные параметры, имеющие размерность длины.

Компьютерная реализация этой поверхности при $a = 20, b = 40, c = 50$ показана на рис. 6, а. В данном случае для коэффициентов a_{ij} ($i, j = 1, 2$) имеем такие формулы:

$$a_{11} = (a \cdot g_c^{(1)}(\varphi) \cdot g_c(\lambda))^2 + (b \cdot g_c^{(1)}(\varphi) \cdot g_s(\lambda))^2 + (c \cdot g_s^{(1)}(\varphi))^2;$$



а



б

Рис. 6

$$a_{22} = (a \cdot g_c(\varphi) \cdot g_c^{(1)}(\lambda))^2 + (b \cdot g_c(\varphi) \cdot g_s^{(1)}(\lambda))^2;$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{4} a^2 (g_c^2(\varphi))^{(1)} \cdot (g_c^2(\lambda))^{(1)} + \frac{1}{4} b^2 (g_c^2(\varphi))^{(1)} \cdot (g_s(\lambda))^{(1)};$$

где согласно (3.7)

$(g_\alpha^2(\sigma))^{(1)} = 2g_\alpha(\sigma) \cdot g_\alpha^{(1)}(\sigma)$; $g_\alpha^{(1)}(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} g_\alpha(\sigma)$ ($\alpha = s, c$; $\sigma = \varphi, \lambda$) – разрывные 2^3 – периодические функции, при этом $g_c^{(1)}(\sigma) = -g_c^{(1)}(-\sigma)$; $g_s^{(1)}(\sigma) = g_s^{(1)}(-\sigma)$;

$$g_s^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma \in [0, 1) & 0 \\ 0 & \text{при } \sigma \in (1, 3) & -1 \\ -1 & \text{при } \sigma \in (3, 5) & 0 \\ 0 & \text{при } \sigma \in (5, 7) & 1 \\ 1 & \text{при } \sigma \in (7, 8] & 0 \end{cases} = g_c^{(1)}(\sigma).$$

Отметим, что согласно этим формулам коэффициенты квадратичной формы $a_{ij}(\varphi, \lambda)$ ($i, j = 1, 2$) являются функциями с разрывами первого рода.

Качественную форму движения материальной точки внутри полости параллелепипеда можно адекватно описать, приняв известные положения об абсолютно упругом и пластическом ударе. Пусть в начальный момент времени материальная точка находится на внутренней поверхности грани $z = -c$ и вектор начальной скорости лежит в ее плоскости: $\dot{x}(0) = u_0, \dot{y}(0) = v_0$. При абсолютно упругом ударе материальная

точка совершает движение подобно бильярдному шару, ударяясь последовательно о грани $x = \pm a$, $y = \pm b$. В случае, когда $u_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ или $v_0 = 0$, $u_0 \neq 0$ материальная точка будет совершать прямолинейные циклические движения между гранями $x = \pm a$ или $y = \pm b$. При абсолютно пластическом ударе материальная точка, достигнув одной из граней $x = \pm a$ или $y = \pm b$, теряет нормальную к грани составляющую скорости и будет далее двигаться вдоль ребра к следующей грани $y = \pm b$ или $x = \pm a$. После удара о препятствующую грань она полностью останавливается.

Заметим, что аналогичная картина движения материальной точки будет иметь место внутри плоско-ребристой торообразной поверхности, задаваемой уравнениями: $x = a[R + r g_c(\varphi)] g_c(\lambda)$; $y = -b[R + r g_c(\varphi)] g_s(\lambda)$; $z = c \cdot r g_s(\varphi)$, где R, r, a, b, c положительные параметры. На рис. 6, б показана компьютерная реализация этой поверхности для значений параметров $a = 150$, $b = 200$, $c = 20$, $R = 1$, $r = 0,2$. Эту поверхность назовем параллелепипедным тором или коротко паратором. Применяя упомянутые гипотезы теории ударного взаимодействия, можно, в частности, установить, что при начальном положении точки на грани $z = -c$ для $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$ и при абсолютно упругом ударе о грани с ребрами, параллельными оси Oz , материальная точка может описывать как циклическую траекторию, полностью проходя все четыре участка нижней грани параторной галереи, так и траекторию, находящуюся в одном из участков грани паратора при $z = -c$. Для замкнутых плоско-ребристых поверхностей, смежные грани которых смыкаются под тупыми углами (поверхности платоновых тел, а также LM ромбоэллипсоиды, LM ромботоры [6, 8]), движение материальной точки внутри таких поверхностей может быть безударным с постоянной по направлению и модулю скоростью перемещения между смежными ребрами.

Из множества периодических функций на замкнутых линиях с группой симметрии $L_4 4PC$ наибольшее практическое значение имеют круговые (тригонометрические) функции $\cos \sigma$, $\sin \sigma$, отвечающие целочисленному значению параметра $p = 2$, а также предельные периодические процессы $cor(\sigma)$, $sir(\sigma)$; $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$. Относительно круговых функций об этом свидетельствует более чем тысячелетняя практика их применения, особенно после открытия формулы Тейлора, связавшей эти функции с бесконечными степенными рядами, а также установления свойства их ортогональности, что обуславливает диагональность соответствующих матриц Грамма для системы периодических вектор-функций, определяемой их аргументами, отличающимися на целочисленный множитель. Предельные периодические функции являются новыми математическими объектами. Они порождают квазидиагональные матрицы Грамма, которые для случая функций $cor(\sigma)$, $sir(\sigma)$ поддаются аналитическому вычислению [9]. Установлено, что этим свойством обладают также функции $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$. Функции $cor(\sigma)$, $sir(\sigma)$, $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ оказались весьма результативными при моделировании плоско-ребристых поверхностей твердых тел, архитектурных объектов, некоторых кристаллов, включая нанокристаллические структуры. Это делает их полезными в связи с вопросами становления наномеханики материалов, очерченными в [12], а также интегрирования некоторых уравнений второго порядка с негладкими характеристиками возмущающих сил [8].

§5. Построение множества эволюционных процессов.

Обратимся к построению процессов на незамкнутых отрезках линии (1.1) $x(\sigma, p)$, $y(\sigma, p)$ для $|x| > 1$. Согласно соотношению (1.3) имеем две формулы для элемента дуги ds

$$ds = KC(x, p) dx; ds = KS(y, p) dy \quad (5.1)$$

$$\left(KC(x, p) = \pm \sqrt{\left(|x|^p - 1\right)^{\frac{2}{p}-2} |x|^{2p-2} + 1}; KS(y, p) = \pm \sqrt{\left(1 + |y|^p\right)^{\frac{2}{p}-2} |y|^{2p-2} + 1} \right). \quad (5.2)$$

Отсюда при $p < 1$ получаем функцию $\sigma = \sigma(x)$ в виде собственного интеграла

$$\sigma = \sigma(x, p) = \pm \int_1^x KC(u, p) du. \quad (5.3)$$

Обращая это соотношение как и для случая периодических функций, получим

$$x = x(\sigma, p) = \cos iph(\sigma) = \cos iph(-\sigma).$$

Полученную функцию, зависящую от параметра p , будем называть гиперболическим p -косинусом. Гиперболический p -синус вычисляем по алгебраической формуле

$$siph(\sigma) = \left(|\cos iph(\sigma)|^p - 1 \right)^{\frac{1}{p}} \text{sign}(\sigma). \quad (5.4)$$

Для $p > 1$ имеем согласно второй формуле (5.2) собственный интеграл на всем промежутке определения

$$\sigma = \sigma(y, p) = \pm \int_0^y KS(u, p) du. \quad (5.5)$$

Подынтегральная функция в (5.5) является четной, поэтому, обращая это соотношение, определяем функцию $y = y(\sigma, p)$ как нечетную функцию аргумента σ , т.е. $y(\sigma, p) = siph(\sigma) = -siph(-\sigma)$, а также алгебраическое представление

$$\cos iph(\sigma) = \left(1 + |siph(\sigma)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.6)$$

Как видим, точное вычисление эволюционных функций осуществляется с помощью собственных интегралов и поэтому проще вычисления функций периодических. Вычисления этих функций не предполагает свойства их аналитичности.

Функции $\cos iph(\sigma)$, $siph(\sigma)$ можно пронормировать, разделив их на величину

$$rh(\sigma) = \sqrt{\cos iph^2(\sigma) - siph^2(\sigma)}. \quad (5.7)$$

Полученные таким образом функции

$$\frac{\cos iph(\sigma)}{rh(\sigma)} = n \cos iph(\sigma), \quad \frac{siph(\sigma)}{rh(\sigma)} = nsiph(\sigma) \quad (5.8)$$

удовлетворяют тому же функциональному уравнению, что и классические гиперболические функции

$$n \cos iph^2(\sigma) - nsiph^2(\sigma) = 1. \quad (5.9)$$

На рис. 7, а представлены эволюционные процессы $\cos iph(\sigma, p)$ (3), $siph(\sigma, p)$ (4) для $p = p_n = 2$. Параметр p_n отвечает натуральным гиперболическим процессам. Они отличаются от классических экспоненциально возрастающих гиперболических процессов линейным характером роста при $\sigma \rightarrow \infty$. Кривые (1, 2) (рис. 7, а) отвечают процессам $\cos iph(\sigma, p_a)$, $siph(\sigma, p_a)$, где $p_a = 0,5615$.

На рис. 7, б показаны нормированные эволюционные процессы $n \cos iph(\sigma, p_a)$ (2), $nsiph(\sigma, p_a)$ (3) и нормирующий делитель $rh(\sigma, p_a)$ (1).

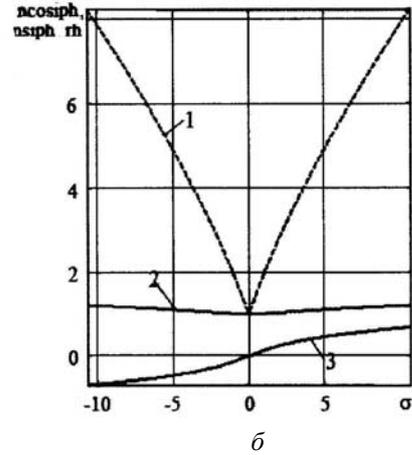
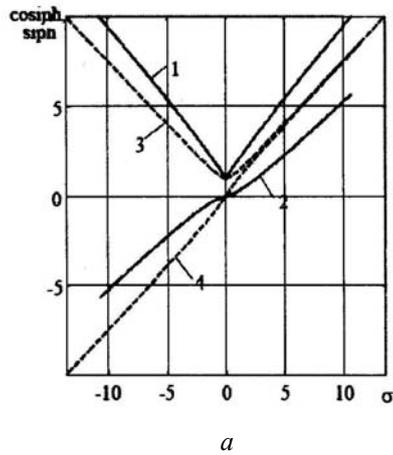


Рис. 7

Из рис. 7, б виден весьма медленный рост по модулю обоих процессов $ncosiph(\sigma, p_a)$ и $nsiph(\sigma, p_a)$. Это делает их полезными для моделирования медленных процессов типа разогрева земной атмосферы вследствие парникового эффекта.

Обратимся к простым и нормированным эволюционным функциям алгебраической природы. Эти функции отвечают параметру $p=1$. В этом случае имеем $KC(x,1) = KS(y,1) = \sqrt{2} = q$ и для искомым зависимостей, соответственно, получаем

$$\begin{aligned} x(\sigma,1) = cosiph(\sigma,1) = corh(\sigma) = |\sigma|/q + 1; \quad y(\sigma,1) = siph(\sigma,1) = sirh(\sigma) = \sigma/q; \\ rh(\sigma,1) = \sqrt{q|\sigma|+1}; \quad ncosiph(\sigma,1) = ncorh(\sigma) = (|\sigma|/q + 1)/rh(\sigma,1); \\ nsiph(\sigma,1) = nsirh(\sigma) = \sigma/q / rh(\sigma,1). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Вычислим соотношения, которым удовлетворяют первые и вторые производные по σ от функций $ncorh(\sigma)$, $nsirh(\sigma)$. Стандартными вычислениями получаем формулы для первых производных

$$\frac{d}{d\sigma}(ncorh(\sigma)) = \frac{1}{q} \frac{nsirh(\sigma)}{rh^2(\sigma)}; \quad \frac{d}{d\sigma}(nsirh(\sigma)) = \frac{1}{q} \frac{ncorh(\sigma)}{rh^2(\sigma)}. \quad (5.11)$$

На основании этих соотношений устанавливаем, что вторые производные от функций $ncorh(\sigma)$, $nsirh(\sigma)$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$f'' + b_1(\sigma)f' + b_2(\sigma)f = 0 \quad (5.12)$$

$$\left(b_1(\sigma) = 2rh'(\sigma)/rh(\sigma); \quad b_2(\sigma) = -\frac{1}{2}rh^{-4}(\sigma) \right). \quad (5.13)$$

В частности, если формально положить $rh(\sigma) = \rho = \text{const}$, то, вводя новую независимую переменную s по формуле $\sigma = \sqrt{2}\rho^2 s$, обнаруживаем, что последнему уравнению удовлетворяют классические экспоненциальные гиперболические функции $f(s) = ch(s)$, $sh(s)$.

Формулы (5.11) и уравнение (5.12) являются аналогами формул (7.3) и уравнения (7.4) из работы [6] для нормированных ромбических функций.

§6. Построение динамической системы, порождающей законы движения в форме периодических и эволюционных функций.

Согласно классическим результатам теории обыкновенных дифференциальных уравнений колебательные процессы могут порождаться решениями автономных нерелаксационных дифференциальных уравнений порядка не ниже второго. Напротив, эволюционные процессы присущи динамическим системам любого, в т.ч. первого порядка. В связи с этим представляется актуальным определить те динамические системы второго порядка, которые при ненулевых начальных условиях могут генерировать все процессы, описанного выше типа. С этой целью вычислим лагранжиан динамической системы с одной степенью свободы, обуславливающим либо заданного типа периодические колебания системы около устойчивого положения равновесия, либо эволюционные движения гиперболического типа, если положение равновесия неустойчиво. Исходим из формулы дифференциала дуги плоской кривой

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 \quad (6.1)$$

и уравнения алгебраической связи $y = f(x)$, обуславливающей по Лагранжу одну степень свободы движения точечной массы на плоскости Oxy . Исключим из соотношения (6.1) зависимое приращение $dy = f'(x)dx$ и разделим его на $d\sigma^2$. В результате получим соотношение, имеющее форму интеграла живых сил некоторой механической консервативной системы с одной степенью свободы, т.е.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 + CR(x) = h \left(h = 0, CR(x) = -\frac{1}{2}(1 + f'^2(x))^{-1} \right). \quad (6.2)$$

Изложим механико-математический подход, описанный в [8], как обращение задачи А. Пуанкаре. Функция $CR(x)$ в виде (6.2) будет отлична от константы, если $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$, т.е. связь $y = f(x)$ искривлена. (Отождествление в (6.2) длины дуги σ и параметра времени t является естественным, так как во всех механических часах интервал времени связывается с длиной дуги, проходящей концом стрелки часового механизма).

Таким образом, соотношения (6.2) указывают способ построения искомой динамической системы в форме лагранжевой системы с одной степенью свободы

$$DL(x, x') = 0 \quad (6.3)$$

($D = \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Эйлера – Лагранжа; $x' = \frac{dx}{d\sigma}$, $L(x, x') = 0,5x'^2 - CR(x)$ – лагранжиан движущейся точки).

Учитывая формулы (1.4), (5.2) для $K(x, p)$ и $KC(x, p)$, получаем общее выражение для зависимости $CR(x, p)$, $|x| < \infty$, если заменим во второй формуле (1.4) в подкоренном выражении круглые скобки на знаки модуля: $(\dots) \rightarrow |\dots|$. Это дает возможность такого представления:

$$CR(x, p) = -\frac{1}{2} \left[\left| 1 - |x|^p \right|^{\frac{2}{p}-2} |x|^{2p-2} + 1 \right]^{-1} = \begin{cases} -\frac{1}{2} (K(x, p))^{-2} & |x| \leq 1; \\ -\frac{1}{2} (KC(x, p))^{-2} & |x| > 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

В уравнениях (6.2, 6.3) независимая переменная σ не является параметром времени, количество $0,5(dx/d\sigma)^2$ отлично от кинетической энергии материальной точки единичной массы, функция $CR(x, p)$ не представляет потенциал активных сил в смысле

аналитической механики, а двучлен $L(x, x')$ отличается от разности кинетической и потенциальной энергий механической системы. Однако гессиан функции $L(x, x')$

$$\det \left(\frac{\partial^2 L(x, x')}{\partial x_i \partial x'_k} \right)_{i,k=1}^n \neq 0$$

(в данном случае $n = 1$) и уравнение Лагранжа (6.3) однозначно определяет движение системы путем задания начальных данных $x(\sigma_0), x'(\sigma_0)$. Вследствие этого динамическую систему (6.3) следует называть ненатуральной лагранжевой системой.

Относительно механического содержания функции $CR(x, p)$ отметим, что ее можно условно назвать потенциалом силы реакции алгебраической плоской связи, имеющей конечную кривизну. Отметим при этом, что использование антропоморфного термина “сила” отсутствует в механике Гамильтона, Герца, Шредингера.

Таким образом, соотношениями (6.2) – (6.4) установлена связь формулы квадрата дифференциала плоской кривой с лагранжианом ненатурального типа динамической системы с одной степенью свободы.

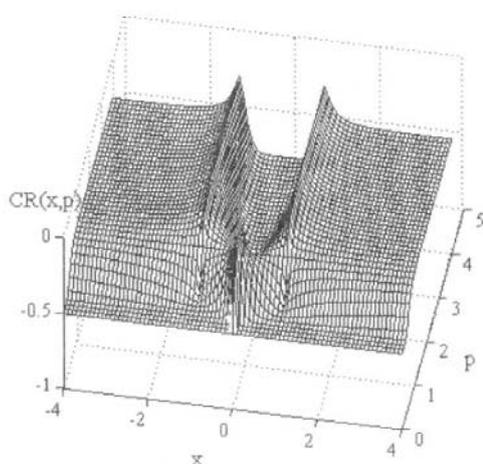


Рис. 8

На рис. 8 представлена поверхность (6.4) функции $CR(x, p)$ для $p \in (0, 3]$, $x \in (-4, 4)$. Эта поверхность имеет впадины и гребни при $x = 0, \pm 1$, отвечающие положениям равновесия.

В пространстве положительной кривизны $p > 1$ в точке $x = 0$ потенциальная функция $CR(x, p)$ имеет минимум, при этом, если $1 < p < 2$ – минимум негладкий, а если $p \geq 2$ – гладкий. Согласно теореме Лежен – Дирихле это положение равновесия устойчиво. Следовательно, в окрестности положения $x = 0$ материальная точка может выполнять незатухающие (периодические) колебания величиной $|x(\sigma)| \leq 1$ как осциллятор с положительной характеристикой $F(x, p)$ некоторой нелинейной пружины.

Построим периодические функции, определяемые этими колебаниями.

Нелинейное уравнение (6.3) допускает частный и общий интегралы [3], последний из которых содержит две произвольные постоянные h и σ_0 :

$$\sigma + \sigma_0 = \int_{x_0}^x \frac{du}{\pm \sqrt{2h - 2CR(u, p)}}. \quad (6.5)$$

Здесь знак перед корнем должен совпадать со знаком du . Как и в небесно-механической задаче 2-х тел [10], решение (6.5) может представлять периодическое решение, если $h < 0$. Наличие общего интеграла (6.5) позволяет полностью определить движение точки при любых значениях параметра p и начальных условиях $x(\sigma_0), x'(\sigma_0)$.

Пусть в начальный момент $\sigma_0 = 0$, $x'(0) = 0$, $|x(0)| = x_0 \leq 1$, тогда $2h = -K^{-2}(x_0, p)$ и общий интеграл (6.5) при отрицательном знаке перед корнем приобретает вид (при $|x| \leq x_0$)

$$\sigma = -\int_{x_0}^x \left(\frac{1}{K^2(u, p)} - \frac{1}{K^2(x_0, p)} \right)^{-\frac{1}{2}} du. \quad (6.6)$$

При $x_0 = 1$, $K^2(1, p) = \infty$ формула (6.6) совпадает с соотношением (2.1), определяющим функцию $\text{cosip}(x, p)$. Периодическую функцию $x = x(\sigma, p, x_0)$, неявно определяемую из уравнения (6.6), обозначим идентификатором $\text{dcosip}(\sigma, p, x_0) = x(\sigma, p, x_0)$, причем $\text{dcosip}(\sigma, p, 1) = \text{cosip}(\sigma, p)$, $p > 1$.

Период функции $\text{dcosip}(\sigma, p, x_0)$ определим формулой

$$T(p, x_0) = -4 \int_{x_0}^0 \left(\frac{1}{K^2(u, p)} - \frac{1}{K^2(x_0, p)} \right)^{-\frac{1}{2}} du. \quad (6.7)$$

Вычислим антипериодическую функцию $y = y(\sigma, p, x'_0)$. Она не удовлетворяет алгебраическому соотношению (1.2), поэтому ее необходимо определять также из общего интеграла (6.5). Примем такие начальные условия: $\sigma_0 = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = x'_0 = v_0$. Положим в первом интеграле уравнений (6.5) $h = -b$. В результате получим $b = 0,5(1 - v_0^2)$. Вычислим общий интеграл (6.5) в форме

$$\int_0^y \frac{du}{\sqrt{K^{-2}(u, p) + (v_0^2 - 1)}} = \sigma \quad (0 \leq y \leq y_0, p > 1). \quad (6.8)$$

Для $v_0 = 1$ интеграл (6.8) совпадает с формулой (2.3), определяющей функцию $\text{sip}(y, p)$. Периодическую функцию $y = y(\sigma, p, y_0)$, определяемую неявно из (6.8), обозначим $\text{dsip}(\sigma, p, y_0) = y(\sigma, p, y_0)$. Период этой функции определим формулой

$$T(p, y_0) = 4 \int_0^{y_0} \frac{du}{\sqrt{K^{-2}(u, p) + (v_0^2 - 1)}}, \quad (6.9)$$

где $y_0 = y(v_0)$ – величина, определяемая как корень уравнения

$$(1 - |y_0|^p)^{\frac{1}{p}-1} |y_0|^{p-1} = \sqrt{\frac{v_0^2}{1 - v_0^2}} = Q, \quad (6.10)$$

обращающего в нуль подкоренное выражение соотношения (6.9). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y_0 = Q^{1/(p-1)} (1 - Q^{1/(p-1)})^{-1/p}$ является решением уравнения (6.10). В частности, при $p = 2$ имеем $y_0 = v_0$, что соответствует механико-математическому смыслу задачи. Если начальные условия для динамической системы (6.3) выбраны на ниспадающей поверхности функции $CR(x, p)$ ($x_0 > 1$, $x'_0 \geq 0$) (см. рис. 8), то интеграл (6.5) определяет эволюционное движение точки. При этом $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} x(\sigma, x_0, x'_0) = \infty$ и оценками процесса $x(\sigma, x_0, x'_0)$ являются функции $\text{cosiph}(\sigma, p)$.

Для $p < 1$ геометрические свойства поверхности $CR(x, p)$ антисимметрично противоположны тем ее свойствам, которые имеют место при $p > 1$, а именно: наличие двух впадин вместо двух гребней и одного гребня вместо одной впадины. Эти свойства обуславливают наличие двух симметричных периодических процессов $x_i(\sigma, p) = x_i(\sigma + T_p, p)$ ($i = 1, 2$) в окрестности точек $x_{1,2} = \pm 1$, а также эволюционного процесса $x_0(\sigma, p)$ – в окрестности точки $x = 0$. Эти процессы можно исследовать на основе общего интеграла (6.5) при соответствующем выборе начальных условий или постоянных интегрирования h, σ_0 .

Заключення.

На однопараметрическом множестве плоских замкнутых связей с четырьмя осями симметрии построена система непрерывных T -периодических процессов, выражающих значения декартовых координат движущейся точки как функций длины пройденного пути. В зависимости от значения параметра $0 < p < \infty$, $p \neq 1$ имеем $T \in (4\sqrt{2}, 8]$. В означенном интервале для каждого значения периода T существует пара эквипериодических процессов с одинаковой областью их определения и значения, но отличающиеся знаком кривизны в каждой точке ее существования. Вычислены 2π -периодические процессы, отличающиеся от классических, выражаемых тригонометрическими функциями, а также 2^3 -периодические процессы, и применены в задаче о движении материальной точки по замкнутой негладкой поверхности. Изложен способ вычисления непрерывных эволюционных процессов гиперболического типа, аргументом которых является длина пути, пройденного точкой вдоль разомкнутых траекторий, имеющих две оси симметрии. Установлено соотношение между дифференциалом дуги плоской кривой и лагранжианом простой динамической системы ненатурального типа. Построена модельная динамическая система второго порядка, имеющая общий интеграл в форме, которая порождает (при определенных начальных значениях) T -периодические или эволюционные процессы гиперболического типа.

Р Е З Ю М Е . На однопараметричній множині замкнених плоских в'язей, що мають чотири осі симетрії, побудовано систему неперервних процесів з періодами $T \in [4\sqrt{2}, 8]$. Ці процеси виражають значення декартових координат рухомої точки як функцій пройденого шляху. Виявлені 2π періодичні процеси, що відрізняються від класичних тригонометричних знаком кривизни в кожній точці її існування. Обчислено асимптотичні 2^3 періодичні процеси і застосовано в задачі про рух матеріальної точки по замкнутій плоско-ребристій поверхні. Вказано спосіб побудови неперервних еволюційних процесів гіперболічного типу, аргументами яких є довжини дуг розімкнених ліній з парою осей симетрії. Встановлено зв'язок диференціала дуги плоскої кривої з лагранжіаном простої динамічної системи ненатурального типу. Побудовано нелінійну динамічну систему другого порядку, частинними розв'язками якої можуть бути T -періодичні або еволюційні процеси гіперболічного типу, що залежать від початкових значень.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
2. Галлиулин Р.В. Кристаллографическая геометрия. – М.: Наука, 1984. – 135 с.
3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 326 с.
4. Кононенко В.О. Нелинейные колебания механических систем. – К.: Наук. думка, 1980. – 381 с.
5. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 823 с.
6. Плахтієнко М.П. Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. – К.: ЗНДІЕП, 2005. – 132 с.
7. Плахтієнко М.П. Періодичні функції на замкнених траєкторіях з групою симетрій $L_4 4PC$ // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 36 – 43.
8. Плахтієнко М.П. Диференціальні рівняння періодичних та еволюційних функцій на множині плоских симетричних траєкторій / Тр. Укр. матем. конгрес, 2009 (Ін-т. математики НАНУ). – К., 2010. – С. 173 – 193.
9. Плахтієнко М.П. Некласичні співвідношення між елементами матриць Грама систем векторів унітарного гільбертового простору // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – № 4. – С. 188 – 197.
10. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 1. – Л.; М.: ОГИЗ, 1941. – 344 с.
11. Aliev F.A., Larin V.B. Problems Optimization for Periodic System // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 11. – P. 1162 – 1188.
12. Guz A.N., Rushchitsky J.J. Establishing Foundations of the Mechanics of Nanocomposites (Review) // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 1. – P. 2 – 44.
13. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A. On Effect of External Load on Stability of the Transporting Fluid Pipeline // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 6. – P. 636 – 644.

Поступила 26.12.2010

Утверждена в печать 06.06.2013