

А.З. Галишин, Ю.Н. Шевченко

**ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ СОСТОЯНИИ
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique for determination of the axisymmetric physically nonlinear state of the thin orthotropic shells is elaborated. The used constitutive equations are specified for the transversally isotropic material in different ranges of variation of the loading parameter, which is the ratio of principal stresses in the natural coordinate system. An example of analysis of the cylindrical vessel with the torus-spherical bottom is given.

Key words: thin orthotropic shell, physical nonlinearity, axisymmetric state.

Введение.

В современной технике широко используются оболочечные элементы конструкций, изготовленные из анизотропных материалов. Определению физически нелинейного состояния анизотропных (ортотропных или трансверсально-изотропных) оболочек посвящены работы [1 – 5, 8, 11, 15 и др.]. В [1, 2, 15] в качестве определяющих уравнений использованы соотношения Р.Хилла [14], т.е. уравнения теории течения с изотропным (пропорциональным) упрочнением. Согласно этим соотношениям диаграммы деформирования, полученные в направлениях главных осей анизотропии, должны быть подобными, что не всегда подтверждается экспериментом. Исследования [3, 11] основаны на уравнениях состояния [12], полученных с использованием принципа независимости действия сил. Коэффициенты в этих уравнениях определяются из экспериментов на одноосное растяжение плоских образцов, вырезанных в направлениях главных осей анизотропии, с замерами продольных и поперечных деформаций. Однако, как показано в [10], уравнения состояния, основанные на принципе независимости действия сил, в общем случае не описывают процессы физически нелинейного деформирования ортотропного материала. В [4, 5, 8] для определения физически нелинейного состояния ортотропных оболочек использованы определяющие уравнения, изложенные в работе [7]. Эти уравнения зависят от работы напряжений на пластических деформациях, которая является функцией второго обобщенного инварианта тензора напряжений, содержащего тензор анизотропии. Уравнения состояния конкретизированы для случая плоского напряженного состояния, имеющего место в ортотропном листовом стеклопластике. Коэффициенты анизотропии определены из условия подобия зависимостей работы напряжений на пластических деформациях, полученных в опытах на одноосное растяжение образцов, вырезанных в направлениях главных осей анизотропии и под углом 45° . Сопоставление расчетных и экспериментальных данных в работе [7] отсутствует.

В настоящей работе использованы определяющие уравнения [9], которые основаны на уравнениях работы [7], но с другой конкретизацией функции, определяющей нелинейные свойства материала.

§1. Постановка задачи и основные уравнения.

Рассмотрим тонкую ортотропную оболочку вращения, меридиан координатной поверхности которой состоит из последовательно сопряженных звеньев с разной геометрией и с переменной вдоль меридиана толщиной. Положение произвольной точки оболочки определим в системе криволинейных ортогональных координат x_i ($i=1,2,3$), где x_1 ($x_{10} \leq x_1 \leq x_{1n}$) – длина дуги координатного меридиана; x_2 – окружная координата; x_3 ($-h/2 \leq x_3 \leq h/2$) – расстояние точки от координатной поверхности; h – толщина оболочки. Примем, что главные направления ортотропии совпадают с осями x_i выбранной системы координат.

Пусть первоначально оболочка находится в недеформированном состоянии, а затем подвергается действию осесимметричных нагрузок, не вызывающих кручение. Задачу рассмотрим в геометрически линейной постановке в рамках гипотез Кирхгофа – Лява, пренебрегая величинами $x_3 k_i$ ($i=1,2$) по сравнению с единицей, где k_i – главные кривизны координатной поверхности оболочки. Геометрические и статические соотношения приведены в [13].

Предположим, что в отдельных элементах оболочки реализуются активные процессы деформирования по прямолинейным траекториям, а деформации ползучести пренебрежимо малы по сравнению с мгновенными. В качестве определяющих уравнений для описания физически нелинейного деформирования ортотропного материала воспользуемся уравнениями [7], согласно которым полные деформации представляются в виде суммы упругих и пластических составляющих. Упругие деформации определяются равенствами [6]

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22}; \quad \varepsilon_{22}^e = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22}, \quad (1.1)$$

где E_i – модули упругости; ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечную деформацию в направлении x_i при растяжении в направлении x_j , причем $\nu_{12} = \nu_{21} E_2 / E_1$.

Для пластических составляющих деформаций имеем формулы

$$\varepsilon_{11}^p = \psi(q_{11} \sigma_{11} + q_{12} \sigma_{22}); \quad \varepsilon_{22}^p = \psi(q_{12} \sigma_{11} + q_{22} \sigma_{22}), \quad (1.2)$$

где $\psi = \psi(f)$ – функция, описывающая упрочнение материала за пределами упругости. Эта функция зависит от квадратичной формы напряжений f [7], которая в данном случае имеет вид

$$f = 0,5q_{11}\sigma_{11}^2 + 0,5q_{22}\sigma_{22}^2 + q_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}, \quad (1.3)$$

где q_{11} , q_{22} , q_{12} – коэффициенты тензора констант анизотропии, определяемые экспериментально. Квадратичная форма (1.3) является однозначной функцией работы

напряжений на пластических деформациях $W_p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$, т.е.

$$f = f(W_p) \text{ или } W_p = W_p(f). \quad (1.4)$$

Функция $W_p(f)$ аппроксимируется выражением

$$W_p = a \left[\left(\frac{f}{f_s} \right)^n - 1 \right], \quad (1.5)$$

где f_s – значение квадратичной формы (1.3), при котором начинается пластическое деформирование материала; a , n – коэффициенты, определяемые из условия наилучшей аппроксимации экспериментальной зависимости $W_p(f)$ выражением (1.5). При выбранной аппроксимации функция упрочнения ψ представляется в виде

$$\psi(f) = \frac{an}{(2n-1)f_s} \left[\left(\frac{f}{f_s} \right)^{n-1} - \sqrt{\frac{f_s}{f}} \right]. \quad (1.6)$$

В упругой области ($f \leq f_s$) эта функция полагается равной нулю.

В работе [7] для определения коэффициентов q_{11} , q_{22} , q_{12} , a , n , f_s для ортотропного листового материала использованы эксперименты на одноосное растяжение образцов, вырезанных в направлениях главных осей анизотропии и под углом 45° .

В отличие от [7] воспользуемся результатами работы [9], где эти коэффициенты определены применительно к трансверсально-изотропному материалу Д16Т. В этой работе использованы экспериментальные данные [12], где приведены результаты испытаний трубчатых образцов, подверженных растяжению и внутреннему давлению, с разным отношением ($k = \sigma_{11} / \sigma_{22}$) (осевого и окружного напряжений). Образцы изготовлены из цилиндрических прутков, ось симметрии x_1 которых совпадала с осью прутка. Опыты проведены при $k = 0; 0,5; 1; 2; \infty$. Коэффициенты анизотропии определены в трех диапазонах изменения параметра k . В *I* диапазон включены опыты при $k = 0; 0,5; 1$; во *II* – при $k = 0,5; 1; 2$, в *III* – при $k = 1; 2; \infty$. В соответствии с [9] при решении краевой задачи эти коэффициенты при $0 \leq k \leq 0,5$ определяем на основе экспериментальных данных *I* диапазона, а при $2 \leq k \leq \infty$ – *III*. При $0,5 < k \leq 1$ используем линейную интерполяцию по k коэффициентов в *I* и *II* диапазонах, а при $1 < k < 2$ – во *II* и *III* диапазонах.

§2. Разрешающая система уравнений. Алгоритм решения задачи.

Для вывода разрешающей системы уравнений используем геометрические и статические уравнения теории тонких оболочек [13], а также физические уравнения (1.1), (1.2), которые являются существенно нелинейными (они неразрешимы в аналитическом виде относительно напряжений). Разрешим их относительно напряжений численно, используя метод Ньютона, изложенный в [4, 5, 8]. В качестве начального приближения выберем напряжения, найденные из решения упругой задачи. После численного обращения получим зависимости вида

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) \quad (1, 2), \quad (2.1)$$

в которых полные напряжения σ_{11} представляем в виде суммы линейных σ_{11}^l и нелинейных σ_{11}^n составляющих, т.е.

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^l + \sigma_{11}^n \quad (1, 2), \quad (2.2)$$

а линейные составляющие напряжений определяем законом Гука

$$\sigma_{11}^l = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11} + \nu_{12}\varepsilon_{22}) \quad (1, 2). \quad (2.3)$$

В качестве разрешающих функций выберем следующие величины: N_r , N_z – радиальная и осевая составляющая усилия, действующего в сечении оболочки $x_1 = \text{const}$; M_1 – меридиональный изгибающий момент; u_r , u_z – радиальная и осевая составляющая перемещения точки координатной поверхности; \mathcal{G}_1 – угол поворота

нормали к этой поверхности в меридиональном направлении. Статические, геометрические и физические уравнения (2.1) – (2.3) сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида [13]

$$\frac{d\vec{Y}}{dx_1} = P(x_1)\vec{Y} + \vec{f}(x_1), \quad \vec{Y} = \{N_r, N_z, M_1, u_r, u_z, \vartheta_1\}^T \quad (2.4)$$

при заданных на торцах оболочки граничных условиях

$$B_j \vec{Y}(x_{1j}) = \vec{b}_j \quad (j = 0, n). \quad (2.5)$$

Здесь P – матрица системы; \vec{f} – вектор свободных членов; B_j и \vec{b}_j – заданные матрицы и векторы граничных условий. Матрица P зависит от упругих характеристик материала и от геометрических параметров оболочки, а вектор \vec{f} зависит также от нелинейных компонент напряжений $\sigma_{11}^n, \sigma_{22}^n$.

Физически нелинейную задачу решаем методом последовательных приближений, в каждом из которых краевую задачу (2.4), (2.5) сводим к ряду задач Коши, для интегрирования которых используем метод Рунге – Кутты с дискретной ортогонализацией по Годунову. Алгоритм решения задачи состоит в следующем. В первом приближении решаем линейную краевую задачу ($\sigma_{11}^n = \sigma_{22}^n = 0$) и определяем линейные компоненты напряжений $\sigma_{11}^l, \sigma_{22}^l$. Затем физические уравнения обращаем методом Ньютона и находим полные компоненты напряжений σ_{11} и σ_{22} . В процессе этого обращения значения коэффициентов $q_{11}, q_{22}, q_{12}, a, n, f_s$ и функции ψ получаем в зависимости от параметра нагружения $k = |\sigma_{11} / \sigma_{22}|$. Затем в соответствии с (2.2) определяем нелинейные составляющие напряжений $\sigma_{11}^n, \sigma_{22}^n$ и решаем краевую задачу во втором приближении. В результате вновь определяем линейные компоненты напряжений, обращаем физические уравнения и т. д. Процесс последовательных приближений заканчиваем тогда, когда интенсивность деформаций сдвига $\Gamma = \sqrt{(\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2)}/3$, вычисленная в двух соседних приближениях, будет отличаться на малую заданную величину δ , определяющую точность решения физически нелинейной задачи.

§3. Пример расчета.

Определим физически нелинейное напряженно-деформированное состояние оболочки, моделирующей элемент сосуда давления. Меридиан координатной поверхности оболочки изображен на рис. 1 (z – ось вращения).

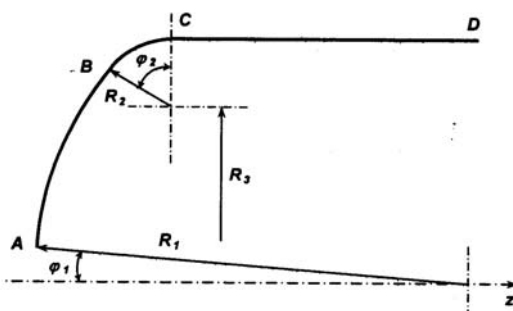


Рис. 1

Оболочка состоит из сферического AB , тороидального BC и цилиндрического CD звеньев, которые плавно соединены между собой. Принятые геометрические размеры имеют значения: $R_1 = 0,32\text{м}$; $R_2 = 0,08\text{м}$; $R_3 = 0,12\text{м}$; $\varphi_1 = \pi/50$; $\varphi_2 = \pi/3$; длина

меридиана цилиндрического звена $L = 0,15\text{м}$; толщина оболочки $h = 0,005\text{м}$. Оболочка подвержена действию внутреннего давления $q_3 = 8,5\text{МПа}$. На ее торцах заданы следующие граничные условия: при $x_1 = x_{10} - N_z = 0,5q_3R_1 \sin \varphi_1$, $u_r = 0$, $\mathcal{G}_1 = 0$; при $x_1 = x_{1n}$ – условия симметрии $N_r = 0$, $u_z = 0$, $\mathcal{G}_1 = 0$. Оболочка изготовлена из трансверсально-изотропного материала Д16Т (предполагаем, что ось симметрии этого материала совпадает с осью x_1 выбранной системы координат). Значения коэффициентов анизотропии вычислены при $q_{11} = 1$ и приведены в таблице [9].

Упругие характеристики данного материала: $E_1 = 88256 \text{ МПа}$; $E_2 = 83174 \text{ МПа}$; $\nu_{21} = 0,3344$. В расчетах количество точек интегрирования вдоль меридиана каждого звена принято $K_1 = 201$, а количество точек интегрирования по толщине оболочки – $K_3 = 9$. Точность решения нелинейной системы уравнений методом Ньютона и точность решения физически нелинейной задачи были заданы и равны $0,001$.

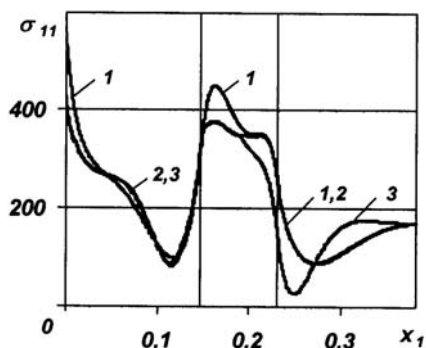


Рис. 2

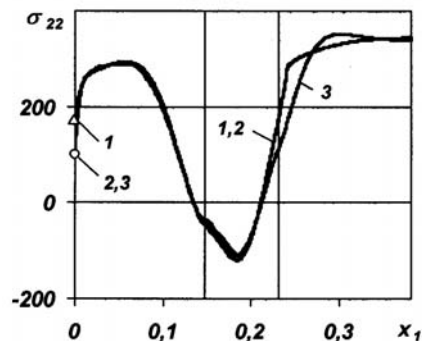


Рис. 3

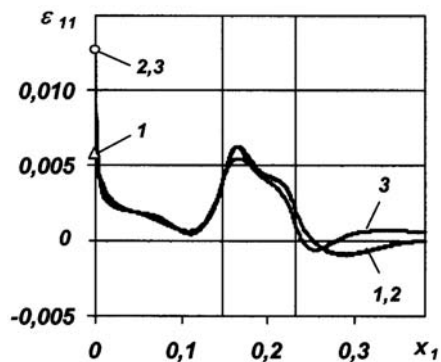


Рис. 4

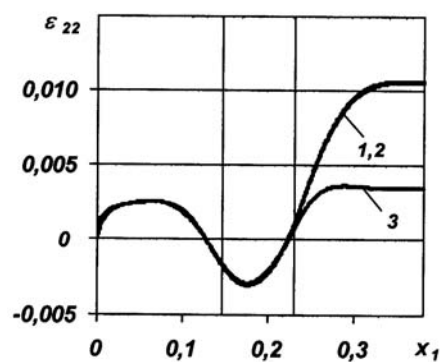


Рис. 5

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2 – 5. На рис. 2, 3 изображены графики изменения вдоль меридиана оболочки на внутренней ее поверхности напряжений σ_{11} , σ_{22} (напряжения – в МПа; координата x_1 – в метрах). Вертикальные линии сетки соответствуют границам раздела звеньев. Результаты, полученные на основе изложенной выше методики, обозначены цифрами 2. Для сравнения на этих же рисунках приведены результаты решения данной задачи при использовании коэффициентов анизотропии, найденных в I диапазоне (кривые 1) и в III диапазоне (кривые 3). Из рисунков видно, что в начале оболочки (в области, примыкающей к торцу $x_1 = x_{10}$) основными являются напряжения σ_{11} . Поэтому до середины второго звена кривые 2 практически совпадают с кривыми 3. В конце же оболочки (в области, при-

мыкающей к торцу $x_1 = x_{1n}$) преобладают напряжения σ_{22} ; здесь имеет место совпадение кривых 2 и 1. На рис. 4, 5 представлены аналогичные результаты для деформаций ε_{11} , ε_{22} . Приведенные графики показывают, что в области максимальных значений напряжения σ_{11} отличаются на 30%, а деформации ε_{22} отличаются в 3 раза.

Заключение.

В настоящей статье разработана методика определения осесимметричного физически нелинейного состояния тонких ортотропных оболочек. Уравнения состояния конкретизированы для трансверсально-изотропного материала в различных диапазонах изменения параметра нагружения, представляющего собой отношение главных напряжений в естественной системе координат. На примере цилиндрического сосуда с торосферическим днищем показано существенное различие результатов расчетов с коэффициентами, найденными в разных диапазонах.

Р Е З Ю М Е . Розроблено методику визначення осесимметричного фізично нелінійного стану тонких ортотропних оболонок. Використовувані рівняння стану конкретизовані для трансверсально-ізотропного матеріалу в різних діапазонах зміни параметра навантаження, що являє собою відношення головних напружень в природній системі координат. Наведено приклад розрахунку циліндричної судини з торо-сферичним днищем.

1. *Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н.* Термоупругопластическое напряженно-деформированное состояние слоистых трансверсально-изотропных оболочек при осесимметричном нагружении // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 8. – С. 100 – 110.
2. *Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н.* Термоупругопластическое осесимметричное напряженно-деформированное состояние слоистых ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 12. – С. 85 – 91.
3. *Галишин А.З.* Определение осесимметричного термоупругопластического состояния разветвленных слоистых трансверсально-изотропных оболочек // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 4. – С. 125 – 131.
4. *Гузь А.Н., Максимюк В.А., Чернышенко И.С.* Численное исследование напряженно-деформированного состояния оболочек с учетом нелинейных и сдвиговых свойств композитных материалов // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 10. – С. 73 – 81.
5. *Концентрация напряжений / Гузь А.Н., Комодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* – К.: «А.С.К», 1998. – 387с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т.7).
6. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
7. *Ломakin В.А., Юмаишева М.А.* О зависимостях между напряжениями и деформациями при нелинейном деформировании ортотропных стеклопластиков // Механика полимеров. – 1965. – № 4. – С. 28 – 34.
8. *Максимюк В.А., Сторожук Е.А., Чернышенко И.С.* Решение нелинейных задач теории оболочек сеточными методами // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 1. – С. 41 – 70.
9. *Шевченко Ю.Н., Галишин А.З.* Конкретизация определяющих уравнений упругопластического деформирования трансверсально-изотропного материала // Прикл. механика. – 2011. – **47**, № 6. – С. 68 – 75.
10. *Шевченко Ю.Н., Галишин А.З.* Об определяющих уравнениях физически нелинейного ортотропного материала // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій (Дніпропетровськ). – 2011. – Вип. 17. – С. 296 – 305.
11. *Шевченко Ю.Н., Галишин А.З.* Определение осесимметричного геометрически нелинейного термоупругопластического состояния слоистых ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 1. – С. 70 – 77.
12. *Шевченко Ю.Н., Гойхман М.И.* Исследование закономерностей упруго-пластического деформирования трансверсально-изотропных тел // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 9. – С. 50 – 54.
13. *Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В.* Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – К.: Наук. думка, 1981. – 296 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.3).
14. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 350 p.
15. *Shevchenko Yu.N., Babeshko M.E.* Numerical Analysis of the Thermoelastoplastic Stress-Strain State of Laminated Orthotropic Shells under Axisymmetric Loading // J. Therm. Stres. – 2006. – **29**, N 12. – P. 1143 – 1162.

Поступила 29.06.2011

Утверждена в печать 22.11.2012