УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

Об устойчивости траекторий множества разностных уравнений

Для множества разностных уравнений, генерируемых дискретизацией множества дифференциальных уравнений с производной Хукухары, установлен принцип сравнения с матричной функцией Ляпунова и достаточные условия устойчивости определенного типа. Анализ проведен на основе матричной функции Ляпунова специальной структуры.

Далее понадобятся следующие понятия и результаты (см. [1] и библиографию там). Пусть $K_C(\mathbb{R}^q)$ обозначает семейство всех непустых, компактных и выпуклых подмножеств в пространстве $\mathbb{R}^q$; $K(\mathbb{R}^q)$ содержит все непустые компактные подмножества в $\mathbb{R}^q$ и $C(\mathbb{R}^q)$ — подмножество всех непустых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^q$. Расстояние между непустыми замкнутыми подмножествами A и B пространства $\mathbb{R}^q$ определяется формулой

$$D[A,B] = \max\{d_H(A,B),\, d_H(B,A)\},$$

где $d_H(B,A) = \sup\{d(b,A)\colon b \in B\}$ — хаусдорфово разделение множеств A и B и $d(b,A) = \inf\{\|b-a\|\colon a \in A\}$ — расстояние от точки b до множества A; $\|\cdot\|$ — евклидова метрика.

Пара $(C(\mathbb{R}^q), D)$ является полным сепарабельным метрическим пространством, в котором $K(\mathbb{R}^q)$ и $K_C(\mathbb{R}^q)$ — замкнутые подмножества.

Пусть F — отображение области Q пространства $\mathbb{R}^q$ в метрическое пространство $(K_C(\mathbb{R}^q), D)$, т. е. $F\colon Q \to K_C(\mathbb{R}^q)$, что эквивалентно включению $F(t) \in K_C(\mathbb{R}^q)$ при всех $t \in Q$. Такие отображения называются многозначными отображениями Q в $\mathbb{R}^q$.

Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел и $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Обозначим через $\mathbb{N}_{n_0}$ множество

$$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0+1, \dots, n_0+k, \dots\},$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $n_0 \in \mathbb{N}_+$.

Напомним один результат из теории классических разностных уравнений, который понадобится ниже.

Теорема 1 (см. [2]). *Пусть $n \in \mathbb{N}_+$ и для любых $r \geqslant 0$ функция $g(n,r)$, $g\colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, неубывающая по r при каждом значении n. Если при любом $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства $y_n \geqslant 0$ и*

$$y_{n+1} \leqslant g(n, y_n),$$

$$z_{n+1} \geqslant g(n, z_n),$$

то $y_n \leqslant z_n$ при всех $n \geqslant n_0$, как только $y_{n_0} \leqslant z_{n_0}$.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 функция $g(n,r)$ имеет вид $g(n,r) = r + w(n,r)$, где $\lim \dfrac{\|w(n,r)\|}{\|r\|} = 0$ при $\|r\| \to 0$, то утверждение теоремы 1 сохраняется.*

Постановка задачи. Рассмотрим множество разностных уравнений в форме

$$X_{n+1} = F(n, X_n, \alpha), \qquad X_{n_0} = X_0, \tag{1}$$

где отображение $F\colon \mathbb{N}_+ \times K_C(\mathbb{R}^q) \to K_C(\mathbb{R}^q)$ является непрерывным по X_n при каждом n и $X_n \in K_C(\mathbb{R}^q)$ при всех $n \geqslant n_0$, $\alpha \in \Im \subset \mathbb{R}^d$ — параметр неточности.

Наряду с системой (1) будем рассматривать следующие множества разностных уравнений:

$$X_{n+1} = F_M(n, X_n), \qquad X_{n_0} = X_0, \tag{2}$$

где $F_M(n, X_n) = \overline{\text{co}} \bigcup\limits_{\alpha \in \Im} F(n, X_n, \alpha)$;

$$X_{n+1} = F_m(n, X_n), \qquad X_{n_0} = X_0, \tag{3}$$

где $F_m(n, X_n) = \overline{\text{co}} \bigcap\limits_{\alpha \in \Im} F(n, X_n, \alpha)$;

$$X_{n+1} = F_\beta(n, X_n), \qquad X_{n_0} = X_0, \tag{4}$$

где $F_\beta(n, X_n) = F_M(n, X_n)\beta + F_m(n, X_n)(1 - \beta)$, $\beta \in [0, 1]$.

Заметим, что произведение скаляра β на множество A определяется формулой $C = \beta A = \{c = \beta a\colon a \in A\}$.

Здесь и далее предполагается, что F_m, F_M и $F_\beta \in K_c(\mathbb{R}^q)$ и символ $\overline{\text{co}}$ обозначает замыкание выпуклой оболочки соответствующего множества. Необходимо получить условия устойчивости стационарного решения $\Theta \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множества систем разностных уравнений (1) на основе функции Ляпунова, построенной для уравнений (2)–(4).

Структура матричной вспомогательной функции. Введем вспомогательную функцию

$$U(n, \beta, X_n) = [U_{ij}(n, \beta, X_n)], \qquad i, j = 1, 2, \tag{5}$$

где элемент $U_{11}(n, X_n)$ связан с множеством уравнений (2), элемент $U_{22}(n, X_n)$ связан с множеством уравнений (3), элемент $U_{12}(n, \beta, X_n) = U_{21}(n, \beta, X_n)$ связан с множеством уравнений (4).

На основе функции (5) построим скалярную функцию

$$V(n, X_n, \beta, \theta) = \theta^T U(n, \beta, X_n)\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\} \tag{6}$$

и предположим, что $V\colon \mathbb{N}_+ \times K_C(\mathbb{R}^q) \times [0, 1] \times \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$.

Функция (6) является функцией Ляпунова для множества уравнений (1), если вместе с первой разностью

$$\Delta V(n, X_n, \beta, \theta) = V(n + 1, X_{n+1}, \beta, \theta) - V(n, X_n, \beta, \theta) \tag{7}$$

с ее помощью может быть решен вопрос об устойчивости стационарного решения $\Theta \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множества уравнений (1).

Наряду с множеством разностных уравнений (1) будем рассматривать скалярное уравнение сравнения

$$u_{n+1} = g(n, u_n), \qquad u_{n_0} = u_0, \tag{8}$$

которое связано с функцией (6) и первой разностью (7). Здесь функция $g(n,r)$ — непрерывная и неубывающая по r при каждом значении $n \in \mathbb{N}_+$ функция, $g(n,0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_+$.

Теорема 2. *Пусть для множества уравнений* (1) *построена функция* (6) *и для первой разности* (7) *верна оценка*

$$\Delta V(n, X_n, \beta, \theta)\big|_{(1)} \leqslant w(n, V(n, X_n, \beta, \theta)), \tag{9}$$

где $w(n,r)$ удовлетворяет условию следствия 1 при всех $n \in \mathbb{N}_+$. Тогда, если $V(n_0, X_{n_0}, \beta, \theta) \leqslant u_{n_0}$, то $V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leqslant u_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}_+$.

Доказательство. Обозначим $u_{n+1} = V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta)$. По условию теоремы 2, $V(n_0, X_{n_0}, \beta, \theta) \leqslant u_{n_0}$ и, кроме того,

$$u_{n+1} \leqslant u_n + w(n, u_n) \qquad \text{при всех} \qquad n \geqslant n_0.$$

Следовательно, в уравнении сравнения (8) $g(n,r) = r + w(n,r)$ и, согласно следствию 1, имеем оценку $V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leqslant u_{n+1}$ при всех $n \geqslant n_0$. Этим теорема 2 доказана.

Достаточные условия устойчивости стационарного решения уравнений (1). Напомним, что для множеств X_0, $Y_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множество $W_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ называется разностью Хукухары, если $X_0 = Y_0 + W_0$. Для множества уравнений (1) введем такие предположения:

1. Для уравнений (1) существует множество стационарных решений $\Theta_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$, т. е. $F(n, \Theta_0) = \Theta_0$ при всех $n \in \mathbb{N}_+$.

2. Существует множество $Y_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ такое, что для любого $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ существует разность Хукухары W_0.

Определение 1. Стационарное решение Θ_0 множества уравнений (1) является:

а) устойчивым, если для $n_0 \in \mathbb{N}_+$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $D[W_0, \Theta_0] < \delta$ следует оценка $D[X(n), \Theta_0] < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$, где W_0 — разность Хукухары для начальных значений $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$;

б) притягивающим, если для $n_0 \in \mathbb{N}_+$ существует $\alpha(n_0) > 0$ и для любого $\xi > 0$ существует $\tau(n_0, W_0, \xi) \in \mathbb{N}_+$ такое, что из неравенства $D[W_0, \Theta_0] < \alpha(n_0)$ следует оценка $D[X(n), \Theta_0] < \xi$ при любом $n \geqslant n_0 + \tau(n_0, W_0, \xi)$;

в) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее одновременно.

Для множества разностных уравнений (1) имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что для множества разностных уравнений* (1) *существуют*

а) функция (6), *постоянные симметрические* (2×2)*-матрицы* $A(\theta)$, $B(\theta)$ *и векторные функции сравнения* $(\phi_1, \phi_2) \in KR$*-классу Хана такие, что*

$$\begin{gathered} \phi_1^T(\|X_n\|)A(\theta)\phi_1(\|X_n\|) \leqslant V(n, X_n, \beta, \theta) \leqslant \phi_2^T(\|X_n\|)B(\theta)\phi_2(\|X_n\|) \\ \text{при всех} \qquad \beta \in [0,1], \qquad X_n \in K_C(\mathbb{R}^q) \qquad \text{и} \qquad \theta \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}; \end{gathered} \tag{10}$$

б) функция $w(n,r)$, указанная в следствии 1, и выполняется оценка (9) *при всех $\beta \in [0,1]$ и всех $n \in \mathbb{N}_+$.*

Тогда, если матрицы $A(\theta)$ и $B(\theta)$ определенно положительные, то стационарное решение $\Theta_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множества разностных уравнений (1) *обладает теми же динамическими свойствами, что и нулевое решение уравнения сравнения* (8).

Доказательство. Пусть $\lambda_m(A)$ и $\lambda_M(B)$ — минимальное и максимальное собственные значения матриц A и B соответственно. Оценку (10) преобразуем к виду

$$\lambda_m(A)b(\|X_n\|) \leqslant V(n, X_n, \beta, \theta) \leqslant \lambda_M(B)a(\|X_n\|),$$

где a, $b \in KR$-классу Хана такие, что

$$\phi_1^T(\|X_n\|)\phi_1(\|X_n\|) \geqslant b(\|X_n\|) \quad \text{и} \quad \phi_2^T(\|X_n\|)\phi_2(\|X_n\|) \leqslant a(\|X_n\|)$$
$$\text{при всех} \quad X_n \in K_C(\mathbb{R}^q) \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Далее предположим, что нулевое решение уравнения сравнения (8) асимптотически устойчиво. Пусть заданы $n_0 \in \mathbb{N}_+$ и $\varepsilon \in (0, H)$, $H = \mathrm{const} > 0$. При этом для величин $\lambda_m(A)b(\varepsilon) > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_+$ найдется $\delta_1 = \delta_1(n_0, \varepsilon) > 0$ такое, что если $0 < u_{n_0} < \delta_1$, то $u_{n+1} < \lambda_m(A)b(\varepsilon)$ при всех $n \geqslant n_0$. Далее выберем величину $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ из условия $\lambda_M(B)a(\delta) < \delta_1(n_0, \varepsilon)$. Согласно теореме 2, имеем оценку

$$V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leqslant u_{n+1} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant n_0$$

и вследствие неравенства (11) получим

$$\lambda_m(A)b(D[X_{n+1}, \Theta_0]) \leqslant V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leqslant u_{n+1} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Пусть начальные значения $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ и $D[X_0, \Theta_0] < \delta$. Выберем $u_{n_0} = V(n_0, X_0, \beta, \theta)$. Тогда нетрудно видеть, что

$$u_{n_0} \leqslant \lambda_M(B)a(D[X_0, \Theta_0]) \leqslant \lambda_M(B)a(\delta) < \delta_1.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_m(A)b(D[X_{n+1}, \Theta_0]) \leqslant \lambda_m(A)b(\varepsilon) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant n_0,$$

и, следовательно, $D[X_{n+1}, \Theta_0] < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$. Далее из оценки

$$\lambda_m(A)b(D[X_{n+1}, \Theta_0]) \leqslant V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leqslant u_{n+1} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0$$

следует, что для начальных условий $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ имеет место $D[X_{n+1}, \Theta_0] \to 0$ при $n \to \infty$, как только $u_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$.

Это завершает доказательство теоремы 3.

Заключительные замечания. Разностные уравнения имеют широкое применение в теории вероятностей, теории массового обслуживания, в теории стохастических степенных рядов, теории чисел, теории электрических сетей, экономике, экологии и при исследовании других явлений реального мира. В то время как общая теория устойчивости классических разностных уравнений развита достаточно полно (см. [3, 4] и библиографию там), теория множества разностных уравнений находится на начальной стадии создания. В данной работе излагается один общий подход к проблеме анализа устойчивости множества траекторий разностных уравнений на основе обобщенного прямого метода Ляпунова.

В тех случаях, когда для уравнения сравнения (8) условия устойчивости могут быть получены в явном виде, теоремой 3 эффективно решается вопрос об устойчивости стационарного решения Θ_0 множества разностных уравнений (1).

1. *Bhaskar T. G., Shaw M.* Stability results for set difference equations // Dynamic Systems and Applications. – 2004. – **13**, No 3/4. – P. 479–485.
2. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 315 p.
3. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Устойчивость разностных систем. – Санкт-Петербург: СПб гос. ун-т, 2003. – 111 с.
4. *Martynyuk A. A.* Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 322 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 10.09.2013

Академік НАН України **А. А. Мартинюк**

Про стійкість траєкторій множини різницевих рівнянь

Для множини різницевих рівнянь, які генеруються дискретизацією множини диференціальних рівнянь із похідною Хукухари, встановлено принцип порівняння з матричною функцією Ляпунова, а також достатні умови стійкості множини траєкторій. Аналіз проведено на основі матричної функції Ляпунова спеціальної структури.

Academician of the NAS of Ukrain **A. A. Martynyuk**

On the stability of trajectories of a set of difference equations

For a set of difference equations generated by the discretization of a set of differential equations with a Hukuhara derivative, the comparison principle with a Lyapunov matrix function and the sufficient conditions for the stability of a set of trajectories are established. The analysis is carried out on the basis of the Lyapunov matrix function with a special structure.