УДК 517.5

А. С. Ефимушкин, В. И. Рязанов

О регулярных решениях задачи Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Для невырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге доказано существование регулярных решений задачи Римана–Гильберта с коэффициентами ограниченной вариации и почти непрерывными граничными данными.

Обозначим через $\mathbb{D}$ единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть $\mu\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. *Уравнением Бельтрами* с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные функции $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ по x и y соответственно. Уравнение (1) называется невырожденным, если $\|\mu\|_\infty < 1$.

В 1904 г. Д. Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Римана–Гильберта. Она состояла в доказательстве существования и нахождении аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой K с условием

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in K, \tag{2}$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой K и что $|\lambda| \neq 0$ на K. Поэтому можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$.

Первый способ решения этой проблемы, основанный на теории сингулярных интегральных уравнений, был предложен самим Д. Гильбертом в работе [1]. Другой способ решения задачи, основанный на редукции к решению соответствующих двух задач Дирихле, был предложен также Д. Гильбертом (см. [2]). О дальнейшей истории вопроса см., например, [3]. Мы следуем второй из упомянутых схем при решении обобщенной задачи Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами в единичном круге.

1. Определения и предварительные замечания. Наиболее важным для нас является понятие логарифмической емкости (см., например, [4]). Пусть E — произвольное ограниченное борелевское множество плоскости $\mathbb{C}$. *Положительным распределением массы* на множестве E называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества ν, определенную на борелевских подмножествах E, с $\nu(E) = 1$. Функцию

$$U^\nu(z) := \int\limits_E \log\left|\frac{1}{z-\zeta}\right| d\nu(\zeta) \tag{3}$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения ν. Соответственно, *логарифмической емкостью* $C(E)$ множества E называется величина

$$C(E) = e^{-V}, \qquad V = \inf_{\nu} V_\nu(E), \qquad V_\nu(E) = \sup_{z} U^\nu(z). \tag{4}$$

Если $V = \infty$, то полагают $C(E) = 0$. Известно, что $0 \leqslant C(E) < \infty$, $C(E_1) \leqslant C(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$; $C(E) = 0$, если $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ с $C(E_n) = 0$; E имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если $C(E) = 0$ (см., например [5, с. 155]).

Обозначим через $A(\zeta_0, \delta)$ дугу единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ с центром в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ длины 2δ, где $\delta \in (0, \pi)$. Назовем множество $E \subset \partial\mathbb{D}$ *логарифмически тонким в точке* $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если при $\delta \to 0$

$$C\Big(E \bigcap A(\zeta_0, \delta)\Big) = o\left(\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right). \tag{5}$$

Заметим, что $C(A(\zeta_0, \delta)) \simeq 1/(\log(1/\delta))$ при $\delta \to 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$ такая, что $v/c \leqslant u \leqslant c \cdot v$ (см., например, [6, с. 131]). Таким образом, (5) означает, что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{C(E \bigcap A(\zeta_0, \delta))}{C(A(\zeta_0, \delta))} = 0, \tag{6}$$

т. е. ζ_0 является *точкой разрежения для множества* E относительно логарифмической емкости.

Говорим, что функция $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *почти непрерывна* в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если найдется некоторое логарифмически тонкое множество $E \subseteq \partial\mathbb{D}$ такое, что $\varphi(\zeta) \to \varphi(\zeta_0)$ при $\zeta \to \to \zeta_0$ вдоль множества $\partial\mathbb{D} \setminus E$. Другими словами, φ *аппроксимативно непрерывна в точке* ζ_0 относительно логарифмической емкости. Говорим также, что φ *почти непрерывна на* $\partial\mathbb{D}$, если она почти непрерывна в каждой точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, за исключением, быть может, множества логарифмической емкости нуль. Все эти понятия инвариантны относительно квазиконформных отображений комплексной плоскости на себя, сохраняющих единичную окружность, поскольку такие отображения непрерывны по Гельдеру на $\partial\mathbb{D}$.

Под *регулярным решением задачи Римана–Гильберта* (2) для уравнения Бельтрами (1) будем понимать непрерывное в $\mathbb{C}$, дискретное и открытое отображение $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, которое удовлетворяет уравнению (1) п. в. и граничному условию (2) вдоль некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, за исключением, быть может, множества логарифмической емкости нуль. Напомним, что отображение $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{D}$ является открытым в $\mathbb{C}$.

Мы называем $\lambda\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *функцией ограниченной вариации*, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, если $V_\lambda(\partial\mathbb{D}) := \sup \sum\limits_{j=1}^{k} |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty$, где супремум берется над всеми конечными наборами точек $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$, $j = 1, \ldots, k$, с циклическим порядком, означающим, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \ldots, k$. Здесь мы предполагаем, что $\zeta_{k+1} = \zeta_1 = \zeta_0$. Для функции $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$ с $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, ее *индекс* есть целое число $I_\lambda = \Delta/2\pi$, где $\Delta = \Delta_{\partial\mathbb{D}} \arg\lambda$ — приращение аргумента функции $\lambda(\zeta)$, когда точка ζ обходит окружность $\partial\mathbb{D}$ один раз против часовой стрелки.

2. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\mu\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *— измеримая функция с* $\|\mu\|_\infty < 1$, $\lambda\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *— функция ограниченной вариации с* $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$ *и* $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *— почти непрерывная функция. Если* $I_\lambda \geqslant 0$, *то существует регулярное решение* f *задачи Римана–Гильберта* (2) *для уравнения Бельтрами* (1).

Действительно, продолжая μ нулем всюду вне $\mathbb{D}$, получаем существование квазиконформного отображения $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$, удовлетворяющего уравнению Бельтрами (1) (см., например, теорему V.1.3 в [8]). Жорданова область $f(\mathbb{D})$ по теореме Римана может быть отображена с помощью конформного отображения g на $\mathbb{D}$ с нормировками $g(0) = 0$ и $g(1) = 1$. Ясно, что $h := g \circ f$ — квазиконформный гомеоморфизм с $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, удовлетворяющий тому же уравнению Бельтрами (1).

По принципу отражения (см., например, теорему I.8.4 в [8]), привлекая инверсию относительно единичной окружности в образе и прообразе, мы можем продолжить h до квазиконформного отображения $H\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $H(0) = 0$, $H(1) = 1$ и $H(\infty) = \infty$. Так как H и H^{-1} являются непрерывными по Гельдеру на $\partial\mathbb{D}$ (см., например, теорему II.4.3 в [8]), имеем, что функция $\Phi = \varphi \circ H^{-1}$ является почти непрерывной. Ясно также, что $\Lambda = \lambda \circ H^{-1}$ — ограниченной вариации.

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта для аналитических функций F:

$$\lim_{z \to \zeta} \overline{\Lambda(\zeta)} \cdot F(z) = \Phi(\zeta) \tag{7}$$

с пределом вдоль некасательных путей везде на $\partial\mathbb{D}$, за исключением, быть может, некоторого множества логарифмической емкости нуль.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $I_\Lambda = 0 = I_\lambda$. Тогда $\lambda(\zeta) = e^{i\alpha(\zeta)}$, где функция аргумента $\alpha = \alpha_\Lambda\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ является однозначной функцией ограниченной вариации, и

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \alpha(\zeta) \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ с $u(z) = \operatorname{Re} G(z) \to \alpha(\zeta)$ при $z \to \zeta$ для всех $\zeta \in \in \partial\mathbb{D}$, за исключением (счетного числа) точек разрыва функции α (см., например, теоремы I. D.2.2 в [9]). В силу ограниченности α, $u \in h^p$ для всех $p \geqslant 1$ по теореме IX.2.3 в [10] и, следовательно, $v = \operatorname{Im} G \in h^p$ для всех $p \geqslant 1$ (см., например, теорему IX.3.4 в [10]). Поэтому найдется функция $\beta\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\beta \in L^p$, такая, что $v(z) \to \beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ для п. в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ вдоль некасательных путей (см., например, следствие IX.2.2 в [10]).

Более того, поскольку $\alpha \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, функция β является почти непрерывной функцией на $\partial\mathbb{D}$ и найдется множество $E \subseteq \partial\mathbb{D}$ логарифмической емкости нуль такое, что $v(z) \to \beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D} \backslash E$ (см. теорему 1 в [7], а также теоремы I. E.3.2 и I. E.4.1 в [9] и теорему IX.1.3 в [10]). Таким образом, $G(z) \to \alpha(\zeta) + i\beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — подмножество $\partial\mathbb{D}$ логарифмической емкости нуль.

Далее, поскольку функции Φ и β почти непрерывны на $\partial\mathbb{D}$, то функция $\Psi = \Phi e^\beta$ также почти непрерывна. Но тогда в единичном круге $\partial\mathbb{D}$ найдется гармоническая функция U такая, что $U(z) \to \Psi(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \mathcal{E}_*$, где $\mathcal{E}_* \subseteq \partial\mathbb{D}$ — некоторое множество логарифмической емкости нуль. Пусть $\mathcal{A} = U + iV$, где V — гармонически сопряженная к U функция в единичном круге. Элементарные вычисления показывают, что функция $F = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = e^{iG}$, является искомым решением задачи Римана–Гильберта (9) в случае $I_\lambda = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $I_\lambda > 0$. Для произвольных $z_j \in \mathbb{D}$, $j = 1, \ldots, I_\lambda$, положим

$$\lambda^*(\zeta) = \lambda(\zeta) \prod_{j=1}^{I_\lambda} \frac{|\zeta - z_j|}{\zeta - z_j}, \qquad \varphi^*(\zeta) = \varphi(\zeta) \prod_{j=1}^{I_\lambda} \frac{1}{|\zeta - z_j|}, \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Так как $I_{\lambda_1\lambda_2} = I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2}$, получаем, что $I_{\lambda^*} = 0$ и искомое решение имеет вид

$$F(z) = F^*(z) \prod_{j=1}^{I_\lambda} (z - z_j), \qquad z \in \mathbb{D},$$

где F^* — решение задачи Римана–Гильберта из предыдущего абзаца с λ^* и φ^* вместо λ и φ в граничном условии (7).

Наконец, решение исходной задачи Римана–Гильберта (2) для уравнения Бельтрами (1) имеет вид $f = F \circ H$.

1. *Hilbert D.* Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf eine Problem der Funktionentheorie // Verhandl. des III Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. – Leipzig: Teubner, 1905. – P. 233–240.
2. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. – Leipzig: Teubner, 1912. – 282 p.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
4. *Носиро К.* Предельные множества. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 253 с.
5. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – Москва: ОГИЗ, 1941. – 388 с.
6. *Adams D. R., Hedberg L. I.* Function spaces and potential theory. – Berlin: Springer, 1996. – 366 p.
7. *Twomey J. B.* The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bull. – 2006. – No 58. – P. 81–91.
8. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1973. – 258 p.
9. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – Москва: Мир, 1984. – 368 с.
10. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 18.11.2013

А. С. Єфімушкін, В. І. Рязанов

Про регулярні розв'язки задачі Рімана–Гільберта для рівнянь Бельтрамі

Для невироджених рівнянь Бельтрамі в одиничному колі доведено існування регулярних розв'язків задачі Рімана–Гільберта з коефіцієнтами, що мають обмежену варіацію, і майже неперервними межовими даними.

A. S. Yefimushkin, V. I. Ryazanov

On the regular solutions of the Riemann–Hilbert problem for the Beltrami equations

For the non-degenerate Beltrami equations in a unit disk, the existence of regular solutions of the Riemann–Hilbert problem with coefficients of bounded variation and almost continuous boundary data is proved.