УДК 519.6

Е.В. Водолазский, В.И. Крюков

Распознавание бесконфликтности двух кусочно-линейных траекторий

Исследована задача о движении двух точек без столкновения по заданным траекториям. Задача состоит в ответе на вопрос, могут ли точки так пройти по своим траекториям, чтобы не оказаться близкими друг к другу. Разработан алгоритм, решающий эту задачу.

The problem of the conflict-free motion of two points is considered. It is necessary to determine whether the points are able to walk along their trajectories so that they would not appear close to each other. An algorithm solveing this problem is developed.

Досліджено задачу про рух без зіткнення двох точок за заданими траєкторіями. Задача полягає у відповіді на запитання, чи можуть дві точки так обійти свої траєкторії, щоб не стати близькими одна до одної. Розроблено алгоритм, що розв’язує цю задачу.

Введение. Данная статья находится на стыке двух областей. Первую из них составляют исследования сложности вычисления расстояния Фреше между определенными типами кривых. Обычно основные понятия в этих исследованиях представляются следующим образом. Пусть заданы две ломаные линии, для каждой из которых указано начало и конец их обхода. Некоторые две точки должны пройти по этим ломаным от начала до конца, каждая точка – по своей ломаной. Движение точки должно быть непрерывным и монотонным в том смысле, что точка не должна возвращаться на свое прежнее положение.

Две ломаные считаются ε-близкими, если возможно такое движение точек по этим ломаным, что в процессе всего движения расстояние между точками не превышает ε. Расстояние Фреше между этими ломаными – это минимальное число ε, при котором ломаные остаются ε-близкими. *Alt* и *Godau* в 1995 году разработали алгоритм, распознающий ε-близость двух ломаных за время $O(mn)$, где m и n – количества отрезков в этих ломаных [1, 2].

Задача, решаемая в этой статье, в определенном смысле противоположна распознаванию ε-близости: точкам во время движения запрещено приближаться друг к другу ближе чем на ε. Если такое движение возможно, то ломаные линии называются ε-бесконфликтными. Задача в такой постановке становится родственной задачам конфликтного управления [3, 4]. Однако в отличие от основной проблематики конфликтного управления, решаемая задача обладает некоторым своеобразием. В теории конфликтного управления исследуются, в основном, игровые ситуации сближения–уклонения, в которых преследуемый и преследователь имеют противоположные цели. Преследователь стремится к встрече с преследуемым, а преследуемый – к уклонению от нее. В данной статье рассматривается ситуация, когда цель обоих участников состоит в уклонении от встречи. Результат статьи – алгоритм, распознающий ε-бесконфликтность за время $O(mn)$, где m и n – количества отрезков в этих ломаных.

Постановка задачи

Пусть R^k – k-мерное линейное пространство с евклидовой метрикой $d(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}$.

Определение 1. Ломаная линия, состоящая из m прямолинейных отрезков, есть непрерывное отображение $P{:}[0,m]\to R^k$ такое, что для любой пары $i\in\{0,...,m-1\},\lambda\in[0,1]$ выполняется равенство $P(i+\lambda)=(1-\lambda)P(i)+\lambda P(i+1)$.

Пусть P – ломаная линия, состоящая из m отрезков. Монотонно неубывающее непрерывное отображение $[0, 1]\to[0, m]$ назовем репараметризацией этой ломаной линии. Обозначим Φ_P – множество репараметризаций ломаной P.

Определение 2. Расстоянием Фреше между ломаными P и Q есть число

$$d_F(P,Q)=\min_{\varphi_P\in\Phi_P}\min_{\varphi_Q\in\Phi_Q}\max_{t\in[0,1]} d\left(P\left(\varphi_P(t)\right),Q\left(\varphi_Q(t)\right)\right).$$

Под распознаванием ε-близости ломаных линий P и Q понимается проверка неравенства $d_F(P,Q)\le\varepsilon$.

Распознавание ε-бесконфликтности двух ломаных, исследуемое в данной статье, в определенном смысле противоположно распознаванию их ε-близости.

Определение 3. Кривые P *и* Q называются ε-бесконфликтными, если существует пара $\varphi_P \in \Phi_P, \varphi_Q \in \Phi_Q$ такая, что

$$\min_{t\in[0,1]} d\left(P\left(\varphi_P\left(t\right)\right), Q\left(\varphi_Q\left(t\right)\right)\right) \geq \varepsilon .$$

Результат статьи – алгоритм, распознающий ε-бесконфликтность за время $O(mn)$.

Диаграмма допустимости. Для решения задачи ε-бесконфликтности воспользуемся диаграммой допустимости, аналог которой (*free space diagram*) для метрики Фреше введен в [1]. Для заданных ломаных P и Q определим прямоугольник $D=\left\{(u,v)\in R^2 \mid 0\leq u< m, 0\leq v<n\right\}$. Точке $(u, v) \in D$ соответствует пара точек $P(u)$ и $Q(v)$ на ломаных P и Q. Точку $(u, v) \in D$ назовем допустимой, если $d(P(u), Q(v)) \geq \varepsilon$, и недопустимой в противном случае.

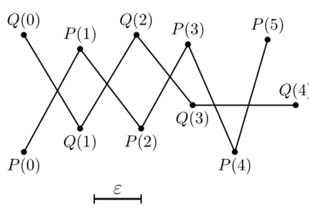

Рис. 1

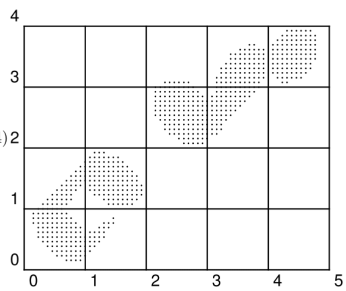

Рис. 2

Диаграмма допустимости – это прямоугольник D, представленный в виде объединения двух непересекающихся подмножеств: множества допустимых точек и множества недопустимых точек. На рис. 1 представлены две ломаные. Диаграмма допустимости, соответствующая этим ломаным, представлена на рис. 2.

Определение 4. Связное подмножество $\pi \subset D$ назовем монотонным путем, если $\left(u' \geq u\right) \to \left(v' \geq v\right)$ для всех $(u,v),(u',v') \in \pi$. Если к тому же $d(P(u), Q(v)) \geq \varepsilon$ для всех $(u, v) \in \pi$, то π назовем допустимым путем.

Определение 5. Точка $(u',v') \in \pi$ называется достижимой из точки $(u, v) \in \pi$, если существует допустимый путь, содержащий (u',v') и (u, v).

Достижимость точки (u',v') из точки (0,0) будем называть достижимостью точки (u',v').

Из введенных понятий непосредственно следует лемма, аналогичная Лемме 4 из [1], и поэтому приводится без доказательства.

Лемма 1. Ломаные P и Q ε-бесконфликтны тогда и только тогда, когда точка (m,n) достижима из точки (0,0).

Свойства достижимости. Разобьем прямоугольник D на ячейки $D(i,j) = \{(u,v) \mid i-1 \leq u < i, j-1 \leq v < j\}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Для каждой пары i, j обозначим $L(i,j) = \{(i-1,v) \mid j-1 \leq v \leq j\}$, $B(i,j) = \{(u,j-1) \mid i-1 \leq u \leq i\}$ левую и, соответственно, нижнюю границы ячейки $D(i,j)$.

Лемма 2. Множество допустимых точек ячейки $D(i,j)$ есть дополнением выпуклого множества.

Доказательство. В [1] доказана лемма, где утверждается, что множество недопустимых точек ячейки выпукло. **Конец доказательства**.

Обозначим $L^*\left(i,j\right)$ подмножество точек левой границы $L(i,j)$, достижимых из (0,0). Аналогично введем обозначение $B^*\left(i,j\right)$ для подмножества достижимых точек нижней границы.

Лемма 3. Каждое из множеств $L^*\left(i,j\right)$ (соответственно, $B^*\left(i,j\right)$) есть объединение не более чем двух непересекающихся отрезков.

Доказательство. В силу Леммы 2, множество допустимых точек на границе ячейки есть объединение не более чем двух непересекающихся отрезков. Любая достижимая точка принадлежит одному из этих отрезков. Очевидно, что если некоторая точка достижима, то достижимы и все точки сверху (соответственно, справа) от нее, принадлежащие тому же достижимому отрезку. Отсюда следует, что подмножество достижимых точек одного отрезка допустимости образует отрезок. Следовательно, множество достижимых точек есть объединение не более чем двух отрезков–подмножеств отрезков допустимости. **Конец доказательства**.

Отрезок в $L^*(i,j)$ или $B^*(i,j)$ будем называть достижимым отрезком.

Лемма 4. Пусть $\{i\}\times[a,b]$ – достижимый отрезок в $L^*(i,j)$. Пусть $(i,v), v\in[a,b]$, – одна из точек отрезка. Тогда любая точка (u',v'), достижмая из точки (i,v), также достижима из начала (i,a) достижимого отрезка.

Доказательство. Достаточно взять допустимый путь, из точки (i, a) в точку (i, v) границы $L(i,j)$, а затем соединить его с путем из (i, v) в (u', v'), который существует по условиям леммы. **Конец доказательства.**

Лемма 5. Пусть $[a, b]\times\{j\}$ – достижимый отрезок в $B^*(i,j)$. Пусть (u,j) $u\in[a,b]$, – одна из точек отрезка. Тогда любая точка (u',v'), достижмая из точки (u,j), также достижима из начала (a, u) достижимого отрезка.

Доказательство леммы аналогично доказательству Леммы 4.

Лемма 6. Пусть $B\in D(i,j)$ достижима из точки $A\in D(i,j)$, а π – допустимый путь из A в B. Тогда для любой пары монотонных путей π_1, π_2 из A в B таких, что π_1 не выше чем π, а π_2 не ниже чем π, по крайней мере один путь из пары – допустим.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполняется, т.е. монотонные пути не есть допустимыми. Это значит, что путь π_1 содержит в себе по крайней мере одну недопустимую точку C, а путь π_2 – одну недопустимую точку D. В силу Леммы 2, все точки отрезка, соединяющего точки C и D, недопустимы. Однако этот отрезок пересекает путь π в некоторой точке R (рис. 3), которая, по условиям леммы, есть допустимой. Из этого противоречия следует справедливость леммы. **Конец доказательства**.

Следствие. Необходимым и достаточным условием достижимости точки (u_2,v_2) из точки (u_1,v_1) есть допустимость по крайней мере одной из следующих путей: пути (вправо, вверх), который содержит точку (u_2, v_1) и пути (вверх, вправо), содержащем точку (u_1, v_2) (рис. 4).

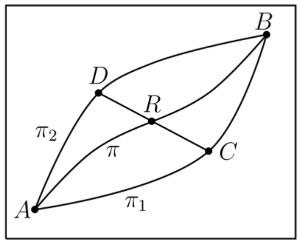

Рис. 3

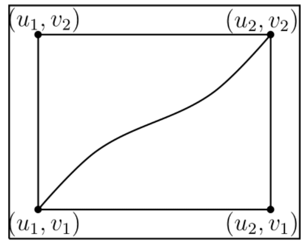

Рис. 4

Вычисление отрезков достижимости

Обозначим $U(i,j)$ – множество недопустимых точек ячейки $D(i,j)$. Согласно Лемме 2, множество $U(i,j)$ есть выпуклым.

Пересечение $U(i,j)\cap L(i,j)$ вычисляется тривиальным образом. Это пересечение есть некоторый отрезок $\{i\}\times(I_b,I_t)$. Аналогично, $U(i,j)\cap B(i,j)=(I_l,I_r)\times\{j\}$. Концы I_b и I_l отрезков пересечений вычисляются в начале алгоритма для всех ячеек. Отрезки достижимости для ячейки $D(1,1)$ вычисляются по следующим правилам:

$$B^*(1,1)=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } (0,0)\in U(1,1),\\ [0,I_l]\times\{0\}, & \text{если } U(1,1)\cap B(1,1)\neq\varnothing,\\ B(1,1), & \text{если } U(1,1)\cap B(1,1)=\varnothing;\end{cases}$$

$$L^*(1,1)=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } (0,0)\in U(1,1),\\ \{0\}\times[0,I_b], & \text{если } U(1,1)\cap L(1,1)\neq\varnothing,\\ L(1,1), & \text{если } U(1,1)\cap L(1,1)=\varnothing.\end{cases}$$

Область достижимости на левой и нижней границах прямоугольника D определяется следующим образом:

для $2\le i\le m$

$$B^*(1,1)=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } (i-1,0)\notin B^*(i-1,1),\\ [i-1,I_l]\times\{0\}, & \text{если } U(i,1)\cap B(i,1)\neq\varnothing,\\ B(i,1), & \text{если } U(i,1)\cap B(i,1)=\varnothing;\end{cases}$$

для $2\le j\le n$

$$L^*(1,j)=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } (0,j-1)\notin L^*(1,j-1),\\ \{0\}\times[j-1,I_b], & \text{если } U(1,j)\cap L(1,j)\neq\varnothing,\\ L(1,j), & \text{если } U(1,j)\cap L(1,j)=\varnothing.\end{cases}$$

Для $2 \le i \le m$, $2 \le j \le n$, множество $B^*(i, j+1)$ вычисляется на основании $L^*(i, j)$ и $B^*(i, j)$ по следующим правилам. Множество $L^*(i+1, j)$ строится подобным образом.

***Случай* 1**. $B(i, j+1) \subset U(i, j)$.

Очевидно, $B^*(i, j+1) = \varnothing$.

***Случай* 2**. $B(i, j+1) \cap U(i, j) = \varnothing$.

Необходимо построить следующие множества:

$$F = \{(i-1, j)\} \cap L^*(i, j); \tag{1}$$

$$S_1 = \begin{cases} \max\{u \mid (u, v) \in U(i, j)\} \times \{j\}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } U(i, j) \neq \varnothing, \\ \varnothing, \qquad\qquad \text{если } U(i, j) = \varnothing; \end{cases} \tag{2}$$

$$S_2 = \begin{cases} \{a, c\} \times \{j\}, \text{ если } B^*(i, j) = \\ \qquad = ([a, b] \cup [c, d]) \times \{j-1\}, b < c, \\ \{a\} \times \{j\}, \text{ если } B^*(i, j) = [a, b] \times \{j-1\}, \\ \varnothing, \qquad \text{если } B^*(i, j) = \varnothing; \end{cases} \tag{3}$$

$$S = (S_1 \cup S_2) \cap B^*(i, j+1). \tag{4}$$

Тогда

$$B^*(i, j+1) = \begin{cases} \varnothing, & F \cup S = \varnothing, \\ \min\limits_u \{(u, j) \in F \cup S\}, & F \cup S \neq \varnothing. \end{cases}$$

Комментарий. В доказательстве Леммы 3 было показано, что отрезок достижимости получается из отрезка допустимости отсечением недостижимых точек слева. Поскольку допустимый отрезок всего один и он совпадает с $B(i, j+1)$, для определения $B^*(i, j+1)$ необходимо найти самую левую достижимую точку $B(i, j+1)$.

Во-первых, $B(i, j+1)$ будет достижимым полностью, если достижим левый его край. Множество $L^*(i, j)$ уже построено, поэтому множество F (1) находится непосредственно.

Во-вторых, отрезок может быть усечен слева от точки (u_r, j) (рис. 5, 6). Этим обосновывается необходимость рассмотрения множества S_1 (2).

В-третьих, усечение может происходить по точкам множества S_2 (3) (рис. 7). Множествами S_1 (2) и S_2 (3) исчерпываются все возможные точки, по которым происходит усечение. В (4) проверяется, какие из этих точек достижимы. **Конец комментария.**

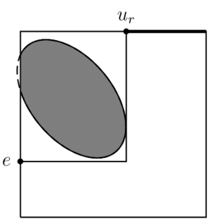

Рис. 5

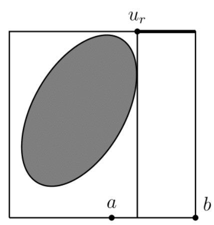

Рис. 6

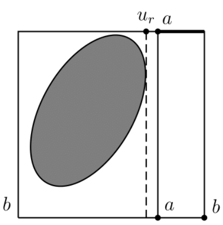

Рис. 7

Случай 3. $B(i, j+1) \cap U(i, j) = (I_l, I_r)$.

Необходимо вычислить следующие два числа:

$$\begin{aligned} u_l &= \min\{u \mid (u, v) \in U(i, j)\}, \\ u_r &= \max\{u \mid (u, v) \in U(i, j)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

F и S определены так же, как и в предыдущем пункте. Необходимо построить следующие дополнительные множества:

$$G_1 = F \cup \{(s, j) \in S \mid s \le u_l\}, \tag{7}$$

$$G_2 = \{(s, j) \in S \mid s \ge u_r\}, \tag{8}$$

$$A_1 = \begin{cases} [\min\limits_u \{(u, j) \in G_1, I_l] \times \{j\}, & G_1 \neq \varnothing, \\ \varnothing, & G_1 = \varnothing; \end{cases} \tag{9}$$

$$A_2 = \begin{cases} [\min\limits_u \{(u, j) \in G_2, i] \times \{j\}, & G_2 \neq \varnothing, \\ \varnothing, & G_2 = \varnothing. \end{cases} \tag{10}$$

В итоге $B^*(i, j+1) = A_1 \cup A_2$.

Комментарий. Допустимых отрезков два и необходимо усекать каждый из них. Первый может начинаться в точке множества G_1 (7), а второй – в точке множества G_2 (8). Разнесение точек множества S по множествам G_1 и G_2 (7, 8), руководствуясь u_l и u_r (6), мотивировано тем, что

- не существует монотонных путей из точек множества $\{(u, j-1) \in B(i, j) \mid u \ge u_r\}$ в точки множества $\{(u, j) \mid i-1 \le u \le I_l\}$;

• отрезок, который начинается в точке множества $\{(s,j)\in S \mid s\le u_l\}$, не может быть правым отрезком, т.е. заканчиваться точкой (i,j), поскольку $(I_l,I_r)\times\{j\}\subset[u_l,i]\times\{j\}$. **Конец комментария.**

Достижимость какой-либо точки среди $B(i,j+1)$ определяется существованием допустимого пути, который начинается в одной из точек–начал отрезков достижимости среди отрезков $B^*(i,j)$ и $L^*(i,j)$. Согласно Лемме 3, таких точек может быть не более чем четыре.

Следствие из Леммы 5 дает нам критерий существования пути. Если такой путь существует, то он состоит из двух отрезков, при движении по каждому из которых одна из координат постоянная. На языке исходных ломаных P и Q это означает, что движение происходит сначала только по одной кривой, а затем только по другой.

Теорема. Для заданного $\varepsilon > 0$ и ломаных P и Q, состоящих соответственно из m и n отрезков, их ε-бесконфликтность распознается за $O(mn)$ операций.

Доказательство. Согласно Лемме 1, ломаные P и Q ε-бесконфликтны тогда и только тогда, когда точка (m, n) достижима.

В предыдущем разделе было сформулировано правило построения множества $B^*(i,j+1)$ на основании множеств $L^*(i,j)$ и $B^*(i,j)$. Подобным образом строится $L^*(i+1,j)$. Непосредственно из правил следует, что их применение требует ограниченного числа операций.

Для нахождения $B^*(m,n)$ и $L^*(m,n)$ необходимо вычислить все $B^*(i,j)$ и $L^*(i,j)$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, т.е. пройти по mn ячейкам и для каждой выполнить $O(1)$ операций. Располагая $B^*(m,n)$ и $L^*(m,n)$, достижимость точки (m, n) определяется за постоянное время. **Конец доказательства.**

Заключение. Таким образом, показано, что задача о движении двух точек без столкновений по заданным траекториям, хоть и требует более сложных алгоритмов, разрешима за то же асимптотическое время, что и задача о близком движении точек (распознавание близости по Фреше).

1. *Alt H.*, *Godau M.* Computing the Frechet distance between two polygonal curves // Int. J. of Computational Geometry and Applications. – 1995. – N 5. – P. 75–91.
2. *Шлезингер М.И*, *Водолазский Е.В.*, *Яковенко В.М.* Распознавание сходства многоугольников в усиленной хаусдорфовой метрике // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 174–187.
3. *Chikrii A.* The problem of avoidance for controlled dynamic objects // Int. J. of Mathematics, Game Theory and Algebra. – 1998. – N 7. – P. 81–94.
4. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка,1992. – 384 с.

Поступила 06.05.2015

Тел. для справок: +38 044 502-6314 (Киев)

●

Внимание!

Требования к оформлению статей размещены на сайте журнала: ***http*://*usim.irtc.org.ua***

Для соответствия журнала современным научно-метрическим базам, авторы должны подать на английском языке:

– расширенную аннотацию на 1–1,5 с. с выделением рубрик: *Introduction*, *Purpose*, *Methods*, *Results*, *Conclusion*);

– фамилию и инициалы автора,

– название статьи;

– ключевые слова (*Keywords*);

– место работы, должность и адрес;

– ученая степень, звание;

– пристатейный список литературы на латинице (для русскоязычных ссылок – транслитерация Ф.И.О. авторов и названия журнала, название статьи – перевод на англ.).