УДК 004.942; 512.552

С. И. Клипков
Главный информационно-вычислительный центр НЭК «Укрэнерго»
ул. С. Петлюры, 27, 01032 Киев, Украина

Обобщенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики

С наиболее общих позиций рассмотрены вопросы представления комплексных чисел, кватернионов, квадриплексных (бикомплексных) чисел и бикватернионов комплексными матрицами второго порядка. Для построения матричных базисов рассматриваемых представлений из множества указанных матриц выделено подмножество элементов, квадрат которых равен отрицательной матричной единице. Показано, что внутренняя структура вырожденных мнимых матричных единиц позволяет естественным образом конструировать числовые системы, не прибегая к аксиоматическому определению алгебраической операции умножения. Сформулирован ряд утверждений, позволяющих упростить решение затронутых в статье вопросов.

Ключевые слова: *числовая система, матричная мнимая единица, комплексные числа, квадриплексные числа, кватернионы, бикватернионы.*

Вступление

Построение гиперкомплексных числовых систем методом комплексного удвоения связано с дополнительным введением мнимых единиц, которым, наряду с исходной мнимой единицей, присваивается математическое свойство

$$i^2 = -1, \tag{1}$$

где i — символ мнимой единицы [1–5].

Поскольку с точки зрения соотношения (1) мнимые единицы не различаются по своей сути, то правила умножения каждой «новой» мнимой единицы со «старыми» мнимыми единицами необходимо определять аксиоматически. Для того чтобы можно было естественным образом умножать мнимые единицы между собой и, таким образом, уйти от аксиоматического подхода, каждая мнимая единица должна обладать некоторыми качествами, определяющими ее особенность по отношению к другим мнимым единицам. С этой точки зрения целесообразно более подробно рассмотреть представления наиболее распространенных ассоциативных числовых систем комплексными матрицами второго порядка, так как входящие в состав матричных базисов элементы имеют различную внутреннюю структуру, обуславливающую их индивидуальность.

Выделим из всего множества комплексных матриц 2×2 множество матриц $\mathbf{I}$, удовлетворяющих матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{p} \\ \dot{q} & \dot{y} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно рассматривать как матричную интерпретацию соотношения (1). Однако следует обратить внимание на существенное методологическое различие анализируемых выражений. Соотношение (1) приписывает некоторому символу i математическое свойство, которое не наблюдается на множестве действительных чисел [1], и этот факт фиксируется термином «мнимая единица». Что касается уравнения (2), то сам термин «уравнение» говорит о том, что искомое множество матриц может быть определено путем анализа системы конкретных алгебраических уравнений. При этом элементами таких матриц могут быть как комплексные числа, уже использующие в своей структуре понятие мнимой единицы, так и одни лишь действительные числа, не требующие введения указанного понятия.

Определение мнимых матричных единиц

Матричному уравнению (2) соответствует система четырех нелинейных комплексных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными [3]:

$$\dot{x}^2 + \dot{p}\dot{q} = -1, \tag{2,а}$$

$$\dot{p}(\dot{x}+\dot{y}) = 0, \tag{2,б}$$

$$\dot{q}(\dot{x}+\dot{y}) = 0, \tag{2,в}$$

$$\dot{y}^2 + \dot{p}\dot{q} = -1, \tag{2,г}$$

анализ которых позволяет найти в общем виде элементы всех комплексных матриц 2×2, квадрат которых равен отрицательной матричной единице.

Если $\dot{p}\neq 0$ и $\dot{q}\neq 0$, то из уравнений (2,б), (2,в) следует соотношение $\dot{x}+\dot{y}=0$. Тогда $\dot{x}=-\dot{y}$, и из уравнений (2,а), (2,г) получаем наиболее общее решение $\dot{x}=\pm\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}$, $\dot{y}=\mp\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}$, которое приводит к множеству матриц второго порядка, удовлетворяющих сформулированным выше условиям:

$$\mathbf{I}_\alpha = \begin{bmatrix} \sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} & \dot{p} \\ \dot{q} & -\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Рассмотренному решению удовлетворяют также варианты $\dot{p} \neq 0$, $\dot{q} = 0$ и $\dot{p} = 0$, $\dot{q} \neq 0$.

При значениях $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 0$ соотношение между неизвестными $\dot{x}$ и $\dot{y}$ становится более общим: $\dot{x} + \dot{y} = \dot{r}$. Для этих значений $\dot{p}$, $\dot{q}$ из уравнений (2,а), (2,г) следует $\dot{r}^2 - 2\dot{r}\dot{x} = 0$, что дает возможность получить два значения $\dot{r}$: $\dot{r} = 0$ и $\dot{r} = 2\dot{x}$. Значению $\dot{r} = 0$ соответствует уже рассмотренное выше соотношение $\dot{y} = -\dot{x}$, которое приводит к общему решению (3), а значению $\dot{r} = 2\dot{x}$ — соотношение $\dot{y} = \dot{x}$, позволяющее определить дополнительно к (3) матрицу, удовлетворяющую (2):

$$\mathbf{I}_{м} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Таким образом, все множество $\mathbf{I}$ комплексных матриц 2×2, квадрат которых равен отрицательной матричной единице, включает в себя матрицы $\mathbf{I}_{\alpha}$ и $\mathbf{I}_{м}$.

Матрицы, противоположные $\mathbf{I}_{\alpha}$, $\mathbf{I}_{м}$, квадрат которых также равен отрицательной матричной единице, не предоставляют каких-либо дополнительных свойств, характеризующих представления рассматриваемых числовых систем. Поэтому в дальнейшем они рассматриваться не будут.

Отметим, что матрица $\mathbf{I}_{м}$ может быть определена как $i\mathbf{1}$, где $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — матричная единица. Указанная матрица коммутирует со всеми комплексными матрицами второго порядка, в том числе и с матрицами $\mathbf{I}_{\alpha}$. Поэтому ее можно назвать мнимой матричной единицей. Определитель, след и собственные числа матрицы $\mathbf{I}_{м}$ имеют значения: $\det \mathbf{I}_{м} = -1$, $\operatorname{tr} \mathbf{I}_{м} = 2i$, $\lambda_{1,2} = i$. Что касается матриц $\mathbf{I}_{\alpha}$, то элементами этих матриц могут быть и мнимая единица i, и комплексные числа, и одни только действительные числа. Кроме того, как будет показано ниже, матрицы $\mathbf{I}_{\alpha}$ не коммутируют между собой. Рассматриваемые матрицы будем называть вырожденными мнимыми матричными единицами [6], подчеркивая этим, что свойства матриц $\mathbf{I}_{\alpha}$, обусловленные их внутренней структурой, являются особенными по отношению к свойствам мнимой матричной единицы $\mathbf{I}_{м}$. Матрицы $\mathbf{I}_{\alpha}$ характеризуются значениями: $\det \mathbf{I}_{\alpha} = 1$, $\operatorname{tr} \mathbf{I}_{\alpha} = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Утверждение 1. Любую комплексную матрицу второго порядка $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & -\dot{a} \end{bmatrix}$ с нулевым следом $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 0$, можно преобразовать к матрице множества $\mathbf{I}_{\alpha}$.

Доказательство. Рассматривая матрицу $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{a}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} & \dfrac{\dot{b}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} \\ \dfrac{\dot{c}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} & \dfrac{-\dot{a}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} \end{bmatrix}$, видим, что

$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \sqrt{-1-\dot{u}\dot{v}} & \dot{u} \\ \dot{v} & -\sqrt{-1-\dot{u}\dot{v}} \end{bmatrix} \in \mathbf{I}_\alpha$, где $\dot{u} = \dfrac{\dot{b}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}$, $\dot{v} = \dfrac{\dot{c}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}$. Утверждение 1 доказано.

Отметим, что использование множества матриц вида $\dfrac{\mathbf{A}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}$ для представления кватернионов рассматривалось в [4].

Из выражения (3) можно получить необходимое и достаточное условие, при котором матрицы множества $\mathbf{I}_\alpha$ являются действительными. Для этого при действительных значениях p, q выражение под квадратным корнем должно быть неотрицательным, что требует выполнения нестрогого неравенства:

$$pq \le -1. \tag{5}$$

Для вырожденных мнимых матричных единиц справедливо утверждение.

Утверждение 2. Множество матриц $\mathbf{I}_\alpha$ не содержит в себе двух неравных и не противоположных, коммутирующих между собой элементов.

Доказательство. Для того чтобы две матрицы, принадлежащих множеству $\mathbf{I}_\alpha$: заданная — $\mathbf{I}_{\alpha 1} = \begin{bmatrix} \sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} & \dot{p} \\ \dot{q} & -\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} \end{bmatrix}$ и искомая — $\mathbf{I}_{\alpha 2} = \begin{bmatrix} \sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}} & \dot{x} \\ \dot{y} & -\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}} \end{bmatrix}$, коммутировали между собой ($\mathbf{I}_{\alpha 1}\mathbf{I}_{\alpha 2} = \mathbf{I}_{\alpha 2}\mathbf{I}_{\alpha 1}$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись алгебраические уравнения, формируемые путем сравнения элементов матриц-произведений $\mathbf{I}_{\alpha 1}\mathbf{I}_{\alpha 2}$ и $\mathbf{I}_{\alpha 2}\mathbf{I}_{\alpha 1}$:

$$\dot{q}\dot{x} = \dot{p}\dot{y}, \tag{6,а}$$

$$2\dot{p}\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}} - 2\dot{x}\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} = 0, \tag{6,б}$$

$$2\dot{q}\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}} - 2\dot{y}\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} = 0, \tag{6,в}$$

$$\dot{q}\dot{x} = \dot{p}\dot{y}. \tag{6,г}$$

Из уравнений (6,б) и (6,в) непосредственно следуют частные решения: при значении $\dot{p}=0$ имеем $\dot{x}=0$, $\dot{y}=\dot{q}$, а при значении $\dot{q}=0$ в свою очередь $\dot{y}=0$, $\dot{x}=\dot{p}$. Кроме того, как следует из анализируемой системы, уравнения (6,а) и (6,г) совпадают, а оставшиеся три уравнения являются зависимыми, поскольку элементарные преобразования уравнений (6,б) и (6,в) приводят к уравнению (6,а). В результате остаются два независимых уравнения, которые при заданных значениях $\dot{p}$, $\dot{q}$ позволяют получить значения $\dot{x}$, $\dot{y}$. Определяя в общем случае $\dot{x}$ из уравнения (6,а) и подставляя его значение $\dot{x} = \dfrac{\dot{p}\dot{y}}{\dot{q}}$ в уравнения (6,б), получим единственное решение $\dot{y}=\dot{q}$, которое влечет за собой $\dot{x}=\dot{p}$. Поэтому независимо от задаваемых значений $\dot{p}$, $\dot{q}$ единственным решением рассматриваемой системы уравнений (6) является решение $\dot{x} = \dot{p}$, $\dot{y} = \dot{q}$. Утверждение 2 доказано.

Таким образом, множество матриц $\mathbf{I}$, удовлетворяющих матричному уравнению (2), содержит в себе только одну матричную единицу $\mathbf{I}_м$, коммутирующую со всеми остальными матрицами множества $\mathbf{I}$, которыми являются матрицы $\mathbf{I}_\alpha$.

Комплексные числа

Комплексные числа, использование которых лежит в основе символического метода расчета цепей переменного тока [7], играют важнейшую роль в теории режимов электроэнергетических систем. Поэтому анализ возможных матричных представлений комплексных чисел создает предпосылки для повышения эффективности применяемых в рамках указанной теории математических моделей.

Каждая мнимая единица из бесконечного множества $\mathbf{I}$ формально может быть использована для представления комплексных чисел. Однако применение мнимой единицы $\mathbf{I}_м$, которая совместно с матричной единицей $\mathbf{1}$, приводит к представлению $a+bi \mapsto a\mathbf{1}+b\mathbf{I}_м = \begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a+bi \end{bmatrix}$, где a, b — действительные составляющие комплексных чисел, а $\mapsto$ — знак изоморфного отображения, можно рассматривать как тривиальное.

Поэтому рассмотрим представление комплексных чисел с использованием вырожденных мнимых единиц $\mathbf{I}_\alpha$. Учитывая выражение (3), получим матричное представление произвольного комплексного числа $a+bi$ в виде:

$$a+bi \mapsto a\mathbf{1}+b\mathbf{I}_\alpha = \begin{bmatrix} a+b\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} & b\dot{p} \\ b\dot{q} & a-b\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Величины $\dot{p}$, $\dot{q}$ в выражении (7) будем называть параметрами представления.

Как известно, биекция L между элементами числовых систем Γ_1 и Γ_2 является изоморфизмом, если выполняются два условия [3]:

$$L(a)+L(b) = L(a+b), \tag{8}$$

$$L(a)\times L(b) = L(a\times b), \tag{9}$$

где $a,b \in \Gamma_1$, $L(a), L(b) \in \Gamma_2$.

Можно показать, что представление комплексных чисел (7) удовлетворяет сформулированным условиям изоморфизма.

Рассмотрим частный случай представления комплексных чисел, соответствующий действительному значению параметра представления $q = -\dfrac{1}{p}$, $(p \in \mathrm{R}, p \neq 0)$. В этом случае соответствующая матрица множества $\mathbf{I}_\alpha$ зависит от одного параметра p и имеет вид

$$\mathbf{I}_{\alpha}^{i(p)} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -\dfrac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

а матричное представление комплексных чисел также зависит от параметра p и выглядит следующим образом: $a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a & bp \\ -b\dfrac{1}{p} & a \end{bmatrix}$. Поскольку $p \in R$, то все элементы матрицы в рассматриваемом представлении действительны. В результате имеем бесконечное множество представлений комплексных чисел действительными матрицами второго порядка. Обычно для представления комплексных чисел используется вырожденная мнимая единица (10), соответствующая значению $p = 1$. В этом случае матричное представление комплексных чисел является, возможно, наиболее удобным, поскольку $\mathbf{I}_{\alpha}^{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, а элементы соответствующей матрицы записываются как $a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Кватернионы

В задачах электроэнергетики кватернионы используются для решения проблем существования установившихся режимов, а также для определения предельных режимов и ввода режимов в область существования [8, 9].

Построение кватернионов связано с использованием трех мнимых единиц, каждая из которых удовлетворяет (1), и которые связаны между собой соотношением:

$$ij = k\,. \tag{11}$$

Отметим, что из выражений (1), (11) следуют все остальные правила умножения мнимых единиц кватернионов i, j, k между собой. Поэтому для того, чтобы найти на множестве $\mathbf{I}_{\alpha}$ триаду вырожденных мнимых матричных единиц, удовлетворяющих условию (11) достаточно решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} & \dot{p} \\ \dot{q} & -\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}} & \dot{x} \\ \dot{y} & -\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{-1-\dot{u}\dot{v}} & \dot{u} \\ \dot{v} & -\sqrt{-1-\dot{u}\dot{v}} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где неизвестными являются величины $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Матричное уравнение (12) позволяет построить два алгебраических уравнения:

$$\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}}+\dot{x}\dot{q}=-(\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}}+\dot{p}\dot{y}), \qquad (13,а)$$

$$\begin{gathered}\sqrt{-1-(\dot{x}\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}-\dot{p}\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}})(\dot{q}\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}}-\dot{y}\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}})}= \\ =\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}\sqrt{-1-\dot{x}\dot{y}}+\dot{p}\dot{y}.\end{gathered} \qquad (13,б)$$

Избавляясь от радикалов, уравнения (13,а), (13,б) можно преобразовать к виду:

$$\dot{q}^2\dot{x}^2-2(2+\dot{p}\dot{q})\dot{y}\dot{x}+\dot{p}^2\dot{y}^2-4\dot{p}\dot{q}-4=0, \qquad (14,а)$$

$$[\dot{q}^2\dot{x}^2-2(2+\dot{p}\dot{q})\dot{y}\dot{x}+\dot{p}^2\dot{y}^2-4\dot{p}\dot{q}-4][-(1+\dot{p}\dot{q})\dot{y}\dot{x}+\dot{p}\dot{q}-\dot{p}^2\dot{y}^2+1]=0. \qquad (14,б)$$

Как следует из приведенных выражений, уравнение (14,б) представляет собой произведение двух полиномов, одним из которых является квадратный трехчлен в левой части уравнения (14,а). Поэтому система алгебраических уравнений (14) является недоопределенной и, по сути, сводится к одному квадратному уравнению (14,а), для решения которого одну из неизвестных величин (например $\dot{y}$) необходимо задать. Отметим, что переход от уравнения в радикалах (13,а) к квадратному уравнению (14,а) может сопровождаться появлением дополнительных корней. Поэтому полученные решения необходимо проверять, используя уравнения (12) или (13,а).

Таким образом, используя описанный подход, для любой матрицы множества $\mathbf{I}_\alpha$, характеризующийся значениями $\dot{p}$, $\dot{q}$, можно получить бесконечное число вырожденных мнимых матричных единиц, удовлетворяющих соотношению (12), что в свою очередь приводит к бесконечному числу триад матричного базиса для представления кватернионов комплексными матрицами второго порядка. Отметим, что на бесконечное количество представлений кватернионов комплексными матрицами 2×2 указывалось в [4].

Анализ уравнения (14,а) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3. Не существует триады действительных вырожденных мнимых матричных единиц, удовлетворяющих соотношению (12).

Доказательство. Для того чтобы заданная и искомая матрицы множества $\mathbf{I}_\alpha$ были действительными, параметры p, q и y также должны быть действительными. В этом случае дискриминант квадратного уравнения (14,а) соответствует выражению:

$$(4y+2ypq)^2-4q^2(p^2y^2-4pq-4)=16(1+pq)(y^2+q^2).$$

Как следует из полученного выражения, анализируемый дискриминант может быть положительным только в том случае, если для сочетания действительных параметров p, q заданной матрицы множества $\mathbf{I}_\alpha$ не выполняется условие действительности диагональных элементов (5), т.е. в случае, когда $pq>-1$. Если же условие (5) выполняется, то рассматриваемый дискриминант становится неположительным. Это приводит к комплексному значению параметра $\dot{x}$ при значениях

$pq < -1$, или к действительному значению $x = \frac{y}{q^2}$ при $pq = -1$. Однако в последнем случае условие действительности (5) не выполняется уже для параметров x, y, поскольку $xy = \frac{y^2}{q^2} > -1$. Утверждение 3 доказано.

Отметим, что необходимость решения алгебраического уравнения в процессе выделения из множества $\mathbf{I}_\alpha$ конкретной триады вырожденных мнимых матричных единиц затрудняет анализ матричных представлений кватернионов в общем виде. Поэтому рассмотрим частный случай. Для введенной выше (10) вырожденной мнимой матричной единицы $\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}$ $\left(q = -\frac{1}{p}\right)$ квадратное уравнение (14,а) преобразуется к квадратному уравнению $\dot{x}^2 - 2p^2\dot{y}\dot{x} + p^4\dot{y}^2 = 0$, имеющему одно решение $\dot{x} = p^2\dot{y}$. Задаваясь значением $\dot{y} = i\frac{1}{p}$, которому соответствует значение $\dot{x} = ip$, получим триаду вырожденных мнимых единиц:

$$\mathbf{I}_\alpha^{i(p)} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -\frac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_\alpha^{j(p)} = \begin{bmatrix} 0 & ip \\ i\frac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_\alpha^{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Теперь, используя $\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}$, $\mathbf{I}_\alpha^{j(p)}$, $\mathbf{I}_a^{k}$ совместно с матричной единицей $\mathbf{1}$, получим зависящее от параметра p матричное представление кватернионов

$$a + ib + jc + kd \mapsto 1a + \mathbf{I}_\alpha^{i(p)}b + \mathbf{I}_\alpha^{j(p)}c + \mathbf{I}_\alpha^{k}d = \\ = \begin{bmatrix} a+id & p(b+ic) \\ -\frac{1}{p}(b-ic) & a-id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}^{кв} & p\dot{B}^{кв} \\ -\frac{1}{p}\hat{B}^{кв} & \hat{A}^{кв} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

удовлетворяющее условиям изоморфизма (8), (9).

Принимая в (15) значение параметра представления кватернионов $p = 1$, получим широко известную триаду вырожденных мнимых матричных единиц $\mathbf{I}_\alpha^{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_\alpha^{j} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_\alpha^{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, которые, совместно с матричной единицей приводят к известному представлению кватернионов:

$$a + ib + jc + kd \mapsto \mathbf{1}a + \mathbf{I}_\alpha^{i}b + \mathbf{I}_\alpha^{j}c + \mathbf{I}_\alpha^{k}d = \begin{bmatrix} a+id & b+ic \\ -b+ic & a-id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}^{кв} & \dot{B}^{кв} \\ -\hat{B}^{кв} & \hat{A}^{кв} \end{bmatrix}.$$

Квадриплексные (бикомплексные) числа

Наряду с кватернионами квадриплексные числа также используются для анализа существования установившихся режимов электроэнергетических систем и определения предельных значений режимных характеристик [9–11].

Как известно [2], для построения квадриплексных чисел в качестве базисных единиц используются обычная единица и две коммутирующих между собой мнимых единицы. При этом четвертой базисной единицей, квадрат которой равняется обычной единице, является произведение мнимых единиц. В наиболее общем случае базисными матричными единицами для представления квадриплексных чисел могут быть $\mathbf{1}$, $\mathbf{I}_\alpha$, $\mathbf{I}_м$, $\mathbf{I}_\alpha\mathbf{I}_м$, что в результате приводит к зависящему от значений параметров $\dot{p}$ и $\dot{q}$, изоморфному матричному представлению квадриплексных чисел:

$$a+ib+jc+ijd \mapsto \mathbf{1}a+\mathbf{I}_\alpha b+\mathbf{I}_м c+\mathbf{I}_\alpha\mathbf{I}_м d =$$
$$=\begin{bmatrix} a+b\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}+i(c+d\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}) & \dot{p}(b+id) \\ \dot{q}(b+id) & a-b\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}+i(c-d\sqrt{-1-\dot{p}\dot{q}}) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Определитель матричного представления (17) вычисляется в соответствии с выражением:

$$\det\dot{\mathbf{M}}_б = a^2+b^2-c^2-d^2+i2(ac+bd).$$

Произведение рассматриваемого определителя на его сопряженное значение является неотрицательным полиномом четвертой степени

$$P^{кд} = a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2+8abcd$$

и представляет собой четвертую степень модуля квадриплексного числа [12].

Рассмотрим ряд матричных представлений квадриплексных чисел, являющихся частными случаями (17). Так, используя в качестве $\mathbf{I}_м$ вырожденные мнимые матричные единицы $\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}$, $\mathbf{I}_\alpha^{j(p)}$, $\mathbf{I}_\alpha^{k}$ (15) получим три матричных представлений квадриплексных чисел.

1. $\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{I}_\alpha^{i(p)} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -\dfrac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_м = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}\mathbf{I}_м = \begin{bmatrix} 0 & ip \\ -i\dfrac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}$. В этом случае матричное представление квадриплексных чисел формируется следующим образом:

$$a+ib+jc+ijd \mapsto \mathbf{1}a+\mathbf{I}_\alpha^{i(p)} b+\mathbf{I}_м c+\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}\mathbf{I}_м d =$$
$$=\begin{bmatrix} a+ic & p(b+id) \\ -\dfrac{1}{p}(b+id) & a+ic \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_1^{кд} & p\dot{B}_1^{кд} \\ -\dfrac{1}{p}\dot{B}_1^{кд} & \dot{A}_1^{кд} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Указанное представление при значении параметра $p=1$ рассматривалось в [6].

2. $\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{I}_\alpha^{j(p)} = \begin{bmatrix} 0 & ip \\ i\dfrac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_м = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_\alpha^{j(p)}\mathbf{I}_м = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ -\dfrac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}$. Рассматриваемое сочетание мнимых матричных единиц приводит к представлению квадриплексных чисел:

$$a+ib+jc+ijd \mapsto \mathbf{1}a + \mathbf{I}_\alpha^{j(p)}b + \mathbf{I}_м c + \mathbf{I}_\alpha^{j(p)}\mathbf{I}_м d = \\ = \begin{bmatrix} a+ic & p(-d+ib) \\ \dfrac{1}{p}(-d+ib) & a+ic \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_2^{кд} & p\dot{B}_2^{кд} \\ \dfrac{1}{p}\dot{B}_2^{кд} & \dot{A}_2^{кд} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

3. $\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{I}_\alpha^{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_м = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_\alpha^{k}\mathbf{I}_м = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. В этом случае матричное представление квадриплексных чисел имеет вид:

$$a+ib+jc+ijd \mapsto \mathbf{1}a + \mathbf{I}_\alpha^{k(p)}b + \mathbf{I}_м c + \mathbf{I}_\alpha^{k}\mathbf{I}_м d = \\ = \begin{bmatrix} a-d+i(b+c) & 0 \\ 0 & a+d-i(b-c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_3^{кд} & 0 \\ 0 & \dot{B}_3^{кд} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Как следует из приведенного выражения, в отличие от анализируемых выше матричных представлений квадриплексных чисел (18) и (19), матричное представление (20) представляет собой диагональную комплексную матрицу. При этом два комплексных числа, образующих матричное представление (20), конструируются не из составляющих квадриплексного числа, а вычисляются путем применения к ним простых операций сложения и вычитания. Таким образом, матричное представление (20), по сути, устанавливает связь между квадриплексными числами и прямой суммой двух систем комплексных чисел $a+ib+jc+ijd \mapsto C_1 \oplus C_2$. Иногда именно рассматриваемую прямую сумму двух систем комплексных чисел называют бикомплексными числами, подчеркивая при этом их изоморфизм по отношению к системе квадриплексных чисел [13].

Действительные составляющие $A_3'^{кд}$, $A_3''^{кд}$, $B_3'^{кд}$, $B_3''^{кд}$ комплексных чисел $\dot{A}_3^{кд}$, $\dot{B}_3^{кд}$ и действительные составляющие квадриплексного числа в выражении (20) связаны простыми формулами

$$A_3'^{кд} = a-d\,,\ A_3''^{кд} = b+c\,,\ B_3'^{кд} = a+d\,,\ B_3''^{кд} = -b+c\,, \tag{21}$$

$$a = \frac{A_3'^{кд} + B_3'^{кд}}{2},\ b = \frac{A_3''^{кд} - B_3''^{кд}}{2},\ c = \frac{A_3''^{кд} + B_3''^{кд}}{2},\ d = \frac{-A_3'^{кд} + B_3'^{кд}}{2}, \tag{22}$$

которые устанавливают взаимно-однозначное соответствие между квадриплексными числами и диагональными комплексными матрицами второго порядка. Фактически соотношения (21) преобразуют квадриплексное число к двум независимым между собой комплексным числам, а соотношения (22) восстанавливают из двух независимых комплексных чисел соответствующее им квадриплексное число. Отметим также, что комплексное число и его сопряженное значение всегда восстанавливаются к комплексному числу, как частному случаю квадриплексного числа $(c=0\,, d=0)$ [14]. Рассмотренная особенность представления квадриплексных чисел позволяет упростить работу с квадриплексными числами, используя вместо алгебраических операций над квадриплексными числами соответствующие алгебраические операции над отдельными комплексными числами.

Бикватернионы

Построение бикватернионов основано на алгебраическом расширении (удвоении) кватернионов с использованием мнимой единицы, которая коммутирует с тремя мнимыми единицами алгебры кватернионов. Поэтому для представления бикватернионов комплексными матрицами второго порядка может быть взята любая триада из бесконечного множества триад вырожденных мнимых матричных единиц, удовлетворяющих (12), и мнимая матричная единица $\mathbf{I}_м$. В частности, если в качестве триады вырожденных мнимых матричных единиц принять рассмотренные выше $\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}$, $\mathbf{I}_\alpha^{j(p)}$, $\mathbf{I}_\alpha^{k}$ (15), получим изоморфное представление бикватерниона в виде:

$$a+ib+jc+kd+i_1e+ii_1f+ji_1g+ki_1h \mapsto$$
$$\mapsto \mathbf{1}a+\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}b+\mathbf{I}_\alpha^{j(p)}c+\mathbf{I}_\alpha^{k}d+\mathbf{I}_м e+\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}\mathbf{I}_м f+\mathbf{I}_\alpha^{j(p)}\mathbf{I}_м g+\mathbf{I}_\alpha^{k}\mathbf{I}_м h\,.$$

С учетом (4) и (15) имеем: $\mathbf{I}_\alpha^{i(p)}\mathbf{I}_м=\begin{bmatrix}0 & ip\\ -i\dfrac{1}{p} & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_\alpha^{j(p)}\mathbf{I}_м=\begin{bmatrix}0 & -p\\ -\dfrac{1}{p} & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_\alpha^{k(p)}\mathbf{I}_м=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Поэтому

$$a+ib+jc+kd+i_1e+ii_1f+ji_1g+ki_1h \mapsto$$
$$\mapsto \begin{bmatrix} a-h+i(d+e) & p[(b-g)+i(c+f)] \\ -\dfrac{1}{p}[(b+g)+i(-c+f)] & a+h+i(-d+e)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{A}_1^{бк} & p\dot{C}_1^{бк}\\ -\dfrac{1}{p}\dot{D}_1^{бк} & \dot{B}_1^{бк}\end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Как следует из выражения (23), произвольную комплексную матрицу второго порядка можно рассматривать как матричное представление бикватерниона. При этом действительные составляющие комплексных элементов матрицы и действительные составляющие бикватерниона связаны между собой прямыми и обратными соотношениями, свидетельствующими о взаимно-однозначном соответствии между бикватернионом и комплексной матрицей для выбранной триады кватернионных вырожденных мнимых единиц:

$$A_1'^{бк} = a - h\,,\; A_1''^{бк} = d + e\,,\; B_1'^{бк} = a + h\,,\; B_1''^{бк} = -d + e\,,$$
$$C_1'^{бк} = b - g\,,\; C_1''^{бк} = c + f\,,\; D_1'^{бк} = b + g\,,\; D_1''^{бк} = -c + f\,. \tag{24}$$

$$a = \frac{A_1'^{бк} + B_1'^{бк}}{2},\; b = \frac{C_1'^{бк} + D_1'^{бк}}{2},\; c = \frac{C_1''^{бк} - D_1''^{бк}}{2},\; d = \frac{A_1''^{бк} - B_1''^{бк}}{2},$$
$$e = \frac{A_1''^{бк} + B_1''^{бк}}{2},\; f = \frac{C_1''^{бк} + D_1''^{бк}}{2},\; g = \frac{-C_1'^{бк} + D_1'^{бк}}{2},\; h = \frac{-A_1'^{бк} + B_1'^{бк}}{2}. \tag{25}$$

По аналогии с квадриплексными числами для бикватернионов можно найти неотрицательный полином четвертой степени как произведение определителя матрицы в выражении (23) на его сопряженное значение:

$$\begin{aligned}P^{бк} = {} & \det(\dot{\mathbf{M}}_1^{бк})\det(\hat{\mathbf{M}}_1^{бк}) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + f^4 + g^4 + h^4 + \\ & +2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2a^2e^2 - 2a^2f^2 - 2a^2g^2 - 2a^2h^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 - 2b^2e^2 + 2b^2f^2 - \\ & -2b^2g^2 - 2b^2h^2 + 2c^2d^2 - 2c^2e^2 - 2c^2f^2 + 2c^2g^2 - 2c^2h^2 - 2d^2e^2 - 2d^2f^2 - 2d^2g^2 + 2d^2h^2 + \\ & +2e^2f^2 + 2e^2g^2 + 2e^2h^2 + 2f^2g^2 + 2f^2h^2 + 2g^2h^2 + \\ & +8abef + 8aceg + 8adeh + 8bcfd + 8bdfh + 8cdgh\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Указанный полином можно рассматривать как четвертую степень нормы бикватерниона.

В заключение рассмотрим еще одну триаду вырожденных мнимых единиц. Задавая значения $\dot{p} = \dot{q} = -i$, а также $\dot{y} = 1$ для определения коэффициентов квадратного уравнения (14,а), получим одно решение $\dot{x} = -1$, что приводит к трем вырожденным мнимым единицам $\mathbf{I}_{\alpha}^{i\_K} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_{\alpha}^{j\_K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_{\alpha}^{k\_K} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, называемым в литературе матрицами Кэли. С учетом мнимой матричной единицы $\mathbf{I}_{м}$ остальные элементы матричного базиса бикватерниона выглядят следующим образом $\mathbf{I}_{\alpha}^{i\_K}\mathbf{I}_{м} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_{\alpha}^{j\_K}\mathbf{I}_{м} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_{\alpha}^{k\_K}\mathbf{I}_{м} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и представляют собой матрицы Паули. В этом случае представление бикватерниона выглядит следующим образом:

$$a + ib + jc + kd + i_1e + ii_1f + ji_1g + ki_1h \mapsto$$
$$\mapsto \begin{bmatrix} a + h + i(-d + e) & -c + f - i(b + g) \\ -[-c - f + i(b - g)] & a - h + i(d + e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_2^{бк} & \dot{C}_2^{бк} \\ -\dot{D}_2^{бк} & \dot{B}_2^{бк} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{B}_1^{бк} & -i\dot{D}_1^{бк} \\ -i\dot{C}_1^{бк} & \dot{A}_1^{бк} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Представлению бикватерниона (27) соответствует уже другая комплексная матрица и другие соотношения между действительными составляющими бикватерниона и действительными составляющими матриц $\dot{A}_2^{бк}$, $\dot{B}_2^{бк}$, $\dot{C}_2^{бк}$, $\dot{D}_2^{бк}$. Однако произведение определителя указанной матрицы на его сопряженное значение позволяет получить то же самое выражение для полинома (26), являющегося четвертой степенью нормы бикватерниона. Таким образом, каждой триаде вырожденных мнимых кватернионных единиц, используемой для матричного представления бикватерниона, соответствуют свои правила перехода к комплексным элементам матрицы и обратно. Тем не менее, для какой-то конкретно выбранной триады всегда можно говорить о взаимно-однозначном соответствии бикватернионов и комплексных матриц второго порядка. Следует отметить, что взаимосвязь бикватернионов и комплексных матриц второго порядка в рамках представления (27) рассматривалось в [5].

Выводы

1. Рассмотренное множество мнимых матричных единиц $\mathbf{I}$, включающее в себя коммутирующую со всеми элементами множества мнимую единицу $\mathbf{I}_м$ и не коммутирующие между собой вырожденные мнимые единицы $\mathbf{I}_\alpha$, позволяет естественным образом конструировать матричные базисы для изоморфных представлений ассоциативных числовых систем матрицами второго порядка, не прибегая к аксиоматическому определению операции умножения мнимых единиц.

2. Использование обобщенных матричных представлений рассмотренных гиперкомплексных чисел создает предпосылки для поиска наиболее эффективных вычислительных алгоритмов в математическом моделировании задач теории установившихся режимов электроэнергетических систем.

1. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Мир, 1984. — 144 с.

2. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

3. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.

4. *Ефремов А.П.* Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории / А.П. Ефремов // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — № 1. — С. 111–127.

5. *Каратаев Е.А.* Элементарные функции матриц / Е.А. Каратаев // Математика. – 2001. (http://karataev.nm.ru/emf/index.html).

6. *Щербина Ю.В.* Использование квазикомплексных векторов для исследования существования установившихся режимов электрических систем / Ю.В. Щербина, С.И. Клипков // Электронное моделирование. — 1987. — № 1. — С. 54–56.

7. *Поливанов К.М.* Теоретические основы электротехники / К.М. Поливанов. Т. 1. — М.: Энергия, 1972. — 240 с.

8. *Щербина Ю.В.* Об одном методе исследования существования установившихся режимов электрических систем / Ю.В. Щербина, А.В. Задерей, С.И. Клипков // Электронное моделирование. — 1984. — № 5. — С. 61–64.

9. *Клипков С.И.* Использование гиперкомплексных числовых систем для математического моделирования предельных режимов электрических систем / С.И. Клипков // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2012. — Т. 14, № 4. — С. 11–23.

10. *Конторович А.М.* Решение уравнений установившихся режимов электрических систем без разделения на вещественные и мнимые составляющие / А.М. Конторович // Тр. Ленинградского политехнического института. — 1984. — № 399. — С. 3–9.

11. *Chiba Fumihiko.* Расчет потокораспределения методом Ньютона-Рафсона на основе обобщенной плоскости комплексных чисел / Chiba Fumihiko, Tanaka Eiichi, Nishiya Ken-ichi, Hasegawa Jun // Дэнки раккай ромбунси. B = Trans. Inst. Elec. Eng. Jap. B. — 1991. — **111**, № 3. — С. 252–258.

12. *Клипков С.И.* О новом подходе к построению гиперкомплексных числовых систем ранга два над полем комплексных чисел / С.И. Клипков // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 1. — С. 130–139.

13. *Калиновский Я.А.* Исследования свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 1. — С. 69–73.

14. *Клипков С.И.* Комплексные модификации уравнений установившегося режима электрических систем и их решение методом Ньютона / С.И. Клипков // Новини енергетики. — 2008. — № 9. — С. 41–48.

Поступила в редакцию 19.05.2014