



УДК 539.3

Д. М. Ли́ла, академик НАН Украины А. А. Мартынюк

Потеря устойчивости вращающегося упругопластического плоского диска с убывающим радиусом

При исследовании методом малого параметра возможной потери устойчивости кругового диска установлена зависимость между критической скоростью вращения и переменным радиусом контурной окружности. На основании условия текучести Сен-Венана получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах системы.

Решение задачи об устойчивости вращающегося диска при радиальном растяжении объемными силами предполагает определение критической угловой скорости [1, 2]. Для этого на основе линеаризованных по малому параметру краевых условий в напряжениях [3, 4] нужно построить характеристическое уравнение [5] относительно критического радиуса пластической зоны диска [6]. Связь между радиусом пластической области и скоростью вращения устанавливается сопряжением решений уравнения квазистатического равновесия [7] для основного напряженного состояния на неизвестной упругопластической границе. Возмущенное состояние в упругой зоне диска определяется по функциям напряжения [8] в зависимости от вида возмущения геометрических краевых условий (контурной окружности). Если предположить, что радиус контурной окружности уменьшается (например, вследствие горения края диска, коррозионных процессов, кавитационных повреждений или абляции контура диска при воздействии лазерного излучения и пр.), то интерес будет представлять влияние появляющейся разгрузки на сохранение устойчивости диска. При этом актуальным является получение условий потери устойчивости вращающегося диска в зависимости от соотношения между критической скоростью и убывающим радиусом контурной окружности.

Постановка задачи. Рассматривается однородный и изотропный плоский сплошной или кольцевой диск. Текущий радиус его контурной окружности равен b , где $b \in (a, b_0]$, b_0 — начальный радиус контурной окружности диска, a — внутренний радиус кольцевого диска (рис. 1). Предел текучести материала диска обозначен σ_s , модуль упругости — E , плотность — γ , коэффициент Пуассона — ν . Постоянная угловая скорость вращения равна ω ,

© Д. М. Ли́ла, А. А. Мартынюк, 2014

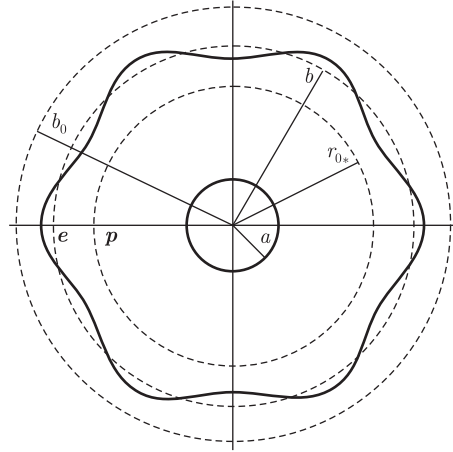


Рис. 1

текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска — r_0 . Предмет исследования составляет критическая угловая скорость ω_* как функция радиуса b . Потеря устойчивости диска соответствует уравнению внешней его границы (с точностью до бесконечно малых первого порядка)

$$r = b + d \cos n\theta, \quad d = \text{const}, \quad n \in \mathbb{N},$$

или

$$\rho = \varphi + \delta \cos n\theta,$$

где $\rho = r/b_0$ — безразмерный текущий радиус; $\varphi = b/b_0$; δ — малый параметр; θ — полярный угол.

Материал диска с условием текучести $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$ не обладает упрочнением.

Анализ сплошного диска. Из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{b_0^2}r, \quad \sigma = \gamma b_0^2 \omega^2, \quad (1)$$

с учетом условия в центре диска $\sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0)$ и условия текучести невозмущенное напряженное состояние в пластической зоне получаем в виде

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s, \quad \sigma_{rr} = \sigma_s - \frac{\sigma}{3b_0^2}r^2. \quad (2)$$

С использованием уравнений связи между напряжениями и перемещениями [4, 7] на основании уравнения (1) напряженное состояние упругой области определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= C \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma(\nu+3)}{8} \varphi^2 - \frac{\sigma(3\nu+1)}{8} \frac{r^2}{b_0^2}, \\ \sigma_{rr} &= C \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma(\nu+3)}{8} \varphi^2 - \frac{\sigma(\nu+3)}{8} \frac{r^2}{b_0^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Сопряжение решений (2) и (3) на упругопластической границе $\rho = \beta_0 := r_0/b_0$ позволяет конкретизировать выражения для напряжений (3), отнесенных к σ_s :

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{0e} &= c(1 + \varphi^2 \rho^{-2}) + 3y((\nu + 3)\varphi^2 - (3\nu + 1)\rho^2), \\ \sigma_{rr}^{0e} &= c(1 - \varphi^2 \rho^{-2}) + 3y(\nu + 3)(\varphi^2 - \rho^2),\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}c &:= \frac{C}{\sigma_s} = (3\nu + 1)\frac{\beta_0^4}{\tau}, & y &:= \frac{\omega^2}{24q^2} = \frac{\varphi^2}{\tau}, \\ \tau &= 3(\nu + 3)\varphi^4 - (3\nu + 1)(2\varphi^2 - \beta_0^2)\beta_0^2, & q &= b_0^{-1}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}A_1 &:= \frac{d\sigma_{rr}^{0e}(\varphi)}{d\rho} = \varphi^{-1} \frac{2(3\nu + 1)(\beta_0/\varphi)^4 - 6(\nu + 3)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - (\beta_0/\varphi)^2)(\beta_0/\varphi)^2}, \\ A_2 &:= \sigma_{\theta\theta}^{0e}(\varphi) - \sigma_{rr}^{0e}(\varphi) = \frac{2(3\nu + 1)(\beta_0/\varphi)^4 + 6(1 - \nu)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - (\beta_0/\varphi)^2)(\beta_0/\varphi)^2}.\end{aligned}\quad (5)$$

С учетом общего вида возмущенного напряженно-деформированного состояния упругой зоны диска начального радиуса b_0 [8, 9] (например, при $n \in \{2, 3, \dots\}$), а также введенных обозначений ρ и φ безразмерные возмущения первого порядка малости компонент напряжения и радиального смещения могут быть представлены так:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{te} &= \left(nA \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{n-2} + nB \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n-2} + (n-2)C \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^n + (n+2)D \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n} \right) \cos n\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{te} &= \left(-nA \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{n-2} - nB \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n-2} - (n+2)C \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^n - (n-2)D \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n} \right) \cos n\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{te} &= \left(-nA \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{n-2} + nB \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n-2} - nC \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^n + nD \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n} \right) \sin n\theta, \\ u^{te} &= \varphi \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{(\nu+1)n}{n-1} A \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{n-1} - \frac{(\nu+1)n}{n+1} B \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n-1} + \frac{n-2+\nu(n+2)}{n+1} C \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{n+1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n+2+\nu(n-2)}{n-1} D \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^{-n+1} \right) \cos n\theta.\end{aligned}\quad (6)$$

Поскольку претерпевает изменения также вид граничных условий и условий сопряжения в напряжениях [3, 4]

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{te} + \frac{d\sigma_{rr}^{0e}}{d\rho} u^{te} &= 0, & \sigma_{r\theta}^{te} - \varphi^{-1}(\sigma_{\theta\theta}^{0e} - \sigma_{rr}^{0e}) \frac{du^{te}}{d\theta} &= 0 & \text{при} & \quad \rho = \varphi, \\ \sigma_{rr}^{te} &= 0, & \sigma_{r\theta}^{te} &= 0 & \text{при} & \quad \rho = \beta_0,\end{aligned}\quad (7)$$

опираясь на выражения (5) и (6), характеристическое уравнение в исследуемом случае получаем в виде

$$\Delta \left(\frac{\beta_0}{\varphi} \right) = 0, \quad (8)$$

где $\Delta(\beta_0) = 0$ — характеристическое уравнение для диска с неизменным радиусом контурной окружности [9]. Последнее уравнение имеет корни β_{0*} [2, 9], зависящие для данного диска от натурального параметра n . Они совпадают с решениями характеристического уравнения (8). Отсюда с использованием формулы (4) для y сразу же получаем искомую зависимость критической угловой скорости от переменного радиуса контурной окружности диска

$$\frac{\omega_*}{q} = \frac{k}{\varphi}, \quad (9)$$

где $k = 2\sqrt{6}/\sqrt{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_{0*}^2)\beta_{0*}^2}$.

При $n = 1$, т. е. при рассмотрении эксцентричной формы потери устойчивости, функцию (9) следует взять с коэффициентом $k = 2\sqrt{2}/\sqrt{\nu+3}$ [10].

Анализ кольцевого диска. Рассмотрим вначале диск, свободный от контурных усилий. В этом случае в пластической зоне вместо (2) используются зависимости

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s, \quad \sigma_{rr} = \sigma_s - \frac{\sigma}{3b_0^2}r^2 + \left(-\sigma_s + \frac{\sigma a^2}{3b_0^2}\right)\frac{a}{r}. \quad (10)$$

При сопряжении решений (10) и (3) получаем соотношения вида (4) с

$$c = \frac{(3\nu+1)\beta_0^4 - 4\beta^3\beta_0 + 1,5\beta\beta_0((\nu+3)\varphi^2 - (3\nu+1)\beta_0^2)}{\tau},$$

$$y = \frac{\varphi^2 - 0,5\beta\beta_0^{-1}(\varphi^2 + \beta_0^2)}{\tau},$$

$$\tau = 3(\nu+3)\varphi^4 - (3\nu+1)(2\varphi^2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(\varphi^2 + \beta_0^2), \quad \beta = \frac{a}{b_0}. \quad (11)$$

Поэтому теперь (см. (5))

$$A_1 = \varphi^{-1}T^{-1} \left\{ 2(3\nu+1) \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^4 - 8 \left[\frac{\beta}{\varphi} \right]^3 \frac{\beta_0}{\varphi} + 3 \frac{\beta}{\varphi} \frac{\beta_0}{\varphi} \left(\nu+3 - (3\nu+1) \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^2 \right) - \right.$$

$$\left. - 3(\nu+3) \left(2 - \frac{\beta}{\varphi} \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^{-1} \left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^2 \right) \right) \right\}, \quad (12)$$

$$A_2 = T^{-1} \left\{ 2(3\nu+1) \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^4 - 8 \left[\frac{\beta}{\varphi} \right]^3 \frac{\beta_0}{\varphi} + 3 \frac{\beta}{\varphi} \frac{\beta_0}{\varphi} \left(\nu+3 - (3\nu+1) \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^2 \right) + \right.$$

$$\left. + 3(1-\nu) \left(2 - \frac{\beta}{\varphi} \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^{-1} \left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^2 \right) \right) \right\},$$

где

$$T = 3(\nu+3) - (3\nu+1) \left(2 - \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^2 \right) \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^2 - 4 \left[\frac{\beta}{\varphi} \right]^3 \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^{-1} \left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi} \right]^2 \right).$$

Характеристическое уравнение относительно β_0/φ

$$\tilde{\Delta} \left(\frac{\beta_0}{\varphi}, \frac{\beta}{\varphi} \right) = 0, \quad (13)$$

построенное на основе (6), (7), (12), является уравнением с параметром β/φ . Присваивая φ произвольные значения с промежутка $(\beta, 1]$, находим соответствующие решения $\beta_0/\varphi = \beta_{0*}$ уравнения (13). Это позволяет получить относительную критическую скорость в зависимости от φ , полагая в (11) $\beta_0 = \varphi\beta_{0*}$.

Далее предположим, что кольцевой диск с уменьшающимся радиусом контурной окружности испытывает на внутреннем контуре дополнительное радиальное давление [10, 11]

$$p = \frac{1}{3}\gamma\omega^2 \frac{b^3 - a^3}{a}.$$

Сопряжение решений

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s, \quad \sigma_{rr} = \sigma_s - \frac{\sigma}{3b_0^2}r^2 + \left(-p - \sigma_s + \frac{\sigma a^2}{3b_0^2}\right)\frac{a}{r}$$

с решениями (3) при $r = r_0$ приводит к следующим аналогам (11) и (12):

$$\begin{aligned} y &= \varphi^{-2}T^{-1}\left(1 - 0,5\xi\frac{\beta}{\varphi}\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^{-1}\left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right)\right), \\ A_1 &= \varphi^{-1}T^{-1}\left\{2(3\nu + 1)\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^4 - 8\left[\frac{\beta}{\varphi}\right]^3\frac{\beta_0}{\varphi} + 3\xi\frac{\beta}{\varphi}\frac{\beta_0}{\varphi}\left(\nu + 3 - (3\nu + 1)\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right) - \right. \\ &\quad \left. - 3(\nu + 3)\left(2 - \xi\frac{\beta}{\varphi}\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^{-1}\left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right)\right)\right\}, \\ A_2 &= T^{-1}\left\{2(3\nu + 1)\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^4 - 8\left[\frac{\beta}{\varphi}\right]^3\frac{\beta_0}{\varphi} + 3\xi\frac{\beta}{\varphi}\frac{\beta_0}{\varphi}\left(\nu + 3 - (3\nu + 1)\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right) + \right. \\ &\quad \left. + 3(1 - \nu)\left(2 - \xi\frac{\beta}{\varphi}\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^{-1}\left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right)\right)\right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \left\{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)\left(2 - \left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right)\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2 - 4\left[\frac{\beta}{\varphi}\right]^3\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^{-1}\left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right) + \right. \\ &\quad \left. + 8\left[\frac{\beta}{\varphi}\right]^{-1}\left(1 - \left[\frac{\beta}{\varphi}\right]^3\right)\right\}\left\{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)\left(2 - \left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right)\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4\left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^{-1}\left(1 - 2\left[\frac{\beta}{\varphi}\right]^3\right)\left(1 + \left[\frac{\beta_0}{\varphi}\right]^2\right)\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, характеристическое уравнение (13) приобретает несколько иной вид, учитывающий влияние внутреннего давления на скорость движения упругопластической границы. По предположению, это еще больше, чем в случае кольцевого диска, свободного от контурных усилий, нарушает характер обратной пропорциональности (9).

Числовые примеры и обсуждение результатов. В справедливости последнего предположения нетрудно убедиться, если рассматривать в каждом из трех изученных случаев диски одинакового начального радиуса из одного и того же материала. На рис. 2

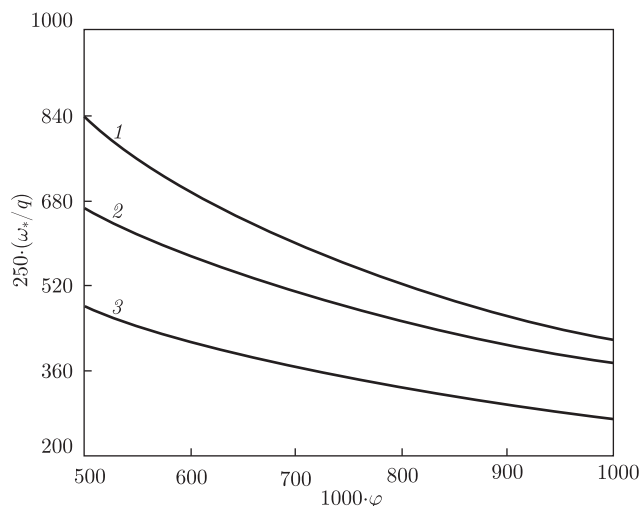


Рис. 2

представлены графики искомых зависимостей относительной критической скорости ω_*/q от уменьшающегося радиуса контурной окружности φ , $\varphi \in [0,5; 1]$, для сплошного и кольцевого ($\beta = 0,2$) плоских дисков с параметрами $n = 2$, $\nu = 0,5$, $\sigma_s/E = 0,01$ (для сплошного диска (кривая 1), кольцевого диска, свободного от контурных усилий (кривая 2), кольцевого диска, находящегося под действием дополнительного внутреннего радиального давления (кривая 3)). По виду графиков понятно, что появляющаяся с уменьшением радиуса диска разгрузка способствует сохранению его устойчивости. При существенном уменьшении радиуса контурной окружности критическая скорость может возрасти тоже существенно. При этом для любого φ наиболее устойчив сплошной диск, а наименее устойчив — нагруженный кольцевой диск. По мере уменьшения наружного радиуса диска разность значений критической скорости увеличивается в пользу сплошного диска. Наиболее сильно отклоняется от обратной пропорциональности зависимость $\omega_*/q(\varphi)$ для нагруженного дополнительным внутренним давлением кольцевого диска.

1. *Ивлев Д. Д.* О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. ОТН. — 1957. — № 1. — С. 141–144.
2. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д.* О потере устойчивости вращающихся дисков // Там же. — 1958. — № 1. — С. 124–125.
3. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. — Москва: Наука, 1978. — 208 с.
4. *Гузь А. Н., Немчиш Ю. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. — Киев: Выща шк., 1989. — 352 с.
5. *Гузь А. Н., Бабич И. Ю.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. — Киев: Наук. думка, 1985. — 280 с.
6. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. — Москва: Высш. шк., 1969. — 608 с.
7. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 2. — Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1952. — 640 с.
8. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 1. — Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. — 900 с.
9. *Лыла Д. М., Мартынюк А. А.* О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска // Доп. НАН України. — 2011. — № 1. — С. 44–51.
10. *Лыла Д. М.* Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска // Там само. — 2011. — № 2. — С. 49–53.

11. Lila D. M., Martynyuk A. A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, No 2. – P. 224–233.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 15.04.2013

Д. М. Ли́ла, академік НАН України А. А. Марти́нюк

**Втрата стійкості пружнопластичного плоского диска,
що обертається, зі спадним радіусом**

При дослідженні методом малого параметра можливої втрати стійкості кругового диска встановлено залежність між критичною швидкістю обертання та змінним радіусом контурного кола. На підставі умови текучості Сен-Венана одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах системи.

D. M. Lila, Academician of the NAS of Ukraine A. A. Martynyuk

**The loss of stability of a rotating resilient plastic plane disk with
decreasing radius**

The dependence of the critical speed of rotation on the variable radius of a contour circle is determined by means of the small parameter method. Proceeding from the Saint-Venant condition of fluidity, we obtain the characteristic equation for the critical radius of a plastic zone in the first approximation. The values of the critical angular speed of rotation for various parameters of the system are determined numerically.