ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2014

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.977

А. А. Белоусов

О дифференциальных играх с геометрическими и интегральными ограничениями

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Рассматривается задача о сближении траектории линейного конфликтно управляемого процесса с линейным подпространством в случае общих выпуклых интегральных ограничений на управления игроков. С использованием техники многозначных отображений и выпуклого анализа (надграфик функции, рецессивный конус) получены достаточные условия разрешимости задачи в классе измеримых управлений. Показано, как исследовать игры с геометрическими ограничениями с помощью разработанного метода.

Одним из самых эффективных подходов к исследованию игровых задач динамики в случае геометрических ограничений на управления игроков является первый прямой метод Л. С. Понтрягина [1]. Этот метод был развит в работах М. С. Никольского [2–4] для интегральных ограничений на управления. В этом же направлении проводили свои исследования А. В. Мезенцев, Н. Л. Григоренко, А. Я. Азимов и Ф. В. Гусейнов. Правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского нашло свое воплощение для случая интегральных ограничений в работах В. Н. Ушакова, Б. Н. Пшеничного и Ю. Н. Онопчука. Но эти исследования сосредоточивались главным образом на одном типе интегральных ограничений на управления игроков, а именно, функций-управлений из гильбертова пространства L_2. Однако интерес представляют и более общие типы интегральных ограничений. В этом направлении следует отметить, в первую очередь, статью М. С. Никольского [3], в которой игра обобщается на случай управления преследователя из пространства Орлича.

В настоящей работе рассматривается линейная дифференциальная игра с интегральным ограничением на управление преследователя, задаваемое выпуклым функционалом самого общего вида. В частности, это могут быть характеристические функции геометрических и смешанных ограничений. Таким образом, игры с геометрическими и смешанными ограничениями оказываются частным случаем игр с интегральными ограничениями и могут быть изучены методами, изложенными в данной работе.

В основе исследования лежит метод разрешающих функций [5], являющийся идейно близким к первому прямому методу Л. С. Понтрягина. Сущность метода состоит в оценке действий преследователя с помощью некоторой скалярной (разрешающей) функции, которая строится по функционалу Минковского вспомогательного многозначного отображения и интеграл от которой определяет гарантированное время сближения. Выяснилось, что возможность построения измеримой разрешающей функции для заданного начального состояния в некий момент времени определяется рецессивным конусом [6] надграфика, ограничивающего управление функционала. Если же для заданных начального состояния и момента времени это условие нарушается, то оказывается [7], что игра может быть закончена в этот момент, но уже не в классе измеримых управлений, а в классе импульсных управлений.

Постановка задачи. Динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \qquad z(0) = z^0, \qquad z \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in \mathbb{R}^m, \qquad v \in \mathbb{R}^l. \tag{1}$$

Управления игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего игрока $v(\cdot)$ являются измеримыми (по Лебегу) функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям:

$$\int\limits_0^\infty \varphi(u(\tau))\,d\tau \leqslant 1, \qquad \int\limits_0^\infty \psi(v(\tau))\,d\tau \leqslant 1. \tag{2}$$

Эти управления будем называть допустимыми.

Функция φ, $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, предполагается неотрицательной, выпуклой и полунепрерывной снизу [6]. Обозначим множество уровня функции φ через $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\gamma) = \{u \in \mathbb{R}^m\colon \varphi(u) \leqslant \gamma\}$. Полагаем, что $\varphi(0) = 0$ и множество уровня $\Phi(\gamma)$ ограничено хотя бы для одного γ, $\gamma \geqslant 0$.

Функция ψ, $\psi\colon V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^l$, предполагается неотрицательной и полунепрерывной сверху на своей области определения V.

Терминальное множество M является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$. Обозначим через π оператор проектирования из $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение L к M.

Определение. Будем говорить, что игра может быть закончена в момент $T = T(z^0)$, если для любого допустимого управления убегающего игрока $v(t)$ существует допустимое управление преследователя $u(t)$, которое гарантирует приведение решения уравнения (1) $z(t)$, соответствующего управлениям $(u(t), v(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент T: $z(T) \in M$. Считаем, что при построении своего управления $u(t)$ преследователь в момент t может использовать информацию о реализовавшемся до этого момента управлении противника $v(\tau)$, $\tau \in [0, t]$.

Введем предположение на параметры игры, которое можно назвать аналогом условия Л. С. Понтрягина [1] для дифференциальных игр с интегральными ограничениями.

Условие. Существует такое число λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, что для всех t, $t \geqslant 0$, и v, $v \in V$, выполняется включение

$$\pi e^{At} Cv \in \pi e^{At} B\Phi(\lambda\psi(v)). \tag{3}$$

Вспомогательные утверждения. Зафиксируем начальную позицию z^0. Введем обозначения

$$f(t, \tau, v, \gamma) = -\gamma\pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv,$$

$$F(\tau, v, \gamma) = \pi e^{A\tau} B\Phi((1-\lambda)\gamma + \lambda\psi(v)),$$

где $(t, \tau, v, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times V \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию, которую можно назвать разрешающей функцией дифференциальной игры с интегральными ограничениями [5], и исследуем свойства этой функции:

$$\gamma(t,\tau,v)=\sup\Omega(t,\tau,v),\qquad \Omega(t,\tau,v)=\{\gamma\geqslant 0\colon f(t,\tau,v,\gamma)\in F(\tau,v,\gamma)\}. \tag{4}$$

Свойство $\gamma\in\Omega(t,\tau,v)$ эквивалентно включению

$$a(t)\gamma+b(\tau,v)\in H(\tau)\operatorname{epi}\varphi,$$
$$H(\tau)=\begin{pmatrix}\pi e^{A\tau}B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad a(t)=\begin{pmatrix}-\pi e^{At}z^0\\ 1-\lambda\end{pmatrix},\qquad b(\tau,v)=\begin{pmatrix}\pi e^{A\tau}Cv\\ \lambda\psi(v)\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\operatorname{epi}\varphi=\{(u,\mu)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\colon \mu\geqslant\varphi(u)\}$ — надграфик функции φ, отображение $H(\tau)\colon\mathbb{R}^m\times\times\mathbb{R}\to L\times\mathbb{R}$. Предположение (3) означает, что включение (5) выполняется при $\gamma=0$.

Напомним [6], что рецессивным конусом 0^+W выпуклого множества W, $W\subset\mathbb{R}^k$, называется множество всех векторов a, $a\in\mathbb{R}^k$, для которых выполняется включение $a\gamma+b\in W$ для всех неотрицательных чисел γ и векторов b, $b\in W$. Приведенное определение эквивалентно следующему: $0^+W=\{a\in\mathbb{R}^k\colon a+W\subset W\}$.

При сделанных предположениях о свойствах функции φ надграфик $\operatorname{epi}\varphi$ будет выпуклым и замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$, а рецессивный конус $0^+\operatorname{epi}\varphi$ — выпуклым замкнутым конусом [6]. Введем множество

$$\Delta=\{(t,\tau)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\colon a(t)\notin H(\tau)\cdot 0^+\operatorname{epi}\varphi\}.$$

Лемма 1. *Множество уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma\geqslant 0$, является полунепрерывным сверху выпуклозначным и компактозначным многозначным отображением.*

Доказательство. Выпуклость и компактность множества уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma\geqslant 0$, являются следствием полунепрерывности снизу выпуклой функции φ и ограниченности множества $\Phi(\gamma)$ для какого-либо числа γ [6].

Отметим, что множества уровня образуют возрастающую по включению совокупность компактных множеств $\Phi(\gamma)\subset\Phi(\gamma+\delta)$ для всех неотрицательных γ и δ. График отображения $\Phi(\cdot)$ совпадает с $\operatorname{epi}\varphi$ и является замкнутым множеством. Из результатов [8, § 3.1, теорема 8] следует полунепрерывность сверху отображения $\Phi(\gamma)$.

Лемма 2. *Для всех $(t,\tau,v)\in\Delta\times V$ функция $\gamma(t,\tau,v)$ конечна и верхняя грань в определении $\gamma(t,\tau,v)$ (4) достигается.*

Доказательство. Множество $\operatorname{epi}\varphi$ — выпукло и замкнуто, поэтому выпуклым будет множество $H(\tau)\operatorname{epi}\varphi$. Покажем, что это множество также замкнуто, для чего сопоставим равенства $\ker H(\tau)=\ker(\pi e^{A\tau}B)\times 0\subset\mathbb{R}^m\times 0$ и $0^+\operatorname{epi}\varphi\bigcap\{\mathbb{R}^m\times 0\}=0\times 0\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$, откуда получаем, что $\ker H(\tau)\bigcap 0^+\operatorname{epi}\varphi=0\times 0\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$, а значит [6, теорема 9.1], множество $H(\tau)\operatorname{epi}\varphi$ — замкнуто и $0^+\{H(\tau)\operatorname{epi}\varphi\}=H(\tau)\cdot 0^+\operatorname{epi}\varphi$.

Из условий леммы и включения (5) следует, что $a(t)\notin 0^+\{H(\tau)\operatorname{epi}\varphi\}$ и поэтому $\gamma(t,\tau,v)<\infty$.

Множество $\Omega(t,\tau,v)$ определяется (5) пересечением замкнутого луча в направлении $a(t)$ и выпуклого замкнутого множества $H(\tau)\operatorname{epi}\varphi$. Поэтому $\Omega(t,\tau,v)$ является выпуклым замкнутым множеством, а значит, верхняя грань в определении $\gamma(t,\tau,v)$ достигается.

Лемма 3. *Для всех $(t,\tau,v)\in\Delta\times V$ функция $\gamma(t,\tau,v)$ полунепрерывна сверху по совокупности переменных.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $(\overline{t}, \overline{\tau}, \overline{v}) \in \Delta \times V$ и зафиксируем его. Положим $\overline{\gamma} = \gamma(\overline{t}, \overline{\tau}, \overline{v}) < \infty$. По определению величины $\overline{\gamma}$ (4) для любого положительного числа ε вектор $f(\overline{t}, \overline{\tau}, \overline{v}, \overline{\gamma} + \varepsilon)$ лежит вне выпуклого компакта $F(\overline{\tau}, \overline{v}, \overline{\gamma} + \varepsilon)$.

Из леммы 1 и полунепрерывности сверху функции $\psi(v)$ следует, что $F(\tau, v, \gamma)$, $(\tau, v, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times V \times \mathbb{R}_+$, является полунепрерывным сверху выпуклозначным и компактозначным многозначным отображением. Вектор $f(t, \tau, v, \gamma)$ зависит от аргумента $(t, \tau, v, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times V \times \mathbb{R}_+$ непрерывным образом. Значит, существуют достаточно малые окрестности O_1 вектора $(\overline{\tau}, \overline{v})$ в множестве $\mathbb{R}_+ \times V$ и O_2 вектора $(\overline{t}, \overline{\tau}, \overline{v})$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times V$ такие, что для всех (t, τ, v) из окрестности $\{\mathbb{R}_+ \times O_1\} \bigcap O_2$ вектор $f(t, \tau, v, \overline{\gamma} + \varepsilon)$ лежит вне выпуклого компакта $F(\tau, v, \overline{\gamma} + \varepsilon)$ и, следовательно, $\gamma(t, \tau, v) \leqslant \gamma(\overline{t}, \overline{\tau}, \overline{v}) + \varepsilon$, что и завершает доказательство леммы.

Основная теорема. Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1), (2) на терминальное множество M из начального положения z^0.

Теорема. *Полагаем, что выполнено условие* (3) *на параметры игры* (1), (2). *Предположим, что существует момент $T = T(z^0)$ такой, что $\{T\} \times [0, T] \subset \Delta$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^T \gamma(T, T - \tau, v(\tau))\, d\tau \geqslant 1. \tag{6}$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T.

Доказательство. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы.

Согласно лемме 3, разрешающая функция $\gamma(T, \tau, v)$ является измеримой по Борелю по совокупности переменных (τ, v), $(\tau, v) \in [0, T] \times V$, поэтому измеримым по Борелю будет и вектор $f(T, \tau, v, \gamma(T, \tau, v))$. Из полунепрерывности сверху функции $\psi(v)$, лемм 1 и 3 следует, что полунепрерывным сверху по $(\tau, v) \in [0, T] \times V$ будет выпуклозначное и компактозначное отображение $G(\tau, v) = \Phi((1 - \lambda)\gamma(T, \tau, v) + \lambda\psi(v))$. Значит, это многозначное отображение будет измеримым по Борелю по совокупности переменных (τ, v) и выполняется включение (4):

$$f(T, \tau, v, \gamma(T, \tau, v)) \in \pi e^{A\tau} B G(\tau, v), \qquad (\tau, v) \in [0, T] \times V. \tag{7}$$

Из теоремы об измеримом селекторе Куратовского и Рыль–Нардзевского [9, теорема 3.12] следует, что у включения (7) существует измеримый по Борелю по совокупности переменных (τ, v), $(\tau, v) \in [0, T] \times V$, селектор $w(\tau, v) \in G(\tau, v)$. Из этой же теоремы можно заключить, что существует измеримый по Борелю селектор $\widetilde{w}(\tau, v) \in \Phi(\lambda\psi(v))$, для которого выполняется равенство $f(T, \tau, v, 0) = \pi e^{A\tau} B \widetilde{w}(\tau, v)$ при всех $(\tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times V$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0, T]$ произвольное допустимое (2) управление $v(\tau)$. По предположению теоремы (6) существует такой момент $T^* = T^*(z^0, v(\cdot))$, что

$$\int\limits_0^{T^*} \gamma(T, T - \tau, v(\tau))\, d\tau = 1.$$

Тогда управление игрока-преследователя на интервале $[0, T]$ положим равным

$$u(\tau) = \begin{cases} w(T-\tau, v) & \text{при} \quad \tau \in [0, T^*), \\ \widetilde{w}(T-\tau, v) & \text{при} \quad \tau \in [T^*, T]. \end{cases} \tag{8}$$

Такой закон выбора управлений преследователя является (по существу) контруправлением с одним переключением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией. Поэтому построенное таким образом (8) управление $u(\tau)$ — измеримо по Лебегу для произвольного измеримого управления $v(\tau)$.

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (1) попадет на терминальное множество в момент T:

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int\limits_0^T \pi e^{A(T-\tau)}[Bu(\tau) - Cv(\tau)]\, d\tau = \pi e^{AT} z^0 +$$

$$+\int\limits_0^{T^*} \pi e^{A(T-\tau)}[Bw(T-\tau, v(\tau)) - Cv(\tau)]\, d\tau + \int\limits_{T^*}^{T} \pi e^{A(T-\tau)}[B\widetilde{w}(T-\tau, v(\tau)) - Cv(\tau)]\, d\tau =$$

$$= \pi e^{AT} z^0 - \int\limits_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau\, \pi e^{AT} z^0 = 0.$$

Это равенство и доказывает приведение решения на терминальное множество $z(T) \in M$.

Проверим, что построенное таким образом (8) управление $u(\tau)$ удовлетворяет интегральному ограничению (2)

$$\int\limits_0^T \varphi(u(\tau))\, d\tau = \int\limits_0^{T^*} \varphi(w(T-\tau, v(\tau)))\, d\tau + \int\limits_{T^*}^{T} \varphi(\widetilde{w}(T-\tau, v(\tau)))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda) \int\limits_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau + \lambda \int\limits_0^T \psi(v(\tau))\, d\tau \leqslant 1.$$

Следовательно, теорема доказана.

Замечание. Несложно показать, что предположение $\{T\} \times [0, T] \subset \Delta$ из формулировки теоремы нарушается только при выполнении условия

$$-\pi e^{AT} z^0 \in \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant T} \pi e^{At} B \Phi(1-\lambda). \tag{9}$$

В работе [7] показано, что при выполнении условий (9) и (3) игра (1), (2) может быть закончена в момент T в классе импульсных контруправлений. Таким образом, указанное предположение носит больше технический характер и обеспечивает конечность разрешающей функции (4).

Отметим также, что если функция φ является кофинитной [6], т. е. надграфик $\operatorname{epi}\varphi$ не содержит невертикальных лучей, то указанное предположение теоремы выполняется для всех T и z^0 таких, что $\pi e^{AT}z^0 \neq 0$.

Случай геометрических ограничений. Покажем, что геометрические ограничения на управления игроков в линейной дифференциальной игре с помощью перехода к характеристическим функциям могут быть приведены к интегральным ограничениям.

Пусть динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением (1). Управления игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего игрока $v(\cdot)$ являются измеримыми (по Лебегу) функциями, которые удовлетворяют геометрическим ограничениям $u \in U$ и $v \in V$, где U и V — выпуклые компакты в соответствующих конечномерных пространствах. Терминальное множество M является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$.

Введем функции

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0, & u \in U, \\ \infty, & u \notin U, \end{cases} \qquad \psi(v) \equiv 0, \qquad v \in V,$$

и рассмотрим вместо геометрических ограничений интегральные ограничения вида (2). Указанные функции удовлетворяют предположениям относительно функций ограничений, если $0 \in U$. Очевидно, что выпуклая функция φ является кофинитной и $\Phi(\gamma) = U$ для всех $\gamma \geqslant 0$.

Тогда предположение (3) примет вид:

$$\pi e^{At}Cv \in \pi e^{At}BU, \qquad \text{для всех} \quad t \quad \text{и} \quad v, \qquad t \geqslant 0, \qquad v \in V.$$

В таком виде предположение (3) совпадает с классическим условием Л. С. Понтрягина [1, 5] для дифференциальных игр с геометрическими ограничениями. Условия теоремы (6) совпадают с достаточными условиями завершения игры для геометрических ограничений, которые формулируются в первом прямом методе Л. С. Понтрягина [1] и методе разрешающих функций [5], где разрешающая функция (4) принимает вид

$$\gamma(t,\tau,v) = \sup\{\gamma \geqslant 0 : -\gamma\pi e^{At}z^0 + \pi e^{A\tau}Cv \in \pi e^{A\tau}BU\}.$$

Таким образом, игры с геометрическими ограничениями являются частным случаем игр с интегральными ограничениями и могут быть изучены методами, изложенными в данной работе.

Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (проект Ф53.1/006).

1. *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. Т. 2. – Москва: Наука, 1988. – 576 с.
2. *Никольский М. С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. Вып. 2. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1969. – С. 49–58.
3. *Никольский М. С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Диф. уравнения. – 1972. – **8**, № 6. – С. 964–971.
4. *Никольский М. С.* Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями // Там же. – 1992. – **28**, № 2. – С. 219–223.
5. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – Москва: Мир, 1973. – 470 с.
7. *Белоусов А. А.* Импульсные управления в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Теорія оптимальних рішень. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2013. – С. 50–55.

8. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – Москва: Мир, 1988. – 512 с.
9. *Kisielewicz M.* Differential inclusions and optimal control // Mathematics and Its Applications. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – **44**. – 260 p.

*Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 22.07.2013

О. А. Бєлоусов

Про диференціальні ігри з геометричними та інтегральними обмеженнями

Розглядається задача про зближення траєкторії лінійного конфліктно керованого процесу з лінійним підпростором у випадку загальних опуклих інтегральних обмежень на управління гравців. З використанням техніки багатозначних відображень і опуклого аналізу (надграфік функції, рецесивний конус) отримано достатні умови розв'язності задачі в класі вимірних керувань. Показано, як досліджувати ігри з геометричними обмеженнями за допомогою розробленого методу.

A. A. Belousov

On differential games with geometric and integral constraints

The paper deals with the problem of bringing a trajectory of the linear conflict-controlled process to a linear subspace in the case of general convex integral constraints on the players' controls. Sufficient conditions for the problem solvability in the class of measurable controls are obtained. In so doing, the technique of set-valued mappings and convex analysis (epigraph of a function, recession cone) is used. It is shown how to investigate the game with geometric constraints by the developed method.