УДК 517.9

С. А. Плакса, Р. П. Пухтаєвич

Конструктивний опис моногенних функцій в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Одержано конструктивний опис моногенних функцій, що набувають значень в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної. Доведено, що такі моногенні функції мають похідні Гато усіх порядків.

Початком розвитку гіперкомплексного аналізу стали роботи У. Гамільтона (див. [1]), в яких була побудована некомутативна алгебра кватерніонів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. У роботі К. Сегре [2] побудовано алгебру комутативних кватерніонів $\{x + iy + jz + kt\colon i^2 = j^2 = -1,\ ij = k,\ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$ над полем $\mathbb{R}$, яка є ізоморфною алгебрі бікомплексних чисел $\{z_1 + jz_2\colon j^2 = -1,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Зазначимо, що алгебра бікомплексних чисел є напівпростою: перетин її максимальних ідеалів складається лише з нульового елемента.

Теорія функцій бікомплексної змінної набула розвитку в працях багатьох дослідників (див., наприклад, [2–6]). Зокрема, в роботах Ф. Рінглеба [3] і Дж. Рілея [4] показано, що будь-яку аналітичну функцію бікомплексної змінної можна побудувати за допомогою двох голоморфних функцій комплексної змінної. Г. Прайс розглядає в [5] також мультикомплексні алгебри і доводить в них аналоги ряду результатів, отриманих для аналітичних функцій бікомплексної змінної.

О. К. Бахтін в [7] розглядає багатовимірний комплексний простір $\mathbb{C}^n$ як алгебру, що є ізоморфною n-вимірній комутативній напівпростій алгебрі над полем $\mathbb{C}$. Він вводить векторні узагальнення понять модуля і аргументу комплексного числа і, використовуючи ці поняття, встановлює узагальнення ряду результатів теорії відображень комплексної площини стосовно функцій, заданих в $\mathbb{C}^n$.

Зв'язок аналітичних функцій, заданих в комутативних алгебрах, з просторовими потенціальними полями встановив П. Кетчум [8]. Він показав, що якщо елементи e_1, e_2, e_3 комутативної алгебри задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \tag{1}$$

то кожна аналітична функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє тривимірне рівняння Лапласа, оскільки

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0, \tag{2}$$

де $\Phi'(\zeta)$ визначається рівністю $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$. Алгебру, в якій існує трійка елементів, що задовольняють рівність (1), П. Кетчум назвав гармонічною, і як приклад такої алгебри розглянув алгебру комутативних кватерніонів К. Сегре.

І. П. Мельниченко показав, що двічі диференційовні за Гато функції в гармонічній алгебрі утворюють найбільш широкий клас функцій, які задовольняють співвідношення (2). Він довів, що не існує тривимірних гармонічних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{R}$, та описав усі такі алгебри над полем $\mathbb{C}$ і всі базиси в них, які задовольняють рівність (1) і нерівності $e_k^2 \neq 0$ при $k = 1, 2, 3$ (див. [9]).

У роботі [10] отримано конструктивний опис усіх моногенних (тобто неперервних і диференційовних за Гато) функцій, що задовольняють співвідношення (2) в тривимірній напівпростій гармонічній алгебрі, за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної і доведено нескінченну диференційовність за Гато цих моногенних функцій.

У цій роботі результати роботи [10] узагальнено на моногенні функції, задані в комутативній напівпростій алгебрі довільної скінченної розмірності над полем комплексних чисел і показано, що функції, які розглядаються в роботі [7], є моногенними.

1. Моногенні функції в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі. Нехай $\mathbb{A}_n$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої утворюють ідемпотенти $I_1, I_2, \ldots, I_n$, $2 \leqslant n < \infty$, що задовольняють такі правила множення:

$$I_k{}^2 = I_k, \qquad I_k I_j = 0, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad k \neq j.$$

Одиниця алгебри має розклад $1 = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$.

$\mathbb{A}_n$ містить n максимальних ідеалів:

$$\mathfrak{I}_k := \left\{ \zeta = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \alpha_j I_j,\ \alpha_j \in \mathbb{C} \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

перетин яких складається лише з нульового елемента. Отже, алгебра $\mathbb{A}_n$ є напівпростою (див. [11, с. 146]).

Означимо n лінійних неперервних функціоналів $f_k \colon \mathbb{A}_n \to \mathbb{C}$ рівностями

$$f_k(I_k) = 1, \qquad f_k(I_j) = 0, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad k \neq j. \tag{3}$$

Відомо, що кожен функціонал f_k є мультиплікативним (див. [11, с. 148]), а його ядром є відповідний максимальний ідеал $\mathfrak{I}_k$.

Будемо розглядати в алгебрі $\mathbb{A}_n$ вектори $e_1 = 1$, $e_2, \ldots, e_m$, де $2 \leqslant m \leqslant 2n$, що є лінійно незалежними над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Це означає, що рівність

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j e_j = 0, \qquad \beta_j \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли всі $\beta_j = 0$.

Нехай $E_m := \left\{ \zeta = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e_j \colon x_j \in \mathbb{R} \right\}$ — лінійна оболонка векторів e_1, $e_2, \ldots, e_m$ над полем $\mathbb{R}$. Будемо припускати, що кожен функціонал f_k відображає E_m на все поле комплексних чисел, тобто при всіх $k \in \overline{1, n}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$, де $f_k(E_m)$ — образ множини E_m при відображенні f_k.

Нехай Ω — деяка область в E_m. Неперервну функцію $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega \subset E_m$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} (\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta))\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \qquad \forall\, h \in E_m.$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

Нехай $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n$ — деякий базис алгебри $\mathbb{A}_n$ і розклад функції $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ за цим базисом має вигляд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} U_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)\widetilde{e}_j, \tag{4}$$

де комплекснозначні функції $U_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ є $\mathbb{R}$-диференційовними, тобто задовольняють співвідношення

$$U_j(x_1 + \triangle x_1, x_2 + \triangle x_2, \ldots, x_m + \triangle x_m) - U_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\Delta x_k + o\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\Delta x_k)^2}\right), \qquad \sum_{k=1}^{m} (\Delta x_k)^2 \to 0.$$

Тоді для того щоб функція $\Phi(\zeta)$ була моногенною в області Ω, необхідно і достатньо, щоб всюди в області Ω виконувались аналоги умов Коші–Рімана:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}e_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}e_3, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}e_m. \tag{5}$$

Необхідність і достатність умов (5) для моногенності функції Φ доводиться у такий же спосіб, як необхідність і достатність класичних умов Коші–Рімана для голоморфності функції комплексної змінної.

2. Конструктивний опис моногенних функцій в алгебрі $\mathbb{A}_n$. Розглянемо розклад векторів $e_1, e_2, \ldots, e_m$ за базисом $I_1, I_2, \ldots, I_n$:

$$e_1 = \sum_{j=1}^{n} I_j, \qquad e_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} I_j, \qquad a_{kj} \in \mathbb{C}, \qquad k = 2, 3, \ldots, m. \tag{6}$$

Наслідком рівностей (3), (6) є такі співвідношення:

$$f_k(\zeta) = f_k\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = x_1 + \sum_{j=2}^{m} a_{jk} x_j := \xi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Позначимо $M_k := \{\zeta \in E_m : f_k(\zeta) = 0\}$ при фіксованому $k \in \overline{1, n}$. Область $\Omega \subset E_m$ назвемо *опуклою по множині напрямків* M_k, якщо разом з довільними двома точками $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega$ такими, що $\zeta_2 - \zeta_1 \in M_k$, область Ω повністю містить відрізок $\{\zeta_1 + \alpha(\zeta_2 - \zeta_1)\colon \alpha \in$ $\in [0, 1]\}$.

Лема 1. *Нехай при деякому $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$, область $\Omega \subset E_m$ є опуклою по множині напрямків M_k, а функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ моногенна в області Ω. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega$ такі, що $\zeta_2 - \zeta_1 \in M_k$, то*

$$\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1) \in \mathfrak{I}_k. \tag{7}$$

Доведення. Оскільки $f_k(E_m) = \mathbb{C}$, то існує елемент $e_2^* \in E_m$ такий, що $f_k(e_2^*) = i$. Розглянемо лінійну оболонку $E^* := \{\zeta = xe_1^* + ye_2^* + ze_3^*\colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$ векторів $e_1^* := 1$, $e_2^*, e_3^* := \zeta_2 - \zeta_1$ і позначимо $\Omega^* := \Omega \bigcap E^*$.

Тепер співвідношення (7) доводиться за схемою доведення леми 1 роботи [12], в якому замість трійки Ω_ζ, f, L використовується трійка Ω^*, f_k, $\{\alpha e_3^* : \alpha \in \mathbb{R}\}$ відповідно. Лему доведено.

Позначимо область $D_k := f_k(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, утворену при відображенні f_k області Ω в комплексну площину $\mathbb{C}$.

При $k = 1, 2, \ldots, n$ введемо в розгляд лінійний оператор A_k, який кожній моногенній функції $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ ставить у відповідність голоморфну функцію $F_k\colon D_k \to \mathbb{C}$ за формулою

$$F_k(\xi_k) = f_k(\Phi(\zeta)), \tag{8}$$

де $\xi_k = f_k(\zeta)$ і $\zeta \in \Omega$. З леми 1 випливає, що у випадку, коли область Ω є опуклою по множині напрямків M_k, значення $F_k(\xi_k)$ не залежить від вибору точки $\zeta \in \Omega$, що відображається функціоналом f_k в точку ξ_k.

Введемо також у розгляд лінійний оператор B_k, який кожній голоморфній функції $F_k\colon D_k \to \mathbb{C}$ ставить у відповідність функцію $\Phi_k\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ за формулою

$$\Phi_k(\zeta) = F_k(\xi_k) I_k, \qquad \xi_k = f_k(\zeta), \qquad \forall\, \zeta \in \Omega. \tag{9}$$

Лема 2. *Нехай при деякому $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$, область $\Omega \subset E_m$ є опуклою по множині напрямків M_k, а функція $F_k\colon D_k \to \mathbb{C}$ голоморфна в області D_k. Тоді функція $\Phi_k\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$, визначена рівністю* (9), *є моногенною в області Ω.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $\zeta \in \Omega$ і довільний відмінний від нуля елемент $h := \sum\limits_{j=1}^{m} h_j e_j \in E_m$. Позначимо $\eta := f_k(h) = h_1 + \sum\limits_{j=2}^{m} a_{jk} h_j$, де a_{jk} — коефіцієнти розкладу (6). Тоді $\eta I_k = h I_k$ і тому

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi_k(\zeta + \varepsilon h) - \Phi_k(\zeta)}{\varepsilon} = I_k \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{F_k(\xi_k + \varepsilon\eta) - F_k(\xi_k)}{\varepsilon} =$$

$$= \eta I_k \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{F_k(\xi_k + \varepsilon\eta) - F_k(\xi_k)}{\varepsilon\eta} = h I_k F_k'(\xi_k),$$

де $F_k'(\xi_k) I_k =: \Phi_k'(\zeta)$. Отже, функція $\Phi_k\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ моногенна в області Ω. Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай при деякому $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$ і область $\Omega \subset E_m$ є опуклою по множині напрямків M_k. Тоді кожну моногенну функцію $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ можна подати у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_k(\zeta) + \Phi_{0k}(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \Omega,$$

де функція Φ_k визначена рівністю (9), *в якій функція F_k визначена рівністю* (8), *а Φ_{0k} — деяка моногенна в області Ω функція зі значеннями в ідеалі $\mathfrak{I}_k$.*

Доведення. Розглянемо функцію $\Phi_{0k}(\zeta) = \Phi(\zeta) - \Phi_k(\zeta)$, яка внаслідок леми 2 є моногенною в області Ω. Враховуючи співвідношення (8) і (3), отримуємо

$$f_k(\Phi_{0k}(\zeta)) = f_k(\Phi(\zeta) - \Phi_k(\zeta)) = f_k(\Phi(\zeta)) - f_k(\Phi_k(\zeta)) = F_k(\xi_k) - F_k(\xi_k) = 0,$$

тобто $\Phi_{0k}(\zeta) \in \mathfrak{I}_k$. Теорему доведено.

У нижченаведеній теоремі описано всі моногенні функції, що набувають значення в ідеалах $\mathfrak{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots n$.

Теорема 2. *Нехай при всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$ і область $\Omega \subset E_m$ є опуклою по множині напрямків M_k. Тоді кожну моногенну функцію $\Phi_{0k} \colon \Omega \to \mathfrak{I}_k$ можна подати у вигляді*

$$\Phi_{0k}(\zeta) = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} F_j(\xi_j) I_j \qquad \forall\, \zeta \in \Omega, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

де $\xi_j = f_j(\zeta)$ і $F_j \colon D_j \to \mathbb{C}$ — деяка голоморфна в області D_j функція.

Доведення. Оскільки функція Φ_{0k} набуває значення в ідеалі $\mathfrak{I}_k$, то справедлива рівність

$$\Phi_{0k}(\zeta) = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} V_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) I_j, \tag{10}$$

де V_j — деякі комплекснозначні функції, визначені в конгруентній до області Ω області $\Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \colon \zeta = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e_j \in \Omega\Big\}$ m-вимірного дійсного простору $\mathbb{R}^m$.

Подіємо на рівність (10) операторами A_j при $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq k$, і, враховуючи співвідношення (8) і (3), отримаємо рівності $F_j(\xi_p) = V_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Теорему доведено.

Як наслідок теорем 1, 2 отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай при всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$ і область $\Omega \subset E_m$ є опуклою по множині напрямків M_k. Тоді кожна моногенна функція $\Phi \colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\xi_j) I_j \qquad \forall\, \zeta \in \Omega, \tag{11}$$

де $\xi_j = f_j(\zeta)$ і $F_j \colon D_j \to \mathbb{C}$ — деяка голоморфна в області D_j функція.

З рівності (11), права частина якої є моногенною функцією в області $D := \{\zeta \in E_m \colon f_k(\zeta) \in D_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$, випливає таке твердження.

Теорема 4. *Нехай при всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$, область $\Omega \subset E_m$ є опуклою по множині напрямків M_k і функція $\Phi \colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ моногенна в області Ω. Тоді Φ продовжується до функції, моногенної в області D.*

Зауваження 1. Умова опуклості області $\Omega \subset E_m$ по множині напрямків M_k в попередніх теоремах, взагалі кажучи, є істотною при $m < 2n$, як показує приклад 1 з роботи [10]. У випадку $m = 2n$ цю умову можна опустити. Зокрема, доведення твердження теореми 3 проводиться за схемою доведення теореми про розклад Рінглеба для аналітичних функцій бікомплексної змінної (див., наприклад, [4 с. 136]).

Зауваження 2. У роботі [7] доведено поліциліндричну теорему Рімана, з якої випливає, що у випадку $m = 2n$, тобто коли $E_m = \mathbb{A}_n$, область D можна відобразити на одиничний полікруг функцією, що має розклад (11) в області $\Omega = D$. З теореми 3 випливає, що таке відображення є моногенною функцією в області D.

Принциповим наслідком рівності (11) є нижченаведене твердження, справедливе для довільної області Ω.

Теорема 5. *Нехай при всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ виконується рівність $f_k(E_m) = \mathbb{C}$ і функція $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{A}_n$ моногенна в довільній області $\Omega \subset E_m$. Тоді похідні Гато всіх порядків функції Φ є моногенними функціями в області Ω.*

Доведення. Нехай куля Θ з центром у довільній фіксованій точці ζ_0 повністю міститься в області Ω. Оскільки Θ є опуклою областю, то в кулі Θ справедлива рівність (11), з якої випливає, що компоненти U_j розкладу (4) — нескінченно диференційовні за змінними x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. При цьому похідна Гато Φ' задовольняє умови вигляду (5), а отже, є моногенною функцією. Аналогічно доводиться, що похідні Гато наступних порядків функції Φ є моногенними в області Ω. Теорему доведено.

3. Приклади. 1. Розглянемо алгебру $\mathbb{A}_2$, яка збігається з алгеброю бікомплексних чисел і є ізоморфною алгебрі комутативних кватерніонів К. Сегре $\{x + iy + jz + kt\colon i^2 = j^2 = -1,\ ij = k,\ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$. При цьому базис К. Сегре: $e_1 = 1$, $e_2 = i$, $e_3 = j$, $e_4 = k$ задовольняє умови

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 = 0, \qquad e_k^2 \neq 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

а моногенні функції $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$, де $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, задовольняють чотиривимірне рівняння Лапласа, оскільки

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Phi''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) = 0.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{A}_2$ трійку елементів

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}, \qquad e_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}(I_1 - I_2),$$

що задовольняють умову (1). Тоді кожна моногенна функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє тривимірне рівняння Лапласа, оскільки виконуються рівності (2), а компоненти U_1, U_2, U_3, U_4 розкладу

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y, z) + iU_2(x, y, z) + jU_3(x, y, z) + kU_4(x, y, z)$$

функції Φ за базисом К. Сегре є просторовими гармонічними функціями.

2. Всі базиси алгебри $\mathbb{A}_3$, що задовольняють рівність (1) і нерівності $e_k^2 \neq 0$ при $k = 1, 2, 3$, описано в теоремі 1.10 роботи [9].

3. Розглянемо алгебру $\mathbb{A}_n$, її базис

$$e_1 = 1, \qquad e_k = iI_{k-1} \qquad \text{при} \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1, \qquad e_n = iI_{n-1} - iI_n,$$

що задовольняє умови

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = 0, \qquad e_k^2 \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

і лінійну оболонку $E_n := \left\{\zeta = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j \colon x_j \in \mathbb{R}\right\}$, породжену векторами цього базису. Тоді кожна моногенна функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta \in E_n$, задовольняє n-вимірне рівняння Лапласа, оскільки

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} = \Phi''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2) = 0.$$

Якщо ж в алгебрі $\mathbb{A}_n$ розглянемо елементи

$$\begin{aligned} &e_1 = 1, \qquad e_2 = I_2, \qquad e_3 = I_3, \qquad \ldots, \qquad e_n = I_n, \\ &e_{n+1} = i, \qquad e_{n+2} = iI_2, \qquad e_{n+3} = iI_3, \qquad \ldots, \qquad e_{2n} = iI_n, \end{aligned}$$

що задовольняють умови

$$e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_{2n}^2 = 0, \qquad e_k^2 \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

то кожна моногенна функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = \sum\limits_{j=1}^{2n} x_j e_j$, де $x_j \in \mathbb{R}$, буде задовольняти $2n$-вимірне рівняння Лапласа, оскільки

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{2n}^2} = \Phi''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_{2n}^2) = 0.$$

1. *Гамильтон У. Р.* Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. – Москва: Наука, 1994. – 560 с.
2. *Segre C.* The real representations of complex elements and extensions to bicomlex systems // Math. Ann. – 1892. – **40** – P. 413–467.
3. *Ringleb F.* Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1933. – **57** – P. 311–340.
4. *Riley J. D.* Contributions to the theory of functions of a bicomplex variable // Tohoku Math. J. 2nd series 5. – 1953. – **30**, No 4. – P. 132–165.
5. *Price G. B.* An introduction to multicomplex spaces and functions. – New York: Marcel Dekker, 1991. – 398 p.
6. *Rönn S.* Bicomplex algebra and function theory // arXiv:math.CV/0101200.
7. *Бахтин А. К.* Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства // Доп. НАН України. – 2011. – № 3. – С. 7–11.
8. *Ketchum P. W.* Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**, No 4. – P. 641–667.
9. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
10. *Pukhtaievych R. P.* Monogenic functions in a three-dimensional harmonic semi-simple algebra // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, No 4–5. – С. 352–361.
11. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
12. *Плакса С. А., Шпаковский В. С.* Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1078–1091.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 18.06.2013

С. А. Плакса, Р. П. Пухтаевич

Конструктивное описание моногенных функций в конечномерной полупростой коммутативной алгебре

Получено конструктивное описание моногенных функций, принимающих значения в конечномерной полупростой коммутативной алгебре, с помощью аналитических функций комплексной переменной. Доказано, что такие моногенные функции имеют производные Гато всех порядков.

S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaievych

Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional semisimple commutative algebra

We obtain a constructive description of monogenic functions taking values in a finite-dimensional semisimple commutative algebra by means of analytic functions of the complex variable. We prove that the mentioned monogenic functions have the Gateaux derivatives of all orders.