УДК 004.42:510.69

С.С. Шкільняк

СПЕКТР СЕКВЕНЦІЙНИХ ЧИСЛЕНЬ ПЕРШОПОРЯДКОВИХ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК

Досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Для різних відношень логічного наслідку в таких логіках побудовано спеціальні секвенційні числення. При цій побудові використано спеціальні предикати-індикатори наявності значення для змінних. Для пропонованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Вступ

Апарат математичної логіки доводить свою ефективність при розв'язанні широкого кола задач інформатики й програмування. Створено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1]), які успішно застосовуються в програмуванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Проте ця логіка має принципові обмеження, що ускладнює її використання. Вона базується на структурах однозначних тотальних скінченно-арних предикатів, водночас для програмування характерне використання часткових неоднозначних відображень над складними даними. Тому вельми актуальною стає проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) – логічні формалізми, збудовані [2] на основі композиційно-номінативного підходу.

Для розв'язання низки задач, що виникають в інформаційних і програмних системах, необхідний ефективний пошук виведень. Потужним апаратом побудови виведень є числення секвенційного (генценівського) типу. Такі числення формалізують фундаментальне поняття логічного слідування. Уточнення цього поняття для КНЛ за допомогою відношень логічного наслідку запропоновано в [3]. Введено "неспростовнісний" $|=_{Cl}$, "насичений" $|=_{Cm}$, "істиннісний" $|=_{T}$, "хибнісний" $|=_{F}$, "сильний" $|=_{TF}$ логічні наслідки. Побудовано (див., напр., [4–8]) низку секвенційних числень для різних класів КНЛ, які формалізують ці відношення. Зазначимо, що пропозиційні числення для таких відношень розглядались у [9]. Спеціальні секвенційні числення для чистих першопорядкових КНЛ однозначних часткових предикатів запропоновано в [7, 8], їх особливістю є використання введених в [10] спеціальних предикатів, які визначають наявність значення для предметних імен (змінних).

Метою даної роботи є побудова секвенційних числень для різних відношень логічного наслідку в чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних предикатів. При побудові використовуємо спеціальні предикати-індикатори наявності значення для змінних.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2, 3, 6].

1. Основні поняття і визначення

Для полегшення читання наведемо основні визначення та позначення.

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це однозначна функція вигляду $\delta : V \to A$. Подаємо V-ІМ у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$.

Клас всіх V-ІМ над A позначимо ${}^VA$.

Вводимо функцію $asn : {}^VA \to 2^V$ так: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Визначимо $\delta \,\|\, X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$.

Замість $\delta \,\|\, (V \setminus \{x\})$ пишемо $\delta \,\|_{-x}$.

Задамо $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \,\|\, (V \setminus asn(\delta_2)))$;

$r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup$ $\cup\, (\delta \,\|\, (V \setminus \{v_1,...,v_n\}))$.

Замість $y_1,\ldots,y_n$ пишемо також $\bar{y}$.

Під V-квазіарним предикатом на множині A розуміємо довільну часткову неоднозначну функцію вигляду $P : {}^VA \to Bool$.

Тут $Bool = \{T, F\}$ – множина істинністних значень.

Зауважимо, що в цій роботі, як і в [3, 6], ми беремо найпростіше математичне уточнення складного і багатоаспектного поняття неоднозначної функції, трактуючи неоднозначні предикати як відношення між ${}^{V}A$ та *Bool*. Тому такі предикати можна назвати предикатами реляційного типу. При цьому ми трактуємо $P(d)$ як множину значень, які предикат P може прийняти на $d \in {}^{V}A$. Зрозуміло, що, клас однозначних V-квазіарних предикатів реляційного типу ізоморфний класу традиційних [2] V-квазіарних предикатів – однозначних функцій типу ${}^{V}A \to Bool$.

Для V-квазіарного предиката P задаємо області *істинності* та *хибності*:

$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P(d)\}$;

$\boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P(d)\}$.

V-квазіарний предикат P:

– однозначний, якщо $\boldsymbol{T}(P) \cap \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

– тотальний, якщо $\boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P) = {}^{V}A$.

Фундаментальною властивістю відображень, які використовуються в програмуванні, є монотонність щодо розширення даних новими компонентами.

Предикат $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ *монотонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \subseteq P(d')$.

Окремим випадком монотонності є еквітонність – збереження прийнятого значення при розширенні даних.

Предикат P *еквітонний*, якщо з умови $P(d) \neq \varnothing$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d') = P(d)$.

Для однозначних часткових предикатів визначення монотонності й еквітонності рівносильні. Для цих предикатів монотоність можна трактувати як збереження їх інформативності при збільшенні інформативності вхідних даних. Проте для тотальних монотонних предикатів при розширенні вхідних даних інформативність може лише зменшуватися. Для тотальних предикатів змістовно прийнятною є дуальна до монотонності властивість антитонності.

Предикат $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ *антитонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \supseteq P(d')$.

Базовими композиціями ЧКНЛ є $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$. Для їх визначення задаємо предикати $\neg P$, $P \vee Q$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, $\exists \boldsymbol{x} P$:

$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P)$;

$\boldsymbol{T}(P \vee Q) = \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P \vee Q) = \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q)$;

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{T}(P))$;

$\boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{F}(P))$;

$\boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для деякого $a \in A\}$;

$\boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для всіх $a \in A\}$.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$ зберігають властивості монотонності та антитонності.

Ім'я $x \in V$ (строго) неістотне для V-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d \in {}^{V}A$ та $a \in A$ маємо $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \,\|\, {-x})$.

Семантичними моделями ЧКНЛ є композиційні системи (КС) квазіарних предикатів $({}^{V}A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$, де Pr^{A} – клас V-квазіарних предикатів на A, $\boldsymbol{C}$ визначається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$. Терми композиційної алгебри $(Pr^{A}, \boldsymbol{C})$ трактуємо як формули мови ЧКНЛ.

Алфавіт мови: символи $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ базових композицій, множина Ps предикатних символів (сигнатура мови), множина V предметних імен. Множина Fr формул мови ЧКНЛ визначається індуктивно:

1) кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули атомарні;

2) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

Формули вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ називатимемо R-формулами.

На основі тотального однозначного відображення $I : Ps \to Pr^{A}$, яке позначає символами Ps базові предикати, задаємо відображення інтерпретації $J : Fr \to Pr^{A}$:

1) $J(p) = I(p)$ для кожного $p \in Ps$;

2) $J(\neg\Phi) = \neg(J(\Phi))$,

$J(\vee\Phi\Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi))$,

$J(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(J(\Phi))$, $J(\exists x\Phi) = \exists \boldsymbol{x}(J(\Phi))$.

Предикат $J(\Phi)$ позначаємо Φ_A.

Відображення J пов'язує алгебру даних (A, Pr) із мовою ЧКНЛ. Тому моделями мови є об'єкти вигляду $\boldsymbol{A} = ((A, Pr^{A}), I)$ – алгебраїчні системи з доданою сигнатурою (мовою) [2], які скорочено позначатимемо (A, I). Кожна така $\boldsymbol{A}$ задає КС $({}^{V}A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$.

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для формули Φ, якщо для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ ім'я x строго неістотне для Φ_A.

Формула примітивна, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} p$, причому відсутні тотожні перейменування та $\bar{v}$ не містить строго неістотних для p імен.

Для кожного $p \in Ps$ множину (строго) неістотних предметних імен задаємо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps \to 2^V$, яка продовжується [3] до $\nu : Fr \to 2^V$. Для ЧКНЛ постулюємо нескінченність множини $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \nu(p)$ тотально неістотних імен.

Характерною ознакою логік квазіарних предикатів є те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому для цих логік невірні [3, 4] деякі важливі закони класичної логіки. Отже, при інтерпретаціях формул варто явно вказувати означені та неозначені предметні імена. Це можна робити [3–6] за допомогою спеціальних X–Y-означених відношень логічного наслідку. В даній роботі використовуємо запропоновані в [10] спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори $\boldsymbol{\varepsilon x}$. Вони визначають наявність в даних компоненти з таким x, тобто наявність значення для x.

ЧКНЛ, мови яких розширені множиною $\{\varepsilon x \mid x \in V\}$ символів предикатів-індикаторів $\boldsymbol{\varepsilon x}$, названо [7, 8] ε-ЧКНЛ. Такі розширені логіки утворюють окремий підрівень кванторного рівня із базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\varepsilon x}$.

Предикати $\boldsymbol{\varepsilon x}$ задамо так:

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varepsilon x}) = \{d \mid d(x)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid x \in asn(d)\}$;
$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon x}) = \{d \mid d(x)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid x \notin asn(d)\}$.

Теорема 1. Маємо

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varepsilon y}) \subseteq \boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$ та

$\boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varepsilon y}) \subseteq \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$.

Звідси $\boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{y}^{x}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varepsilon y}) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$ та $\boldsymbol{F}(\exists xP) \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varepsilon y}) \subseteq \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{y}^{x}(P))$. Водночас умови $\boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{y}^{x}(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$ і $\boldsymbol{F}(\exists xP) \subseteq \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{y}^{x}(P))$ невірні [4] навіть для однозначних квазіарних предикатів.

Семантичні властивості КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів досліджено в [3].

2. Відношення логічного наслідку

Відношення ${}_{A}|\!=_{T}$, ${}_{A}|\!=_{F}$, ${}_{A}|\!=_{TF}$, ${}_{A}|\!=_{Cl}$, ${}_{A}|\!=_{Cm}$ наслідку для множин формул при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A}$ задаємо так.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$. Визначаємо:

$\Gamma\ {}_{A}|\!=_{Cl} \Delta$, якщо

$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$;

$\Gamma\ {}_{A}|\!=_{Cm} \Delta$, якщо

$\bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A) = {}^{V}A$;

$\Gamma\ {}_{A}|\!=_{T} \Delta$, якщо

$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$;

$\Gamma\ {}_{A}|\!=_{F} \Delta$, якщо

$\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A)$;

$\Gamma\ {}_{A}|\!=_{TF} \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_{A}|\!=_{F} \Delta$ та $\Gamma\ {}_{A}|\!=_{T} \Delta$.

Відношення логічного наслідку для множин формул $|\!=_{T}$, $|\!=_{F}$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ визначаємо за такою схемою:

$\Gamma\ |\!=_{*} \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_{A}|\!=_{*} \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ (тут $*$ – одне з T, F, TF, Cl, Cm).

Для логік однозначних часткових предикатів (неокласична семантика) відношення $|\!=_{Cm}$ порожнє [3], тому можна розглядати відношення $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{T}$, $|\!=_{F}$, $|\!=_{TF}$.

Для логік неоднозначних тотальних предикатів (пересичена семантика) відношення $|\!=_{Cl}$ порожнє [3], тому можна розглядати відношення $|\!=_{Cm}$, $|\!=_{T}$, $|\!=_{F}$, $|\!=_{TF}$.

Для логік неоднозначних часткових предикатів (загальна семантика) відношення $|\!=_{Cl}$ та $|\!=_{Cm}$ порожні, відношення $|\!=_{T}$ та $|\!=_{F}$ збігаються, тому маємо єдине природне змістовне відношення $|\!=_{TF}$.

Теорема 2. 1) $\Gamma\ |\!=_{Cl} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow$ $\Gamma\ |\!=_{Cm} \Delta$ в пересиченій;

2) $\Gamma\ |\!=_{T} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_{F} \Delta$ в пересиченій;

3) $\Gamma\ |\!=_{F} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_{T} \Delta$ в пересиченій;

4) у випадку загальної семантики $\Gamma\ |\!=_{T} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_{F} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_{TF} \Delta$.

Співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку в різних семантиках наведено в [3].

Надалі, якщо інше окремо не зазначено, $\models$ позначає:

– $\models_{TF}$ для загальної семантики;

– одне із $\models_{Cl}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ для некласичної семантики;

– одне із $\models_{Cm}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ для пересиченої семантики.

Наведемо основні властивості відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$.

Властивості пропозиційного рівня:

U) якщо $\Gamma \models \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, то $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$;

C) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\neg\neg_{\vdash}$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\vee_{\vdash}$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_{\vdash}$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для $\models_{Cl}$ та $\models_{Cm}$ також маємо:

$\neg_{\vdash}$) $\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

Це означає, що для $\models_{Cl}$ та $\models_{Cm}$ можна знімати зовнішнє заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки. Водночас для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ властивості $\neg_{\vdash}$ та $\neg_{\dashv}$ невірні, адже для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ знімати зовнішнє заперечення вже не можна (див. [2, 9]).

Отже, для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, необхідно виділяти додаткові властивості для випадку зовнішнього заперечення на реномінацію.

Властивість *C* гарантує наявність кожного із логічних наслідків у відповідних семантиках. Додатково гарантують наявність логічного наслідку властивості:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models \Delta$

(для некласичної семантики $\models$ – це $\models_T$ або $\models_{Cl}$; для пересиченої – $\models_F$ або $\models_{Cm}$);

CR) $\Gamma \models_{*} \Delta, \Phi, \neg\Phi$

(для некласичної семантики $\models$ – це $\models_F$ або $\models_{Cl}$; для пересиченої – $\models_T$ або $\models_{Cm}$);

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$

(для некласичної семантики або для пересиченої семантики).

Для $\models_{Cl}$ та $\models_{Cm}$ властивості *CL*, *CR*, *CLR* зводяться до *C*.

Властивості кванторного рівня:

RT$_{\vdash}$) $R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

RT$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$;

$\neg$RT$_{\vdash}$) $\neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg$RT$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$;

ΦN$_{\vdash}$) $R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

ΦN$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$;

$\neg\Phi$N$_{\vdash}$) $\neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg\Phi$N$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$.

Для властивостей ΦN$_{\vdash}$, ΦN$_{\dashv}$, $\neg\Phi$N$_{\vdash}$, $\neg\Phi$N$_{\dashv}$ умова: $y \in \nu(\Phi)$.

R$\exists$R$_{\vdash}$) $R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R$\exists$R$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$;

$\neg$R$\exists$R$_{\vdash}$) $R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\bar u}_{\bar v}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg$R$\exists$R$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\neg\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar u}_{\bar v}(\neg\exists x\Phi)$;

R$\exists$p$_{\vdash}$) $R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta$;

R$\exists$p$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$;

$\neg$R$\exists$p$_{\vdash}$) $R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg$R$\exists$p$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\exists x\Phi$;

RR$_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

RR$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)$;

$\neg$RR$_{\vdash}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg$RR$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)$;

R$\neg_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$;

$\neg$R$\neg_{\vdash}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg$R$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$;

R$\vee_{\vdash}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

R$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi)$;

$\neg$R$\vee_{\vdash}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi), \models \Delta$;

$\neg$R$\vee_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ та $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

Властивості елімінації кванторів записуємо з використанням символів спеціальних предикатів-індикаторів εz:

$\exists$R$_{|-}$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon z$;

$\exists_{|-}$) $\exists x\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon z$;

$\neg\exists$R$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon z$;

$\neg\exists_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg R_z^x(\Phi), \varepsilon z$;

$\exists$Rf$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon z$;

$\exists$f$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi), \varepsilon z$;

$\neg\exists$Rf$_{|-}$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon z$;

$\neg\exists$f$_{|-}$) $\neg\exists x\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_z^x(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon z$.

Для $\exists$R$_{|-}$, $\neg\exists$R$_{-|}$, $\exists$Rf$_{-|}$, $\neg\exists$Rf$_{|-}$ умови: $z \in V_T$ та $z \notin nm(\mathbf{\Gamma}, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$; для $\exists_{|-}$, $\neg\exists_{-|}$, $\exists$f$_{-|}$, $\neg\exists$f$_{|-}$ умови: $z \in V_T$ та $z \notin nm(\mathbf{\Gamma}, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists$Rv$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y$;

$\exists$v$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \varepsilon y$;

$\neg\exists$Rv$_{|-}$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_* \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon y$;

$\neg\exists$v$_{|-}$) $\neg\exists x\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon y$;

$\exists$Rd$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ та

$\mathbf{\Gamma} \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y$;

$\exists$d$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi$ та

$\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \varepsilon y$;

$\neg\exists$Rd$_{|-}$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon y, \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta$ та

$\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon y$;

$\neg\exists$d$_{|-}$) $\neg\exists x\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \neg\exists x\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \Delta$ та

$\neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon y$.

Для символів εy спеціальних предикатів-індикаторів можна знімати зовнішнє заперечення навіть у випадку $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$:

Теорема 3. $\neg\varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models \Delta \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta, \varepsilon y$ та $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \neg\varepsilon y \Leftrightarrow \varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models \Delta$.

Доведення теореми 3 зводиться до перевірки наявності усіх відповідних наслідків $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, що безпосередньо робимо на основі визначень.

У випадку монотонних (еквітонних) предикатів маємо наступні властивості:

Теорема 4. Маємо:

1) $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models_T R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$ та $\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models_T \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$;

2) $R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models_F R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$ та $\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y, \mathbf{\Gamma} \models_F \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$.

Теорема 4 безпосередньо доводиться на основі визначень.

3. Секвенційні числення чистих першопорядкових логік

Семантичною основою побудови числень секвенційного типу для ЧКНЛ є властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Секвенційні числення формалізують такі відношення.

Секвенції ми трактуємо як множини формул, специфікованих (відмічених) спеціальними символами $_{|-}$ та $_{-|}$, які не входять до алфавіту мови. Формули секвенції, відмічені $_{|-}$, називають T-формулами, а відмічені $_{-|}$ – F-формулами. Позначаємо секвенції як $_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}\Delta$, або, не деталізуючи, як $\mathbf{\Sigma}$.

Секвенційне числення будуємо так: секвенція $_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \Delta$.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева – секвенційні.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість секвенції $_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}\Delta$ означає, що $\mathbf{\Gamma} \models \Delta$.

Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення $\models$.

Секвенція $\mathbf{\Sigma}$ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем $\mathbf{\Sigma}$.

Залежно від відношення логічного наслідку та семантики отримуємо різноманітні секвенційні числення. Низку секвенційних числень для різних класів КНЛ побудовано в [4–6]. Такі числення запропоновано для загального випадку логік квазіарних предикатів, для логік однозначних еквітонних предикатів (ЕП) та логік тотальних антитонних предикатів (АП). Їх побудова базується на властивостях *X*–*Y*-означених відношень логічного наслідку.

Наведемо спектр секвенційних числень чистих першопорядкових КНЛ квазіарних предикатів, збудованих в [4–6] (табл. 1).

Таблиця 1. Секвенційні числення чистих першопорядкових КНЛ

	$\models_{Cl}$	$\models_{Cm}$	$\models_{T}$	$\models_{F}$	$\models_{TF}$
Н	*QCl*	–	*QL*	*QR*	*QLR*
Е	*QEqCl*	–	*QEqL*	*QEqR*	*QEqLR*
П	–	*QCl*	*QR*	*QL*	*QLR*
А	–	*QEqCl*	*QEqR*	*QEqL*	*QEqLR*
З	–	–	*QGS*	*QGS*	*QGS*

Тут і далі використано скорочення:
– Н – неокласична семантика;
– Е – неокласична семантика ЕП;
– П – пересичена семантика;
– А – пересичена семантика АП;
– З – загальна семантика.

Числення *QCl* – це різновидність числення *QG*, побудованого в [4]. Числення *QEqCl* – це різновидність відомого [2] неокласичного секвенційного числення.

Спеціальні секвенційні числення ЧКНЛ. Секвенційні числення, пропоновані в даній роботі, використовують, на відміну від [4–6], не *X*–*Y*-означені відношення логічного наслідку, а спеціальні предикати-індикатори наявності значення для предметних імен. При їх побудові також використовуємо спеціальні секвенційні форми елімінації кванторів під реномінацією.

Зауважимо, що тут ми будуємо секвенційні числення для класів ЧКНЛ, а не ε-ЧКНЛ. В наших численнях предикати-індикатори εy є допоміжним інструментом побудови виведень. Початкова секвенція, для якої будуємо дерево, не містить спеціальних символів εy. Ці символи можуть фігурувати в секвенціях лише в складі специфікованих формул ${}_{\vdash}\varepsilon y$ та ${}_{\dashv}\varepsilon y$; такі формули індукуються формами елімінації кванторів.

Числення QSC формалізує:

– відношення $\models_{Cl}$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_{Cm}$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Числення QMSC ідентичне численню *QEqCl* (див. [5, 6]), воно є різновидністю неокласичного секвенційного числення [2], по суті відрізняючись лише використанням форм елімінації кванторів під реномінацією. Числення *QMSC* формалізує:

– відношення $\models_{Cl}$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних ЕП;

– відношення $\models_{Cm}$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ тотальних АП.

Числення QSL формалізує:

– відношення $\models_{T}$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_{F}$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Числення QMSL формалізує:

– відношення $\models_{T}$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних ЕП;

– відношення $\models_{F}$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ тотальних АП.

Числення QSR формалізує:

– відношення $\models_{F}$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів;

– відношення $\models_{T}$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ неоднозначних тотальних предикатів.

Числення QMSR формалізує:

– відношення $\models_{F}$ (неокласична семантика) для ЧКНЛ однозначних ЕП;

– відношення $\models_{T}$ (пересичена семантика) для ЧКНЛ тотальних АП.

Числення QSLR формалізує відношення $\models_{TF}$ для ЧКНЛ однозначних часткових предикатів (неокласична семантика) та неоднозначних тотальних предикатів (пересичена семантика).

Числення QMSLR формалізує відношення $\models_{TF}$ для ЧКНЛ однозначних ЕП (неокласична семантика) та для ЧКНЛ тотальних АП (пересичена семантика).

Числення QSG формалізує відношення $|=_{TF}$ для загальної семантики ЧКНЛ неоднозначних часткових предикатів.

Розглянемо умови замкненості секвенції в різних численнях.

Базова умова замкненості $\vdash\Gamma\dashv\Delta$:

C) існує формула Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$.

Додаткова умова замкненості секвенції в усіх численнях – *unv*-замкненість.

Для секвенції Σ введемо множини означених та неозначених предметних імен, або множини *val*-змінних та *unv*-змінних:

$val(\Sigma) = \{x\in V \mid \dashv\varepsilon x\in\Sigma\}$;

$unv(\Sigma) = \{x\in V \mid \vdash\varepsilon x\in\Sigma\}$.

Нехай $Un = unv(\Sigma)$, нехай *R*-формула $R^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}\Phi$ така:

$\{r_1,\ldots, r_k, s,\ldots, s_k, y_1,\ldots, y_n\}\subseteq Un$, $\{x_1,\ldots, x_n\}\cap Un=\varnothing$, $\{v_1,\ldots, v_m\}\cap Un=\varnothing$.

Вираз $R^{x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots, u_m}_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon,\ v_1,\ldots, v_m}\Phi$, де ε позначає невизначене значення, назвемо *Un-unv*-формою формули $R^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}\Phi$.

R-формули Φ та Ψ *unv*-еквівалентні відносно *Un*, або *Un-unv*-еквівалентні, якщо Φ та Ψ мають однакові *Un-unv*-форми.

Якщо Φ та Ψ *Un-unv*-еквівалентні, то $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$ для кожних моделі мови $\boldsymbol{A}$ та $d\in{}^{V}\!A$, для яких $\varepsilon u_A(d) = T$ для всіх $u\in Un$.

Секвенцію $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ із множиною *unv*-змінних *Un* назвемо *unv*-замкненою, якщо:

UnC) існують *Un-unv*-еквівалентні *R*-формули Φ та Ψ такі, що $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi\in\Delta$.

Якщо $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv*-замкнена, то $\Gamma\,|\!=\Delta$.

Властивості *CL*, *CR*, *CLR*, які істотні для відношень $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, індукують додаткові умови CL, CR, CLR замкненості секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$:

CL) існує формула Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\neg\Phi\in\Gamma$;

CR) існує формула Ψ: $\Psi\in\Delta$ та $\neg\Psi\in\Delta$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі: $\Phi\in\Gamma$, $\neg\Phi\in\Gamma$, $\Psi\in\Delta$, $\neg\Psi\in\Delta$.

Зрозуміло, що CLR ⇔ CL та CR.

Для логіки ЕП у неокласичній семантиці та, дуально, для логіки АП у пересиченій семантиці, маємо додаткові умови замкненості секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$.

CMT) існують $y\in V$ та формули вигляду $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)$ і $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)$ такі, що $\varepsilon y\in\Gamma$ та виконується наступна умова:

$(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in\Gamma$ та $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)\in\Delta)$ або

$(\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in\Gamma$ та $\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)\in\Delta)$.

CMF) існують $y\in V$ та формули вигляду $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)$ і $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)$ такі, що $\varepsilon y\in\Gamma$ та виконується наступна умова:

$(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)\in\Gamma$ та $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in\Delta)$ або

$(\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)\in\Gamma$ та $\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in\Delta)$.

Згідно теорем 2 та 4, умова CMT гарантує наявність $\Gamma\,|\!=_T\Delta$ для логіки ЕП у неокласичній семантиці та $\Gamma\,|\!=_F\Delta$ для логіки АП у пересиченій семантиці; умова CMF гарантує наявність $\Gamma\,|\!=_F\Delta$ для логіки ЕП у неокласичній семантиці та $\Gamma\,|\!=_T\Delta$ для логіки АП у пересиченій семантиці; умова CMT & CMF гарантує наявність $\Gamma\,|\!=_{TF}\Delta$ для логіки ЕП у неокласичній семантиці та для логіки АП у пересиченій семантиці.

Підсумовуючи, наведемо умови замкненості секвенції в різних численнях.

Числення *QSC*: умова C ∨ UnC; числення *QMSC*: умова C.

Числення *QSL*: C ∨ CL ∨ UnC; числення *QMSL*: C ∨ CL ∨ UnC ∨ CMT.

Числення *QSR*: C ∨ CR ∨ UnC; числення *QMSR*: C ∨ CR ∨ UnC ∨ CMF.

Числення *QSLR*: C ∨ CLR ∨ UnC; *QMSLR*: C ∨ CLR ∨ UnC∨ CMT & CMF.

Числення *QSG*: умова C ∨ UnC.

Базовими секвенційними формами числень *QSL*, *QMSL*, *QSR*, *QMSR*, *QSLR*, *QMSLR*, *QSG* є наступні:

$\vdash\mathrm{RT}\ \dfrac{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A),\Sigma}{\vdash R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(A),\Sigma}$; $\quad\dashv\mathrm{RT}\ \dfrac{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A),\Sigma}{\dashv R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(A),\Sigma}$;

$\vdash\neg\mathrm{RT}\ \dfrac{\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A),\Sigma}{\vdash\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(A),\Sigma}$; $\quad\dashv\neg\mathrm{RT}\ \dfrac{\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A),\Sigma}{\dashv\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(A),\Sigma}$;

$\vdash\Phi\mathrm{N}\ \dfrac{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(A),\Sigma}{\vdash R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(A),\Sigma}$; $\quad\dashv\Phi\mathrm{N}\ \dfrac{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(A),\Sigma}{\dashv R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(A),\Sigma}$;

$\vdash\neg\Phi\mathrm{N}\ \dfrac{\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(A),\Sigma}{\vdash\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(A),\Sigma}$; $\quad\dashv\neg\Phi\mathrm{N}\ \dfrac{\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(A),\Sigma}{\dashv\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(A),\Sigma}$.

Для форм типу ΦN та ¬ΦN $y\in\nu(A)$.

$$_{\vdash}\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{_{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};\quad _{\dashv}\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\dashv}\neg\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\dashv}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{_{\dashv}\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\vdash}\exists xA,\Sigma}{_{\vdash}R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};\quad _{\dashv}\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\Sigma}{_{\dashv}R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};\quad _{\dashv}\neg\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\dashv}\neg\exists xA,\Sigma}{_{\dashv}\neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\neg\ \frac{_{\vdash}A,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg\neg A,\ \Sigma};\quad _{\dashv}\neg\neg\ \frac{_{\dashv}A,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg\neg A,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{_{\vdash}A,\ \Sigma\qquad _{\vdash}B,\ \Sigma}{_{\vdash}A\vee B,\ \Sigma};\quad _{\dashv}\vee\ \frac{_{\dashv}A,\ _{\dashv}B,\ \Sigma}{_{\dashv}A\vee B,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\vee\ \frac{_{\vdash}\neg A,\ _{\vdash}\neg B,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg(A\vee B),\ \Sigma};$$

$$_{\dashv}\neg\vee\ \frac{_{\dashv}\neg A,\ \Sigma\qquad _{\dashv}\neg B,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg(A\vee B),\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};\quad _{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{RR}\ \frac{_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$$_{\dashv}\neg\mathrm{RR}\ \frac{_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};\quad _{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};\quad _{\dashv}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\qquad _{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$$_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\ _{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\neg R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$$_{\dashv}\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\qquad _{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma}.$$

Форми $_{\vdash}$R∨ та $_{\dashv}$R∨, на відміну від однойменних форм в роботах [2, 4–8], тут фактично поєднані з формами $_{\vdash}\vee$ та $_{\dashv}\vee$. Зауважимо, що подібну будову мають також форми $_{\vdash}\neg$R¬, $_{\dashv}\neg$R¬, $_{\vdash}\neg$R∨, $_{\dashv}\neg$R∨.

Наведемо форми елімінації кванторів; ці форми використовують символи ε*z*:

$$_{\vdash}\exists\varepsilon\ \frac{_{\vdash}R^{x}_{z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\dashv}\neg\exists\varepsilon\ \frac{_{\dashv}\neg R^{x}_{z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\neg\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\exists\mathrm{R}\varepsilon\ \frac{_{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}\varepsilon\ \frac{_{\dashv}\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{f}\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R^{x}_{z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{f}\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R^{x}_{z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}\ \frac{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rf}\ \frac{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\vdash}\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для форм $_{\vdash}\exists\varepsilon$, $_{\dashv}\neg\exists\varepsilon$, $_{\dashv}\exists$f, $_{\vdash}\neg\exists$f умова: $z\in V_T$, $z\notin nm(\mathbf{\Sigma},\exists xA)$. Для $_{\vdash}\exists$Rε, $_{\dashv}\neg\exists$Rε, $_{\dashv}\exists$Rf, $_{\vdash}\neg\exists$Rf умова: $z\notin nm(\Sigma, R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA))$, $z\in V_T$.

Для $_{\dashv}\exists$f, $_{\vdash}\neg\exists$f, $_{\dashv}\exists$Rf, $_{\vdash}\neg\exists$Rf додаткова умова: **Σ** не містить формул вигляду $_{\dashv}\varepsilon z$.

$$_{\dashv}\exists\mathrm{v}\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{v}\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R^{x}_{y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{Rv}\ \frac{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rv}\ \frac{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\vdash}\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}.$$

Форми $_{\dashv}\exists$f, $_{\vdash}\neg\exists$f, $_{\dashv}\exists$Rf, $_{\vdash}\neg\exists$Rf – це форми типу ∃f; $_{\dashv}\exists$v, $_{\vdash}\neg\exists$v, $_{\dashv}\exists$Rv, $_{\vdash}\neg\exists$Rv – це форми типу ∃v.

2-засновкові форми $_{\dashv}\exists$d та $_{\vdash}\neg\exists$d:

$$\frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}\exists xA,\Sigma \qquad {}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}R_y^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA,\Sigma};$$

$$\frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma \qquad {}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\vdash}\neg R_y^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma}.$$

2-засновкові форми ${}_{\dashv}\exists$Rd та ${}_{\vdash}\neg\exists$Rd:

$$\frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma \qquad {}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};$$

$$\frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma \qquad {}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),{}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

${}_{\dashv}\exists$d, ${}_{\vdash}\neg\exists$d, ${}_{\dashv}\exists$Rd, ${}_{\vdash}\neg\exists$Rd – це форми типу $\exists$d. Для цих форм умова: εy не входить до Σ та Σ містить символи вигляду εz.

Форми ${}_{\vdash}\exists$Rε, ${}_{\dashv}\neg\exists$Rε, ${}_{\vdash}\exists\varepsilon$, ${}_{\dashv}\neg\exists\varepsilon$ назвемо $\exists_T$-формами, а форми типів $\exists$f, $\exists$v, $\exists$d назвемо $\exists_F$-формами.

Форми типів RT, $\neg$RT, ФN, $\neg$ФN, R$\exists$R, $\neg$R$\exists$R, R$\exists$p $\neg$R$\exists$p – *допоміжні*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

Базовими секвенційними формами числення *QSC* є ${}_{\vdash}$RT, ${}_{\dashv}$RT, ${}_{\vdash}$ФN, ${}_{\vdash}$ФN, ${}_{\vdash}$R$\exists$R, ${}_{\dashv}$R$\exists$R, ${}_{\vdash}$R$\exists$p, ${}_{\dashv}$R$\exists$p, ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}$RR, ${}_{\dashv}$RR, ${}_{\vdash}$R$\neg$, ${}_{\dashv}$R$\neg$, ${}_{\vdash}$R$\vee$, ${}_{\dashv}$R$\vee$, ${}_{\vdash}\exists\varepsilon$, ${}_{\vdash}\exists$Rε, ${}_{\dashv}\exists$f, ${}_{\dashv}\exists$Rf, ${}_{\dashv}\exists$v, ${}_{\dashv}\exists$Rv, ${}_{\dashv}\exists$d, ${}_{\dashv}\exists$Rd.

Для $|=_{Cl}$ та $|=_{Cm}$ можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини наслідку в праву і навпаки, тому в численні *QSC* форми для зовнішнього заперечення не потрібні. Форми ${}_{\vdash}\neg$ та ${}_{\dashv}\neg$ такі:

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\dashv}A,\ \Sigma}{{}_{\vdash}\neg A,\ \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\vdash}A,\ \Sigma}{{}_{\dashv}\neg A,\ \Sigma}.$$

Базовими секвенційними формами числення *QMSC* є ${}_{\vdash}$RT, ${}_{\dashv}$RT, ${}_{\vdash}$ФN, ${}_{\vdash}$ФN, ${}_{\vdash}$R$\exists$R, ${}_{\dashv}$R$\exists$R, ${}_{\vdash}$R$\exists$p,${}_{\dashv}$R$\exists$p, ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}$RR, ${}_{\dashv}$RR, ${}_{\vdash}$R$\neg$, ${}_{\dashv}$R$\neg$, ${}_{\vdash}$R$\vee$, ${}_{\dashv}$R$\vee$, а також форми елімінації кванторів ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\vdash}\exists$R, ${}_{\dashv}\exists$, ${}_{\dashv}\exists$R.

Традиційні форми елімінації кванторів ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\dashv}\exists$ та форми ${}_{\vdash}\exists$R, ${}_{\dashv}\exists$R не використовують символи εz предикатів-індикаторів:

$${}_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\vdash}R_z^x(A),\Sigma}{{}_{\vdash}\exists xA,\Sigma}; \qquad {}_{\vdash}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\ \frac{{}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}R_y^x(A),\Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

Нехай $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ та $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K} \quad {}_{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z}}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ – базові секвенційні форми. На основі властивостей відношень |= тоді маємо:

Теорема 5. 1) $\mathbf{\Lambda} \mathrel{|=} \mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{\Gamma} \mathrel{|=} \mathbf{\Delta}$;
$\mathbf{\Lambda} \mathrel{|=} \mathbf{K}$ та $\mathbf{X} \mathrel{|=} \mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{\Gamma} \mathrel{|=} \mathbf{\Delta}$;

2) $\mathbf{\Gamma} \mathrel{|\neq} \mathbf{\Delta} \Rightarrow \mathbf{\Lambda} \mathrel{|\neq} \mathbf{K}$;
$\mathbf{\Gamma} \mathrel{|\neq} \mathbf{\Delta} \Rightarrow \mathbf{\Lambda} \mathrel{|\neq} \mathbf{K}$ або $\mathbf{X} \mathrel{|\neq} \mathbf{Z}$.

Побудова секвенційного дерева. Процедура побудови секвенційного дерева розбита на етапи, вона починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед побудовою дерева зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* тотально неістотних імен такий, що $nm(\mathbf{\Sigma})\cap TN = \varnothing$. На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списків *T*-формул та *F*-формул. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (єдина *T*-формула чи *F*-формула, якщо один зі списків порожній).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, отримано замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією. Незамкнена вершина-секвенція Ω – *фінальна*, якщо до неї незастосовна жодна форма, або кожне застосування форми до Ω не вводить нових формул (відмінних від формул секвенцій на шляху від кореня до Ω).

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа $\boldsymbol{\xi}$ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною $\boldsymbol{\xi}$ таким чином. Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ. Далі до кожної активної формули застосовуємо відповідну основну форму (як описано нижче). За потреби застосовуємо належну кількість разів допоміжні форми типів RT, $\neg$RT, ФN, $\neg$ФN, R$\exists$R, $\neg$R$\exists$R, R$\exists$p, $\neg$R$\exists$p. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні. До таких формул на даному етапі основні форми вже не застосовуються.

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному застосуванні такої форми беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне ім'я *z* як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини. Потім застосовуємо форми типу RR, ¬RR, R¬, ¬R¬, R∨, ¬R∨, ¬¬, ∨, ¬∨. Далі застосовуємо $\exists_F$-форми. Це робимо так.

Якщо в момент застосування $\exists_F$-форми до певної *F*-формули Ψ секвенції $\boldsymbol{\xi}$ маємо $val(\boldsymbol{\xi}) = \varnothing$, то застосовуємо відповідну форму типу ∃f; якщо ж $val(\boldsymbol{\xi}) \neq \varnothing$, то застосовуємо відповідну форму типу ∃v, що робимо для кожного $z \in val(\boldsymbol{\xi})$. Нехай після такого застосування форми типу ∃f чи форм типу ∃v отримана секвенція $\boldsymbol{\eta}$. Далі до цієї Ψ багатократно застосовуємо відповідну 2-засновкову форму типу ∃d, добудовуючи скінченне піддерево з вершиною $\boldsymbol{\eta}$. Це робимо для всіх $y \in nm(\boldsymbol{\eta_0}) \setminus (val(\boldsymbol{\eta}) \cup unv(\boldsymbol{\eta}))$, де $\boldsymbol{\eta_0}$ – множина доступних на даний момент формул секвенції $\boldsymbol{\eta}$. Зауважимо, що $val(\boldsymbol{\eta}) = val(\boldsymbol{\eta_0})$ та $unv(\boldsymbol{\eta}) = unv(\boldsymbol{\eta_0})$, адже специфіковані формули вигляду $\vdash\varepsilon x$ та $\dashv\varepsilon x$ індукуються формами елімінації кванторів, тому вони не можуть бути серед недоступних формул секвенції.

Після виконання кожної форми перевіряємо на замкненість секвенції-вершини. При появі замкненої секвенції до неї незастосовна жодна форма, процес побудови дерева на цьому шляху обривається. Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції $\boldsymbol{\Sigma}$ завершена позитивно, то отримано скінченне замкнене дерево.

Якщо процедура завершена негативно (маємо скінченне незамкнене дерево) або процедура не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції $\boldsymbol{\Sigma}$ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

3. Теореми коректності та повноти

Для побудованих секвенційних числень справджується:

Теорема 6 (коректності). 1) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QSC*-численні $\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{Cl} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{Cm} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій;

2) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QMSC*-численні $\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{Cl} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці логіки ЕП та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{Cm} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці логіки АП;

3) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QSL*-численні $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Gamma} \models_{T} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{F} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій;

4) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QMSL*-численні $\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{T} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці логіки ЕП та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{F} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці логіки АП;

5) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QSR*-численні $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Gamma} \models_{F} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{T} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій;

6) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QMSR*-численні $\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{F} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці логіки ЕП та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{T} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці логіки АП;

7) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QSLR*-численні $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Gamma} \models_{TF} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці та в пересиченій семантиці;

8) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QMSLR*-численні $\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{TF} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці логіки ЕП та в пересиченій семантиці логіки АП;

9) $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в *QSG*-численні $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Gamma} \models_{TF} \boldsymbol{\Delta}$ в загальній семантиці.

Доведення. Нехай $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Із процедури побудови випливає, що $\boldsymbol{\Lambda} \models \mathbf{K}$ для кожної його вершини $\vdash\boldsymbol{\Lambda}\dashv\mathbf{K}$. Для листів дерева це випливає з їх замкненості. Збереження секвенційними формами відповідних відношень $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$, $\models_{T}$, $\models_{F}$, $\models_{TF}$ (від засновків до висновків) випливає із теореми 5.

Повнота побудованих секвенційних числень випливає із відповідних теорем про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху секвенційного дерева. Доведення цих теорем опирається на метод модельних множин [9, 2].

Числення *QSG*. Сформулюємо теорему про контрмоделі для числення *QSG*.

Теорема 7. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$, нехай $\boldsymbol{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I})$ та δ, $\eta \in {}^{V}\!A$ такі:

1) $\vdash\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$;

2) $\vdash\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \eta \notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $\dashv\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \eta \in \boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Пари $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та $(\boldsymbol{B}, \eta)$ із такими властивостями називатимемо *T-контрмоделлю* та *F-контрмоделлю* для секвенції $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$.

Множини $W = \{y \in nm(\boldsymbol{H}) \mid \dashv \varepsilon y \in \boldsymbol{H}\}$ та $Un = \{y \in nm(\boldsymbol{H}) \mid \vdash \varepsilon y \in \boldsymbol{H}\}$ назвемо відповідно множиною означених імен та множиною неозначених імен множини $\boldsymbol{H}$.

Доведення. Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула чи її заперечення, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості $\mathrm{C} \vee \mathrm{UnC}$. Отже, для множини $\boldsymbol{H}$ виконуються такі умови коректності:

HC) не існує примітивної формули Φ такої, що $\vdash\Phi \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv\Phi \in \boldsymbol{H}$;

HCU) не існує примітивних *Un-unv*-еквівалентних формул $R^{\bar v}_{\bar x}A$ та $R^{\bar u}_{\bar y}A$ таких, що $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}A \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv R^{\bar u}_{\bar y}A \in \boldsymbol{H}$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої відбуваються згідно з відповідною секвенційною формою, тому для $\boldsymbol{H}$ виконуються такі умови переходу:

HRT) $\vdash R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

H¬RT) $\vdash \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

HΦN) при умові $y \in \nu(\Phi)$ маємо:

$\vdash R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

H¬ΦN) при умові $y \in \nu(\Phi)$ маємо:

$\vdash \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

HR∃R) $\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

H¬R∃R) $\vdash \neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash \neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

HR∃p) $\vdash R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \vdash \exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$;

H¬R∃p) $\vdash \neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash \neg\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \neg\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$;

H¬¬) $\vdash \neg\neg\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \vdash \Phi \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg\neg\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \Phi \in \boldsymbol{H}$;

H∨) $\vdash \Phi\vee\Psi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \vdash \Phi \in \boldsymbol{H}$ або $\vdash \Psi \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \Phi\vee\Psi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \Phi \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv \Psi \in \boldsymbol{H}$;

H¬∨) $\vdash \neg(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash \neg\Phi \in \boldsymbol{H}$ та $\vdash \neg\Psi \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \neg\Phi \in \boldsymbol{H}$ або $\dashv \neg\Psi \in \boldsymbol{H}$;

HRR) $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

H¬RR) $\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

HR¬) $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

H¬R¬) $\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

HR∨) $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ або $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

H¬R∨) $\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ або $\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

H∃) $\vdash \exists x\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$ існує $y \in W$ таке, що $\vdash R^{x}_{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

$\dashv \exists x\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \dashv R^{x}_{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ для всіх $y \in W$;

H¬∃) $\vdash \neg\exists x\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \vdash \neg R^{x}_{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ для всіх $y \in W$;

$\dashv \neg\exists x\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow$ існує $y \in W$ таке, що

$_{\dashv}\neg R_y^x(\Phi)\in \boldsymbol{H}$;

H∃R) $_{\vdash}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\in \boldsymbol{H}\ \Rightarrow$ існує $y\in W$ таке, що $_{\vdash}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$;

$_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\in \boldsymbol{H}\Rightarrow\ _{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$;

H¬∃R) $_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\in \boldsymbol{H}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ _{\vdash}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$;

$_{\dashv}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\in \boldsymbol{H}\ \Rightarrow$ існує $y\in W$ таке, що $_{\dashv}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$.

Виконання для $\boldsymbol{H}$ умов переходу очевидне майже для всіх цих умов. Доведемо для прикладу H¬∨ та H∃R.

H¬∨). Нехай $_{\vdash}\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху $\wp$ до T-формули $\neg(\Phi\vee\Psi)$ була застосована $_{\vdash}\neg\vee$-форма, яка дала T-формули $\neg\Phi$ та $\neg\Psi$, звідки отримуємо $_{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $_{\vdash}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$. Нехай $_{\dashv}\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху $\wp$ до F-формули $\neg(\Phi\vee\Psi)$ була застосована $_{\dashv}\neg\vee$-форма, яка дала F-формулу $\neg\Phi$ або F-формулу $\neg\Psi$, звідки $_{\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $_{\dashv}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

H∃R). Нехай $_{\vdash}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху $\wp$ до T-формули $R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)$ була застосована $_{\vdash}\exists$R-форма, яка дала приклад – T-формулу $R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)$. Тоді $_{\vdash}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, тому $y\in W$. Отже, для деякого $y\in W$ маємо $_{\vdash}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Нехай $_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$; тоді при кожній активізації цієї F-формули до відповідної вершини-секвенції $\boldsymbol{\eta}$ додаються, згідно відповідної $\exists_F$-форми, її приклади – F-формули $R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)$ – для кожного y такого, що $_{\dashv}\varepsilon y\in\boldsymbol{\Sigma_0}$, де $\boldsymbol{\Sigma_0}$ – множина доступних формул $\boldsymbol{\eta}$. Отже, якщо $_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$ то $_{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$.

Множину специфікованих формул $\boldsymbol{H}$, для якої виконуються вищенаведені умови, назвемо *G-модельною*.

Перейдемо до побудови контрмоделі за G-модельною множиною $\boldsymbol{H}$.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деякі ін'єктивні $\delta,\eta\in{}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$. Така A дублює множину W.

Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ і η та на іменних множинах вигляду $\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)$ і $\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)$:

– $_{\vdash}\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\varepsilon y_A)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(\varepsilon y_B)$;
– $_{\dashv}\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\varepsilon y_A)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\varepsilon y_B)$;
– $_{\vdash}p\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(p_A)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\dashv}p\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(p_A)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\vdash}\neg p\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\neg p_A)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg p_B)$;
– $_{\dashv}\neg p\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg p_A)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg p_B)$;
– $_{\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\in\boldsymbol{T}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\notin\boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\notin\boldsymbol{T}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\in\boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\vdash}\neg R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\in\boldsymbol{T}(\neg p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\notin\boldsymbol{F}(\neg p_B)$;
– $_{\dashv}\neg R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\notin\boldsymbol{T}(\neg p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\in\boldsymbol{F}(\neg p_B)$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів і їх заперечень задаємо довільно, враховуючи обмеження щодо неістотності предметних імен: для всіх $d, h\in{}^{V}\!A$ таких, що $d\|\text{-}\nu(p) = h\|\text{-}\nu(p)$, маємо $p_A(d) = p_A(h)$, $\neg p_A(d) = \neg p_A(h)$, $p_B(d) = p_B(h)$, $\neg p_B(d) = \neg p_B(h)$. Це гарантує, що всі $y\in\nu(p)$ строго неістотні для p_A та p_B.

Для атомарних формул і формул вигляду $R_{\bar x}^{\bar v}(p)$ та їх заперечень твердження теореми випливає з визначення базових предикатів. Далі доводимо (див. [5, 6]) традиційно: індукцією за складністю формули згідно з пунктами визначення множини $\boldsymbol{H}$.

Наведемо як приклад доведення для пунктів HR∨ та H∃R визначення $\boldsymbol{H}$

Нехай $_{\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR∨ маємо $_{\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ або $_{\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ тоді маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)_A)$ або $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)_A)$, звідки отримуємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)_A) =$ $= \boldsymbol{T}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)_A) = \boldsymbol{T}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η тепер маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)_B)$ або $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)_B)$, звідки отримуємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)_B)\cap\boldsymbol{F}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)_B) =$ $= \boldsymbol{F}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)_B) = \boldsymbol{F}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $_{\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR∨ маємо $_{\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ тоді маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A))$ та $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A))$, звідки отримуємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A) = \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A) = \boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η тепер маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B))$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B))$, звідки отримуємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)\cap\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B) = \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B) = \boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $_{\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H∃R існує $y\in W$: $_{\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$. Звідси $\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto\delta(y)\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Однак $\delta(y)\downarrow$ згідно з $\delta\in{}^{W}A$ та $y\in W$, звідки для $a=\delta(y)$ маємо $\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ тому $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$. Тепер за припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_B)$. Звідси $\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto\eta(y)\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$. Однак $\eta(y)\downarrow$ згідно з $\eta\in{}^{W}A$ та $y\in W$, тому для $a=\eta(y)$ маємо $\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_B)$.

Нехай $_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H∃R для всіх $y\in W$ маємо $_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ тоді для всіх $y\in W$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$. Звідси для всіх $y\in W$ маємо $\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto\delta(y)\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Згідно з $\delta\in A^W$ маємо $\delta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк δ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\delta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto b\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для всіх $b\in A$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$. Тепер за припущенням індукції для η для всіх $y\in W$ маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_B$. Звідси для всіх $y\in W$ маємо $\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto\eta(y)\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$. Згідно з $\eta\in A^W$ маємо $\eta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк η є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\eta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, для всіх $b\in A$ маємо $\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto b\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_B)$.

Числення *QSL, QSR, QSLR, QMSL, QMSR, QMSLR*. Для цих числень теорема про контрмоделі формулюється аналогічно. Відмінність полягає у різних умовах коректності модельної множини, а для числень *QMSL, QMSR, QMSLR* при заданні значення базових предикатів та їх заперечень ураховуємо еквітонність.

Із умов CL, CR, CLR замкненості секвенції отримуємо відповідні умови коректності для модельних множин:

HCL) не існує примітивної формули Φ такої, що $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $_{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$;

HCR) не існує примітивної формули Ψ такої, що $_{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$;

HCLR) не існує примітивних формул Φ та Ψ таких, що виконуються наступні умови: $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$, $_{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, $_{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}$, $_{\dashv}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

Зрозуміло, що HCLR ⇔ HCL ∨ HCR.

Для числень логік ЕП у неокласичній семантиці та логік АП у пересиченій семантиці маємо додаткові умови коректності модельних множин (випливають із умов CMT і CMF замкненості секвенції):

HCMT) не існує примітивних формул $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$ і $R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)$ таких, що $y\in Un$ та виконується умова:

($_{\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$) або

($_{\vdash}\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$).

HCMF) не існує примітивних формул $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$ і $R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)$ таких, що $y\in Un$ та виконується умова:

($_{\vdash}R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$) або

($_{\vdash}\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$).

Таким чином, приходимо до наступних визначень.

Множина специфікованих формул ***H***, для якої виконуються умови переходу *G*-модельної множини:

– *L-модельна*, якщо для ***H*** виконуються умови коректності HC, HCL, HCU;

– *R-модельна*, якщо для ***H*** виконуються умови коректності HC, HCR, HCU;

– *LR-модельна*, якщо для ***H*** виконуються умови коректності HC, HCLR, HCU;

– *ML-модельна*, якщо для ***H*** виконуються умови HC, HCL, HCU, HCMT;

– *MR-модельна*, якщо для ***H*** виконуються умови HC, HCR, HCU, HCMF;

– *MLR-модельна*, якщо для ***H*** виконуються умови коректності HC, HCLR, HCU, HCMT ∨ HCMF.

Доведення теореми про контрмоделі для числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*, *QMSL*, *QMSR*, *QMSLR* аналогічне доведенню цієї теореми для числень *QSG*.

Зауважимо, що для *T*-контрмоделі δ невиконання умови HCL, тобто наявність формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, дає $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)=\boldsymbol{F}(\Phi_A)$, звідки маємо неоднозначність Φ_A. Для *F*-контрмоделі η невиконання умови HCR, тобто наявність Φ такої, що $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, дає $\eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg\Phi_B)=\boldsymbol{T}(\Phi_B)$, звідки маємо неоднозначність Φ_B.

Числення *QSC*. Сформулюємо теорему про контрмоделі для числення *QSC*.

Теорема 8. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$, нехай $\boldsymbol{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I})$ та $\delta,\eta\in{}^{V}\!A$ такі:

1) $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$;

2) $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)$.

Пари $(\boldsymbol{A},\delta)$ та $(\boldsymbol{B},\eta)$ із такими властивостями назвемо *Cl*-контрмоделлю та *Cm*-контрмоделлю для секвенції $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$.

Доведення. Вводимо множини означених імен $W=\{y\in nm(\boldsymbol{H})\mid\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$ та неозначених імен $Un=\{y\in nm(\boldsymbol{H})\mid\vdash\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості $\mathrm{C}\vee\mathrm{UnC}$. Застосування форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула на шляху $\wp$ буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою числення *QSC*.

Отже, для множини $\boldsymbol{H}$ виконуються умови коректності HC і HCU та умови переходу H$\neg$, H$\vee$, HRT, HΦN, HR$\exists$R, HR$\exists$p, HRR, HR$\neg$, HR$\vee$, H$\exists$, H$\exists$R. Тут умова H$\neg$:

H$\neg$) $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$;
$\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$.

Множину $\boldsymbol{H}$ із такими властивостями назвемо *C-модельною*.

Доведення теореми 8 аналогічне доведенню теореми 7. Спочатку задаємо значення базових предикатів на δ і η та на іменних множинах вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$ і $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)$:

– $\vdash\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\varepsilon y_A)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(\varepsilon y_B)$;
– $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\varepsilon y_A)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\varepsilon y_B)$;
– $\vdash p\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(p_A)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(p_B)$;
– $\dashv p\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{F}(p_A)$ та $\eta\notin\boldsymbol{T}(p_B)$;
– $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)\in\boldsymbol{T}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)\notin\boldsymbol{F}(p_B)$;
– $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)\in\boldsymbol{F}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)\notin\boldsymbol{T}(p_B)$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів задаємо довільно, враховуючи обмеження щодо неістотності імен: $p_A(d)=p_A(h)$ і $p_B(d)=p_B(h)$ для всіх $d,h\in{}^{V}\!A$ таких, що $d\,\|\text{-}\nu(p)=h\,\|\text{-}\nu(p)$. Це гарантує, що всі $y\in\nu(p)$ строго неістотні для p_A та p_B.

Для атомарних формул і формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ твердження теореми випливає з визначення базових предикатів.

Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з пунктами визначення *C*-модельної множини. Наведемо для прикладу доведення для пп. HR$\exists$R та H$\neg$.

Нехай $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR$\exists$R $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$; За припущенням індукції для δ тоді $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)=\boldsymbol{T}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η отримуємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_B)=\boldsymbol{F}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)_B)$.

Нехай $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR$\exists$R $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ тоді $\delta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)=\boldsymbol{F}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η отримуємо $\eta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_B)=\boldsymbol{T}(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)_B)$.

Нехай $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$. Згідно H$\neg$ маємо $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)=\boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)=\boldsymbol{F}(\neg\Phi_B)$.

Нехай $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$. Згідно H$\neg$ маємо $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)=\boldsymbol{F}(\neg\Phi_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)=\boldsymbol{T}(\neg\Phi_B)$.

Повнота першопорядкових числень логіки ЕП, різновидністю яких є числення *QMSC*, доведена в [2]. Для цих числень теорему про контрмоделі тут не розглядаємо.

Теореми повноти. Для різних числень та логічних наслідків ці теореми формулюються однотипно. Вони доводяться на основі теорем про контрмоделі.

Теорема 9. 1) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{Cl}} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSC*;

2) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{Cm}} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSC*.

Доводимо п.1. Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{Cl}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ існує незамкнений шлях. Множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *C*-модельна. Зрозуміло, що $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq\boldsymbol{H}$. За теоремою 8 існує *Cl*-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ така: $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Згідно з $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq\boldsymbol{H}$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ та $\delta\in\boldsymbol{F}(\Psi_A)$ для всіх $\Psi\in\Delta$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Отже, $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{F}(\Delta_A) \neq \varnothing$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{Cl}} \boldsymbol{\Delta}$.

Доводимо п.2. Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{Cm}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ невивідна. Міркуючи, як в доведенні п.1, маємо *C*-модельну $\boldsymbol{H}$. За теоремою 8 існує *Cm*-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \eta)$: $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)$. Згідно з $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Gamma_B)\cup\boldsymbol{T}(\Delta_B)$, тому отримуємо $\boldsymbol{F}(\Gamma_B)\cup\boldsymbol{T}(\Delta_B) \neq {}^{V}A$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{Cm}} \boldsymbol{\Delta}$.

Теорема 10. 1) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSL*;

2) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSL*.

3) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSR*;

4) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSR*.

5) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці чи $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSLR*.

Наведемо доведення п. 5. Пп. 1–4 доводяться аналогічно (див. також [5, 6]).

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ існує незамкнений шлях. Множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *LR*-модельна, $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq\boldsymbol{H}$. За теоремою 7 існують *T*-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ і *F*-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \eta)$:

$$\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A) \text{ та } \dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A);$$

$$\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B) \text{ та } \dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B).$$

Якщо за умови HCLR невірна HCL (тоді маємо HCR), то для *T*-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, а для *F*-контрмоделі – нетотальний предикат; тому для логіки однозначних предикатів беремо *F*-контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – *T*-контрмодель.

Якщо за умови HCLR невірна HCR (тоді маємо HCL), то для *F*-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, а для *T*-контрмоделі – нетотальний предикат; тому для логіки однозначних предикатів беремо *T*-контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – *F*-контрмодель.

Якщо вірні HCL і HCR, то можна брати як *T*-контрмодель, так і *F*-контрмодель.

Для *T*-контрмоделі згідно з $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Delta_A)$, тому невірно $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta_A)$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$.

Для *F*-контрмоделі згідно з $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\boldsymbol{\Delta}$ маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Gamma}_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\Delta_B)$, тому невірно $\boldsymbol{F}(\Delta_B)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{B}} \models_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$.

Подібним чином доводиться

Теорема 11. 1) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці логіки ЕП $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QMSL*;

2) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці логіки АП $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QMSL*;

3) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці логіки ЕП $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QMSR*;

4) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці логіки АП $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QMSR*;

5) $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ в неокласичній семантиці логіки ЕП чи $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ в пересиченій семантиці логіки АП $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QMSLR*.

Теорема 12. $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ в загальній семантиці $\Rightarrow$ $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна в численні *QSG*.

Доведення. Нехай маємо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ невивідна. Тоді в дереві для $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ існує незамкнений шлях. Множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *G*-модельна, причому маємо $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}\subseteq\boldsymbol{H}$. За теоремою 7 існують *T*-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та *F*-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \eta)$ такі:

$$\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A) \text{ та } \dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A);$$

$$\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B) \text{ та } \dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B).$$

Тут можна брати як *T*-контрмодель, так і *F*-контрмодель.

Далі доводимо як в п. 5 теореми 10.

Підсумовуючи, наведемо спектр побудованих секвенційних числень чистих першопорядкових КНЛ (табл. 2). Для позначення семантик тут використано скорочення із табл. 1.

Таблиця 2. Спеціальні секвенційні числення чистих першопорядкових КНЛ

	$\models_{Cl}$	$\models_{Cm}$	$\models_{T}$	$\models_{F}$	$\models_{TF}$
Н	*QSC*	–	*QSL*	*QSR*	*QSLR*
Е	*QMSC*	–	*QMSL*	*QMSR*	*QMSLR*
П	–	*QSC*	*QSR*	*QSL*	*QSLR*
А	–	*QMSC*	*QMSR*	*QMSL*	*QMSLR*
З	–	–	*QSG*	*QSG*	*QSG*

Використовуючи табл. 2, поєднаємо теореми коректності та повноти:

Теорема 13. Для семантики α маємо: $\mathbf{\Gamma} \models_{*} \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow {}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$ вивідна в численні β.

Тут $*$ – одне з *T*, *F*, *TF*, *Cl*, *Cm*; α – одна з семантик, скорочене позначення якої є іменем рядка таблиці. Назву β числення читаємо на перетині стовпця $\models_{*}$ та рядка α.

Висновки

В роботі досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. На основі різних формалізацій відношення логічного наслідку для цих логік побудовано спектр числень секвенційного типу. Низка таких числень була раніше збудована на базі *X*–*Y*-означених відношень логічного наслідку.

В даній роботі при побудові числень використано спеціальні предикати-індикатори наявності значення для змінних. Такі числення запропоновано як для загального випадку квазіарних предикатів, так і для логік еквітонних та логік антитонних предикатів. Для пропонованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Побудову подібних числень секвенційного типу планується продовжити для логік кванторно-еквацийного рівня.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford Univ. Press. – Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
3. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Проблеми програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
4. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 32–49.
5. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення першопорядгових логік однозначних квазіарних предикатів // Проблеми програмування. – 2012. – № 1. – С. 34–51.
6. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів // Проблеми програмування. – 2012. – № 2–3. – С. 33–43.
7. *Шкільняк С.С.* Спеціальні секвенційні числення логік однозначних квазіарних предикатів // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 3. – С. 287–292.
8. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Спеціальні секвенційні числення чистих композиційно-номінативних логік першого порядку // Вісник Київського ун-ту. Серія: кібернетика. – К., 2012. – Вип. 12. – С. 38–45.
9. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия – М., 1996. – 304 с.
10. *Nikitchenko M., Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 347. – P. 89–110. – Springer, 2012.

Одержано 24.10.2012

Про автора:

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії та технології програмування.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0519,
(044) 522 0640 (д).
E-mail: sssh@unicyb.kiev.ua