УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ШАРІ З ПОРОЖНИНОЮ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв’язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндричному шарі з порожниною.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв’язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, техніки та сучасних технологій.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей) та геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв’язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв’язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач за Адамаром для тих чи інших областей [1–5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6–9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, які породженні диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [11–18].

Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних циліндричних областях розглянуто у працях автора [19–21].

У цій статті ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндричного шару.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D=\left\{(t,r,\varphi,z);\, t>0;\, (r,\varphi)\in\Omega_2=(R_0;+\infty)\times[0;2\pi);\, z\in K_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}\mathrm{I}_j\equiv\right.$$

$$\left.\equiv\bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j),\, l_0\ge 0;\, l_k<l_{k+1};\, l_{n+1}\equiv l<+\infty\right\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+\chi_j^2u_j=f_j(t,r,\varphi,z),\tag{1}$$

$$z\in\mathrm{I}_j;\, j=\overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0}=g_j^1(r,\varphi,z);\, \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_j^2(r,\varphi,z);\, z\in\mathrm{I}_j;\, j=\overline{1,n+1},\tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_1\Big|_{z=l_0}=g_0(t,r,\varphi);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\Big|_{z=l}=g_l(t,r,\varphi),\tag{3}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h\right)u_j\Big|_{r=R_0}=\theta_j(t,\varphi,z),\frac{\partial^k u_j}{\partial r^k}\Big|_{r=+\infty}=0;\, j=\overline{1,n+1};k=0,1;R_0>0\tag{4}$$

та умовами спряження [11]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^{k}\right)u_{k}-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n},\quad (5)$$

де a_{rj}, a_{zj}, χ_j, α_{js}^{k}, β_{js}^{k}, h — деякі невід’ємні сталі;

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}\neq 0;\ \ c_{1k}c_{2k}>0;\left|\alpha_{11}^{0}\right|+\left|\beta_{11}^{0}\right|\neq 0;\left|\alpha_{22}^{n+1}\right|+\left|\beta_{22}^{n+1}\right|\neq 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\left\{f_1(t,r,\varphi,z),\ f_2(t,r,\varphi,z),\ldots,\ f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z),\ g_2^1(r,\varphi,z),\ \ldots,\ g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z),\ g_2^2(r,\varphi,z),\ldots,\ g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\};$$

$$\theta(t,\varphi,z)=\left\{\theta_1(t,\varphi,z),\theta_2(t,\varphi,z),\ldots,\theta_{n+1}(t,\varphi,z)\right\};$$

$g_0(t,r,\varphi), g_l(t,r,\varphi)$ — задані обмежені неперервні функції; $u(t,r,\varphi,z)=$ $=\left\{u_1(t,r,\varphi,z),\ u_2(t,r,\varphi,z),\ldots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\}$ — шукана функція.

Основна частина. Припустимо, що розв’язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [23; 24; 11].

До задачі (1)–(5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур’є щодо кутової змінної φ [24]:

$$F_m\left[g(\varphi)\right]=\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,e^{-im\varphi}d\varphi\equiv g_m, i=\sqrt{-1},\quad (6)$$

$$F_m^{-1}\left[g_m\right]=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m g_m e^{im\varphi}\right)\equiv g(\varphi),\quad (7)$$

$$F_m\left[\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right]=-m^2F_m\left[g(\varphi)\right]\equiv -m^2g_m,\quad (8)$$

де $\mathrm{Re}(\ldots)$ — дійсна частина виразу $(\ldots)$ щодо φ, $\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_k=2$; $k=1,2,3,\ldots$

Інтегральний оператор Фур’є F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D'=\left\{(t,r,z);\ t>0;r\in(R_0;+\infty);\ z\in K_n^{+}\right\}$$

розв’язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm}+\chi_j^2u_{jm}=f_{jm}(t,r,z),\quad (9)$$

$$z\in \mathrm{I}_j,\ j=\overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm}\Big|_{t=0} = g_{jm}^1(r,z);\ \frac{\partial u_{jm}}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_{jm}^2(r,z); z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1,n+1}, \qquad (10)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) u_{1m}\Big|_{z=l_0} = g_{0m}(t,r); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) u_{n+1,m}\Big|_{z=l} = g_{lm}(t,r), \quad (11)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + h\right) u_{jm}\Big|_{r=R_0} = \theta_{jm}(t,z); \frac{\partial^k u_{jm}}{\partial r^k}\Big|_{r=+\infty} = 0; z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1,n+1}, k = 0,1 \quad (12)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right) u_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1,m}\right]\Big|_{z=l} = 0;\ j = 1,2; k = \overline{1,n}. \quad (13)$$

До задачі (9)–(13) застосуємо інтегральне перетворення Вебера щодо радіальної змінної r [23]:

$$H_{\nu,0}\left[g(r)\right] = \int_0^{+\infty} g(r) f_{\nu,0}(r,\lambda) r dr \equiv \tilde{g}(\lambda), \qquad (14)$$

$$H_{\nu,0}^{-1}\left[\tilde{g}(\lambda)\right] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\lambda) \frac{f_{\nu,0}(r,\lambda)\lambda d\lambda}{A_{\nu,0}^2(\lambda) + B_{\nu,0}^2(\lambda)} \equiv g(r), \qquad (15)$$

$$H_{\nu,0}\left[\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} g\right] = -\lambda^2 \tilde{g}(\lambda) + R_0 f_{\nu,0}(R_0,\lambda)\left(-\frac{dg}{dr} + hg\right)\Big|_{r=R_0}, \quad (16)$$

де

$$f_{\nu,0}(r,\lambda) = B_{\nu,0}(\lambda) N_\nu(\lambda r) - A_{\nu,0}(\lambda) J_\nu(\lambda R),$$

$$B_{\nu,0}(\lambda) = \left(\frac{\nu}{R_0} + h\right) J_\nu(\lambda R_0) - \lambda J_{\nu-1}(\lambda R_0),$$

$$A_{\nu,0}(\lambda) = \left(\frac{\nu}{R_0} + h\right) N_\nu(\lambda R_0) - \lambda N_{\nu-1}(\lambda R_0),$$

$J_\nu(x), N_\nu(x)$ — циліндричні функції дійсного аргумента 2-го роду ν-го порядку.

Інтегральний оператор $H_{m,0}$ за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (9)–(13) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \left\{(t,z); t > 0; z \in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial z^2} + \left(a_{rj}^2 \lambda^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm} = \tilde{F}_{jm}\left(t,\lambda,z\right);\ z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1,n+1} \quad (17)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1\left(\lambda,z\right);\ \frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2\left(\lambda,z\right);\ z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1,n+1}, \quad (18)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{u}_{1m}\bigg|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}\left(t,\lambda\right);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{u}_{n+1,m}\bigg|_{z=l} = \tilde{g}_{lm}\left(t,\lambda\right) \quad (19)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1,m}\right]\bigg|_{z=l_m} = 0;\ j = 1,2;\ k = \overline{1,n}, \quad (20)$$

де

$$\tilde{F}_{jm}\left(t,\lambda,z\right) = \tilde{f}_{jm}\left(t,\lambda,z\right) + a_{rj}^2 R_0 f_{m,0}\left(R_0,\lambda\right)\theta_{jm}\left(t,z\right);\ j = \overline{1,n+1}.$$

До задачі (17)–(20) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $\left[l_0;l\right]$ з n точками спряження щодо змінної z [11]:

$$F_{sn}\left[g\left(z\right)\right] = \int_{l_0}^{l} g\left(z\right)V\left(z,\lambda_s\right)\sigma\left(z\right)dz \equiv g_s, \quad (21)$$

$$F_{sn}^{-1}\left[g_s\right] = \sum_{s=1}^{\infty} g_s \frac{V\left(z,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_s\right)\right\|^2} \equiv g\left(z\right), \quad (22)$$

$$\begin{gathered}
F_{sn}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_{zi}^2 \theta\left(z-l_{i-1}\right)\theta\left(l_i - z\right)\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = \\
= -\lambda_s^2 g_s - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} g\left(z\right)V_i\left(z,\lambda_s\right)\sigma_i dz - \\
-\sigma_1 a_{z1}^2 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1\left(l_0,\lambda_s\right)\left(\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g\right)\bigg|_{z=l_0} + \\
+\sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}\left(l,\lambda_s\right)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g\right)\bigg|_{z=l}.
\end{gathered} \quad (23)$$

У формулах (21)–(23) беруть участь величини і функції:

$$V\left(z,\lambda_s\right) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i\left(z,\lambda_s\right)\theta\left(z-l_{i-1}\right)\theta(l_i - z);$$

$$\sigma(z)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);$$

$$\sigma_k=\frac{a_{z,k+1}}{a_{zk}^2}\prod_{m=k}^{n}c_{1m}c_{2m};\sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{z,n+1}};\quad k=\overline{1,n};$$

$$V_m(z,\lambda_s)=\prod_{i=m}^{n}c_{2i}q_{i+1,s}G_m(z,\lambda_s);m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\lambda_s)=\omega_{n2}(\lambda_s)\cos(q_{n+1,s}z)-\omega_{n1}(\lambda_s)\sin(q_{n+1,s}z);$$

$$G_m(z,\lambda_s)=\omega_{m-1,2}(\lambda_s)\cos(q_{ms}z)-\omega_{m-1,1}(\lambda_s)\sin(q_{ms}z);$$

$$\left\|V(z,\lambda_s)\right\|^2=\int_{l_0}^{l}V^2(z,\lambda_s)\sigma(z)dz=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{l_{k-1}}^{l_k}V_k^2(z,\lambda_s)\sigma_k dz;$$

$$q_j\equiv q_j(\lambda)=a_{z,s}^{-1}\left(\lambda^2+k_s^2\right)^{1/2};q_{js}=q_j(\lambda_s);$$

$$v_{ip}^{k1}(q_{js}l_m)=-\alpha_{ip}^k q_{sj}\sin(q_{js}l_m)+\beta_{ip}^k\cos(q_{js}l_m);$$

$$v_{ip}^{2}(q_{js}l_m)=\alpha_{ip}^k q_{js}\cos(q_{js}l_m)+\beta_{ip}^k\sin(q_{js}l_m);$$

$$\omega_{01}(\lambda_s)=v_{11}^{01}(q_{1s}l_0);\omega_{02}(\lambda_s)=v_{11}^{02}(q_{1s}l_0);$$

$$\psi_{pm}^k(x,y)=v_{11}^{kp}(x)v_{22}^{km}(y)-v_{21}^{kp}(x)v_{12}^{km}(y);$$

$$\omega_{pm}(\lambda_s)=\omega_{p-1,2}(\lambda_s)\psi_{1m}^p(q_{pj}l_p,q_{p+1,s}l_p)-\omega_{p-1,1}(\lambda_s)\psi_{2m}^p(q_{ps}l_p,q_{p+1,j}l_p);$$

λ_s — корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda)\equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}l)\omega_{n1}(\lambda)-v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}l)\omega_{n2}(\lambda)=0,$$

які утворюють дискретний спектр.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (17) та початкові умови (18) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+a_{r1}^2\lambda^2+\chi_1^2\right)\tilde{u}_{1m}\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z2}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+a_{r2}^2\lambda^2+\chi_2^2\right)\tilde{u}_{2m}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z,n+1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+a_{r,n+1}^2\lambda^2+\chi_{n+1}^2\right)\tilde{u}_{n+1,m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{F}_{1m}(t,\lambda,z)\\ \tilde{F}_{2m}(t,\lambda,z)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{F}_{n+1,m}(t,\lambda,z)\end{bmatrix},\quad(24)$$

$$\left.\begin{bmatrix}\tilde{u}_{1m}\\ \tilde{u}_{2m}\\ \dots\dots\\ \tilde{u}_{n+1,m}\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{1m}^{1}(\lambda,z)\\ \tilde{g}_{2m}^{1}(\lambda,z)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{g}_{n+1,m}^{1}(\lambda,z)\end{bmatrix},\ \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix}\tilde{u}_{1m}\\ \tilde{u}_{2m}\\ \dots\dots\\ \tilde{u}_{n+1,m}\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{1m}^{2}(\lambda,z)\\ \tilde{g}_{2m}^{2}(\lambda,z)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{g}_{n+1,m}^{2}(\lambda,z)\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Інтегральний оператор F_{sn}, , який діє за формулою (21), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{sn}[\dots]=\left[\int_{l_0}^{l_1}\dots V_1(z,\lambda_s)\sigma_1 dz\int_{l_1}^{l_2}\dots V_2(z,\lambda_s)\sigma_2 dz\dots\int_{l_n}^{l}\dots V_{n+1}(z,\lambda_s)\sigma_{n+1}dz\right] \tag{26}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (24), (25). Внаслідок тотожності (23) одержуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda_s^2+a_{rj}^2\lambda^2+\chi_j^2+k_j^2\right)\tilde{u}_{jms}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{F}_{jms}(t,\lambda)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}\times$$
$$\times V_1(l_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m}(t,\lambda)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde{g}_{lm}(t,\lambda), \tag{27}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jms}\right|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{ims}^1(\lambda),\ \frac{d}{dt}\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{ims}\right|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{jms}^2(\lambda), \tag{28}$$

де

$$\tilde{u}_{jms}(t,\lambda)=\int_{l_{i-1}}^{l_j}\tilde{u}_{jk}(t,\lambda,z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_i dz;\ j=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{F}_{jms}(t,\lambda)=\int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{F}_{jm}(t,\lambda,z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1}$$

і аналогічно $\tilde{g}_{jms}^1(\lambda),\tilde{g}_{jms}^2(\lambda);l_{n+1}\equiv l.$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\limits_{1\le j\le n+1}\left\{a_{rj}^2\lambda^2+\chi_j^2\right\}=$ $=a_{r1}^2\lambda^2+\chi_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2=\left(a_{r1}^2\lambda^2+\chi_1^2\right)-\left(a_{rj}^2\lambda^2+\chi_j^2\right)$. Задача Коші (27), (28) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{u}_{ms}}{dt^2}+\Delta^2(\lambda,\lambda_s)\tilde{u}_{ms}=\tilde{F}_{ms}(t,\lambda)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}\times$$
$$\times V_1(l_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m}(t,\lambda)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde{g}_{lm}(t,\lambda), \tag{29}$$

$$\tilde{u}_{ms}\Big|_{t=0} = \tilde{g}^1_{ms}(\lambda),\ \frac{d\tilde{u}_{ms}}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{g}^2_{ms}(\lambda), \tag{30}$$

де

$$\tilde{u}_{ms}(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jms}(t,\lambda), \Delta^2(\lambda,\lambda_s) = \lambda_s^2 + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_1^2,$$

$$\tilde{F}_{ms}(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{F}_{jms}(t,\lambda),\ \tilde{g}^1_{ms}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}^1_{jms}(\lambda),\ \tilde{g}^2_{ms}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}^2_{jms}(\lambda).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (29), (30) є функція

$$\tilde{u}_{ms}(t,\lambda) = \frac{\sin\left(\Delta(\lambda,\lambda_s)t\right)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^2_{ms}(\lambda) + \frac{d}{dt}\frac{\sin\left(\Delta(\lambda,\lambda_s)t\right)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^1_{ms}(\lambda) +$$
$$+\int_0^t \frac{\sin\left(\Delta(\lambda,\lambda_s)(t-\tau)\right)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\Big[\tilde{F}_{ms}(\tau,\lambda) - \sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\lambda_s)\times \tag{31}$$
$$\times\tilde{g}_{0m}(\tau,\lambda) + \sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde{g}_{lm}(\tau,\lambda)\Big]d\tau.$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{sn} та F_{sn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{sn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{sn}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_1(z,\lambda_s)}{\left\|V(z,\lambda_s)\right\|^2} \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_2(z,\lambda_s)}{\left\|V(z,\lambda_s)\right\|^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_{n+1}(z,\lambda_s)}{\left\|V(z,\lambda_s)\right\|^2} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32) до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_{ms}(t,\lambda)\right]$, де функція $\tilde{u}_{ms}(t,\lambda)$ визначена формулою (31). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі спряження (17)–(20):

$$\tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(\Delta(\lambda,\lambda_s)t\right)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^2_{ms}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin\left(\Delta(\lambda,\lambda_s)t\right)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^1_{ms}(\lambda)\right]\times$$

$$\times\frac{V_j\left(z,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_s\right)\right\|^2}+\sum_{s=1}^{\infty}\left[\int_0^t\frac{\sin\left(\Delta\left(\lambda,\lambda_s\right)\left(t-\tau\right)\right)}{\Delta\left(\lambda,\lambda_s\right)}\left[\tilde{F}_{ms}\left(\tau,\lambda\right)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}\times\right.\right.$$ (33)

$$\left.\left.\times V_1\left(l_0,\lambda_s\right)\tilde{g}_{0m}\left(\tau,\lambda\right)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_s\right)\tilde{g}_{lm}\left(\tau,\lambda\right)\right]d\tau\right]\times$$

$$\times\frac{V_j\left(z,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_s\right)\right\|^2};\ j=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}\left(t,\lambda,z\right)$, визначених формулами (33), обернені оператори $H_{m,0}^{-1}$ та F_m^{-1}, одержуємо функції

$$u_j\left(t,r,\varphi,z\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi\right)f_k\left(\tau,\rho,\alpha,\xi\right)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho\,d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi\right)g_k^1\left(\rho,\alpha,\xi\right)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi\right)g_k^2\left(\rho,\alpha,\xi\right)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+$$ (34)

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left[W_j^0\left(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z\right)g_0\left(\tau,\rho,\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+W_j^l\left(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z\right)g_l\left(\tau,\rho,\alpha\right)\right]\rho\,d\alpha\,d\rho\,d\tau+$$

$$+a_{rj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{jk}\left(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi\right)\theta_k\left(\tau,\alpha,\xi\right)\sigma_k\,d\xi\,d\alpha\,d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)–(5).

У формулах (34) застосовано компоненти

$$E_{jk}\left(t,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m E_{jk,m}\left(t,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)\cos\left(m\varphi\right)$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$W_j^0\left(t,r,\rho,\varphi,z\right)=-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}\left(t,r,\rho,\varphi,z,l_0\right)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти

$$W_j^l\left(t,r,\rho,\varphi,z\right)=\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{j,n+1}\left(t,r,\rho,\varphi,z,l\right)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна, та компоненти

$$W_{jk}\left(t,r,\varphi,z,\xi\right)=R_0 E_{jk}\left(t,r,R_0,\varphi,z,\xi\right)$$

радіальної матриці Гріна розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}\left(t,r,\rho,z,\xi\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\lambda,\lambda_s\right)t\right)}{\Delta\left(\lambda,\lambda_s\right)}\times$$

$$\times\frac{f_{m,0}\left(r,\lambda\right)f_{m,0}\left(\rho,\lambda\right)\lambda d\lambda}{A_{m,0}^2\left(\lambda\right)+B_{m,0}^2\left(\lambda\right)}\cdot\frac{V_j\left(z,\lambda_s\right)V_k\left(\xi,\lambda_s\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_s\right)\right\|^2};\, j,k=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}\left(t,r,\rho,\varphi,z,\xi\right)$ і функцій Гріна $W_j^0\left(t,r,\rho,\varphi,z\right)$, $W_j^l\left(t,r,\rho,\varphi,z\right)$, $W_{jk}\left(t,r,\varphi,z,\xi\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j\left(t,r,\varphi,z\right)$, визначені формулами (34), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [25].

Єдиність розв'язку (34) випливає із його структури та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу та функкій Гріна).

Можна довести [26], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)–(5), узагальнений розв'язок (34) буде також її обмеженим класичним розв'язком.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (34) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)-(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндричному шарі з порожниною.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0;\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ дозволяють виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z=l_0, z=l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 1-3, 2-1, 2-2, 2-3, 3-1, 3-2, 3-3).

Зауваження 3. Параметр h дозволяє виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r=R_0$ крайової умови 1-го роду $\left(h\to\infty\right)$ та 2-го роду $\left(h\to 0\right)$.

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (34) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,r,\varphi,z\right), g_j^1\left(r,\varphi,z\right), g_j^2\left(r,\varphi,z\right)$, $g_0\left(t,r,\varphi\right)$, $g_l\left(t,r,\varphi\right)$, $\theta_j\left(t,\varphi,z\right)$ проводиться безпосередньо.

Зауваження 5. У випадку $\chi_j^2\equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 6. У випадку $\alpha_{11}^k=0$, $\beta_{11}^k=1$; $\alpha_{12}^k=0$, $\beta_{12}^k=1$; $\alpha_{21}^k=E_1^k$, $\beta_{21}^k=0;\alpha_{22}^k=E_2^k,\beta_{22}^k=0$, де E_1^k,E_2^k — модулі Юнга,

$k = \overline{1, n}$, умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках, розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю коливних процесів у кусково-однорідному циліндричному шарі з порожниною.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв’язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндричному шарі з порожниною. Одержаний розв’язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв’язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М. : ИЛ, 1957. — 256 с.
4. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся элиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.
6. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
9. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
10. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
12. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
13. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.

14. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
15. Конет І. М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2007. — 136 с.
16. Громик А. П. Стаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2008. — 120 с.
17. Громик А. П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2009. — 120 с.
18. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
19. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових циліндричних областях / І. М. Конет // Математичний вісник НТШ. — 2010. — Т. 7. — С. 71–92.
20. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях. — Львів, 2011. — 48 с. — (Препр. / НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11). — Чернівці : Прут, 2011. — С. 5–17.
21. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах / І. М. Конет // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — 2011. — Вип. 8 (17). — С. 93–108.
22. Конет І. М. Гіперболічна крайова задача математичної фізики в кусково-однорідному циліндричному шарі / І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 98–109.
23. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат., 1956. — 204 с.
24. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделёнными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 56 с. — (Препр. / АН УССР. Институт математики; 83.18).
25. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
26. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз., 1958. — 274 с.

The method of integrated and hybrid integral transformations in combination with the method of main solutions (matrices influence and matrix Green) was first built in the exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise homogeneous cylindrical layer with cavity.

Key words: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transforms, main solutions.*

Отримано: 15.07.2014