5. Бердышев В. И. Численные методы приближения функций / В. И. Бердышев, Ю. Н. Субботин. — Свердловск : Среднеуральске изд-во, 1979. — 116 с.
6. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
7. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М. : Мир, 1986. — 318 с.
8. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1974. — 223 с.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. — М. : Мир, 1984. — Кн. 1. — 350 с.; Кн. 2. — 282 с.
10. Абрамчук В. С. Итерационные методы направленного поиска решения систем $Ax = f$ с сингулярно-естественным упорядочением переменных / В. С. Абрамчук // Доп. НАН Украины. — 1996. — № 8. — С. 4–8.

Numerical and approximate methods of solving boundary value problems are proposed. Numerical methods for solving linear boundary value problems are build on ranking of the difference equation matrix to maximize orthogonal subsystem. Approximate methods are based on the approach of solution in the form of the shoots of Taylor polynomial.

Key words: *elliptic difference equation; Minimal Residual method, Minimal error method in AE, $A^T E$ space; inverse problems for dynamic systems.*

Отримано: 17.06.2014

УДК 517.95

Т. П. Гой, канд. фіз.-мат. наук

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

НОВІ ФУНКЦІЇ, ОЗНАЧЕНІ ПРИ ДОПОМОЗІ ФАКТОРІАЛЬНИХ СТЕПЕНІВ

Досліджені нові неелементарні функції дійсної змінної, означені з використанням зростаючих і центральних факторіальних степенів. Встановлені деякі властивості цих функцій, зокрема, показаний їхній зв’язок з узагальненою гіпергеометричною функцією. Виведені звичайні лінійні диференціальні рівняння, розв’язками яких є нові функції.

Ключові слова: *зростаючий факторіальний степінь, центральний факторіальний степінь, узагальнена гіпергеометрична функція.*

1. Вступ. Моделювання багатьох процесів математичної фізики, теорії теплопровідності, астрономії, аеродинаміки, біомедицини, квантової механіки та інших наук приводить до спеціальних функцій різної природи. Різноманітність задач, що породжують спеціальні функції, веде до зростання кількості неелементарних функцій — від найпростіших трансцендентних функцій до гіпергеометричних функцій різної природи.

Класичні трансцендентні функції $\exp x, \sin x, \cos x$ задаються як степеневі ряди

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

побудовані при допомозі спадних факторіальних степенів (факторіал $m!$ є водночас спадним факторіальним степенем). Якщо у цих рядах спадні факторіальні степені замінити відповідними зростаючими факторіальними степенями, то одержимо неелементарні функції дійсної змінної $\operatorname{Exp} x, \operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x$ (див. [1]), а якщо замінити їх центральними факторіальними степенями, то одержимо функції $\operatorname{Expc} x$, $\operatorname{Sinc} x$, $\operatorname{Cosc} x$, які досліджувались у [2; 3]. У [1–3] встановлені деякі властивості цих функцій. Зокрема, показано, що функції $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$ є розв'язками задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з поліноміальними коефіцієнтами, а функції $\operatorname{Sinc} x, \operatorname{Cosc} x$ — розв’язками таких рівнянь третього порядку.

У цій статті досліджуються чотири нові неелементарні функції дійсної змінної типу гіперболічних функцій:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{\operatorname{Exp} x - \operatorname{Exp}(-x)}{2}, \ \operatorname{Ch} x = \frac{\operatorname{Exp} x + \operatorname{Exp}(-x)}{2},$$

$$\operatorname{Shc} x = \frac{\operatorname{Expc} x - \operatorname{Expc}(-x)}{2}, \operatorname{Chc} x = \frac{\operatorname{Expc} x + \operatorname{Expc}(-x)}{2}.$$

2. Факторіальні степені. Для довільних чисел $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *факторіальним степенем* m з кроком $k \in \mathbb{R}$ називають вираз [4, с. 45–47]

$$x^{m\{k\}} = \begin{cases} x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot\big(x+(m-1)k\big), \text{ якщо } m \neq 0, \\ 1, \text{ якщо } m = 0. \end{cases}$$

Факторіальний степінь називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і ***спадним***, якщо $k < 0$. У випадку $k = 0$ маємо звичайну степеневу функцію, тобто $x^{m\{0\}} = x^m$.

Зростаючий факторіальний степінь m з кроком 1 і спадний факторіальний степінь m з кроком (–1) позначатимемо через $x^{\overline{m}}$ і $x^{\underline{m}}$ відповідно:

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} := x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$

$$x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} := x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Зростаючі та спадні факторіальні степені тісно пов’язані зі звичайною факторіальною функцією, адже $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Основна властивість спадних і зростаючих факторіальних степенів виражається формулами $\Delta(x^{\underline{m}}) = m\,x^{\underline{m-1}}$, $\overline{\Delta}(x^{\overline{m}}) = mx^{\overline{m-1}}$, де $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$ — різниця функції $f(x)$, а $\overline{\Delta}(f(x)) = f(x) - f(x-1)$ — запізніла різниця цієї функції [5, с. 66–68].

Для довільних чисел $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *центральним факторіальним степенем* m з кроком $k > 0$ називають вираз [6]

$$x^{m[k]} = \begin{cases} x\left(x + \dfrac{mk}{2} - k\right)\left(x + \dfrac{mk}{2} - 2k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - \dfrac{mk}{2} + k\right), \text{ якщо } m \neq 0, \\ 1, \text{ якщо } m = 0. \end{cases}$$

Центральний факторіальний степінь m з кроком 1 позначатимемо $x^{[m]}$. Наприклад, $x^{[5]} = \left(x - 3/2\right)\left(x - 1/2\right)x\left(x + 1/2\right)\left(x + 3/2\right)$, $x^{[6]} = (x-2)(x-1)\,x^2\,(x+1)(x+2)$.

Для центральних факторіальних степенів справджується формула $\delta(x^{[m]}) = mx^{[m-1]}$, де $\delta(f(x)) = f\left(x + 1/2\right) - f\left(x - 1/2\right)$ — центральна різниця функції $f(x)$.

У комбінаториці зростаючим, спадним і центральним факторіальним степеням зазвичай притаманна двоїстість. Іншими словами, якщо комбінаторна задача приводить до комбінаторної тотожності, побудованої при допомозі, наприклад, спадних факторіальних степенів, то зазвичай існує змістовна комбінаторна задача, яка приводить до двоїстої тотожності з участю зростаючих або центральних факторіальних степенів [7, с. 7–12; 8, с. 196–219; 9, с. 27–31].

Як один з численних прикладів таких двоїстих комбінаторних співвідношень наведемо тотожності, які узагальнюють біноміальну тотожність:

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\underline{k}}b^{\underline{n-k}},\ (a+b)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\overline{k}}\,b^{\overline{n-k}},$$

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{[k]}b^{[n-k]},$$

де $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — біноміальні коефіцієнти.

3. Функції $\mathbf{Exp}\,x$, $\mathbf{Sin}\,x$, $\mathbf{Cos}\,x$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Через $\mathrm{Exp}\,x$, $\mathrm{Sin}\,x$, $\mathrm{Cos}\,x$ позначимо функції дійсної змінної, означені при допомозі степеневих рядів [1]:

$$\mathrm{Exp}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\overline{n}}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!\,x^n}{(2n-1)!}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{Sin} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{\overline{2n+1}}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2n)!\,x^{2n+1}}{(4n+1)!},\qquad(2)$$

$$\operatorname{Cos} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{\overline{2n}}}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (2n-1)!\,x^{2n}}{(4n-1)!}.\qquad(3)$$

Деякі властивості та графіки функцій $\operatorname{Exp} x$, $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$ наведені в [1].

З (1)–(3) випливає формула

$$\operatorname{Exp}(ix)=\operatorname{Cos} x+i\operatorname{Sin} x,\qquad(4)$$

аналогічна до формули Ейлера. Оскільки $\operatorname{Exp}(-ix)=\operatorname{Cos} x-i\operatorname{Sin} x$, то

$$\operatorname{Cos} x=\frac{\operatorname{Exp}(ix)+\operatorname{Exp}(-ix)}{2},\ \operatorname{Sin} x=\frac{\operatorname{Exp}(-ix)-\operatorname{Exp}(ix)}{2i},$$

а отже,

$$\operatorname{Cos}^2 x+\operatorname{Sin}^2 x=\operatorname{Exp}(ix)\cdot\operatorname{Exp}(-ix)\quad\left(\operatorname{Exp}(ix)\cdot\operatorname{Exp}(-ix)\neq 1\right).$$

У [1] встановлений зв’язок функції $\operatorname{Exp} x$ з функцією ймовірностей (функцією Лапласа) $\operatorname{erf} x$, а також зв’язок функцій $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$ з інтегралами Френеля. Зараз покажемо зв’язок цих функцій з узагальненою гіпергеометричною функцією.

Нагадаємо, що узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_sF_q(a_1,...,a_s;b_1,...,b_q;z)$ називають функцію, визначену як сума узагальненого гіпергеометричного ряду [10, с. 183]

$${}_sF_q\left(a_1,...,a_s;b_1,...,b_q;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}a_2^{\overline{n}}\cdot\ldots\cdot a_s^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}b_2^{\overline{n}}\cdot\ldots\cdot b_q^{\overline{n}}}\cdot\frac{z^n}{n!},\qquad(5)$$

де $c^{\overline{n}}$ — зростаючий факторіальний степінь з кроком 1.

Теорема 1. Для всіх дійсних x справджуються тотожності

$$\exp x=1+x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};\frac{x^2}{64}\right)+\frac{x^2}{6}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};\frac{x^2}{64}\right),\qquad(6)$$

$$\operatorname{Sin} x=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right),\qquad(7)$$

$$\operatorname{Cos} x=1-\frac{x^2}{6}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right).\qquad(8)$$

Доведення. Доведемо спочатку формулу (7). З (2), враховуючи (5), одержуємо:

$$\operatorname{Sin} x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(4n+1)!}x^{2n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n(4n+1)!!}=$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n\left(3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)\right)\left(5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)\right)} =$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{64^n\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)} =$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{(3/4)^{\overline{n}}\,(5/4)^{\overline{n}}\,n!}\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = x\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Доведемо тепер формулу (8). З (3), враховуючи (5), маємо:

$$\operatorname{Cos} x = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(4n+3)!}x^{2n+2} = 1-\frac{x^2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n(4n+3)!!} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n\left(5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)\right)\left(7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n+3)\right)} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{64^n\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4}\right)} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{(5/4)^{\overline{n}}\,(7/4)^{\overline{n}}\,n!}\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = 1-\frac{x^2}{6}\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Формула (6) випливає безпосередньо з (4), (7) і (8). **Теорему доведено.**

4. Функції $\operatorname{Expc} x$, $\operatorname{Sinc} x$, $\operatorname{Cosc} x$, побудовані при допомозі центральних факторіальних степенів. Позначимо через $\operatorname{Expc} x$, $\operatorname{Sinc} x$, $\operatorname{Cosc} x$ функції, визначені при допомозі степеневих рядів [3]:

$$\operatorname{Expc} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{[n]}} = 1 + x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!x^{2n}}{(3n-1)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n(2n-1)!(3n)!x^{2n+1}}{(n-1)!(6n+1)!}, \quad (9)$$

$$\operatorname{Sinc} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}} = x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 16^n(2n-1)!(3n)!x^{2n+1}}{(n-1)!(6n+1)!}, \quad (10)$$

$$\operatorname{Cosc} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)!x^{2n}}{(3n-1)!}. \quad (11)$$

Теорема 2. [3] Для всіх дійсних x справджуються тотожності

$$\operatorname{Expc} x = 1 + x\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{5}{6},\frac{7}{6};\frac{x^2}{27}\right) + \frac{x^2}{4}\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{4}{3},\frac{5}{3};\frac{x^2}{27}\right),$$

$$\operatorname{Sinc} x = x\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{5}{6},\frac{7}{6};-\frac{x^2}{27}\right), \quad \operatorname{Cosc} x = 1-\frac{x^2}{4}\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{4}{3},\frac{5}{3};-\frac{x^2}{27}\right),$$

де ${}_1F_2(a_1;b_1,b_2;z)$ — узагальнена гіпергеометрична функція.

Зауважимо, що у [3] функції $\operatorname{Expc} x$, $\operatorname{Sinc} x$, $\operatorname{Cosc} x$ позначені через $\widetilde{E}(x)$, $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ відповідно.

З (9)–(11) випливають формули

$$\operatorname{Expc}(\pm ix) = \operatorname{Cosc} x \pm i \operatorname{Sinc} x,$$

звідки одержуємо, що

$$\operatorname{Cosc}^2 x + \operatorname{Sinc}^2 x = \operatorname{Expc}(ix) \cdot \operatorname{Expc}(-ix).$$

Графіки функцій $\operatorname{Expc} x$, $\operatorname{Sinc} x$, $\operatorname{Cosc} x$ можна знайти в [3].

5. Функції $\mathbf{Sh}(x), \mathbf{Ch}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Позначимо через $\operatorname{Sh} x$, $\operatorname{Ch} x$ функції дійсної змінної, визначені формулами

$$\operatorname{Sh} x = \frac{\operatorname{Exp} x - \operatorname{Exp}(-x)}{2}, \quad \operatorname{Ch} x = \frac{\operatorname{Exp} x + \operatorname{Exp}(-x)}{2}, \tag{12}$$

де функція $\operatorname{Exp} x$ визначена у (1).

З (1), (12) випливають степеневі розвинення

$$\operatorname{Sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(4n+1)!} x^{2n+1}, \tag{13}$$

$$\operatorname{Ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(4n+3)!} x^{2n+2}, \tag{14}$$

причому ряди в (13), (14) збігаються на всій дійсній числовій осі.

Графіки функцій дійсної змінної $y = \operatorname{Sh} x$, $y = \operatorname{Ch} x$ наведені на рис. 1 (зображені також графіки гіперболічних функцій $y = \operatorname{sh} x$ і $y = \operatorname{ch} x$).

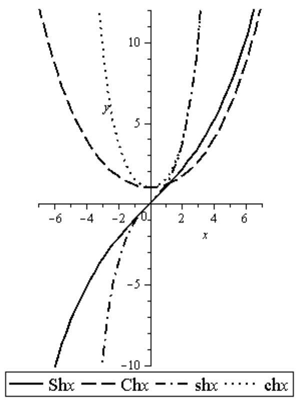


Рис. 1. *Графіки функцій* $y = \operatorname{Sh} x,\ y = \operatorname{Ch} x$

Теорема 3. Для всіх дійсних x справджуються тотожності

$$\operatorname{Sh} x = \frac{\sqrt{\pi x}}{2}\left(\exp\left(\frac{x}{4}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - i\exp\left(-\frac{x}{4}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{i\sqrt{x}}{2}\right)\right) = \\ = x\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};\frac{x^2}{64}\right), \tag{15}$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{\sqrt{\pi x}}{2}\left(\exp\left(\frac{x}{4}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + i\exp\left(-\frac{x}{4}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{i\sqrt{x}}{2}\right)\right) = \\ = 1 + \frac{x^2}{6}\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};\frac{x^2}{64}\right), \tag{16}$$

де $\operatorname{erf} p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^p \exp(-t^2)\,dt$ — функція ймовірностей (функція помилок), ${}_1F_2(a_1;b_1,b_2;z)$ — узагальнена гіпергеометрична функція.

Доведення теореми 3 проводиться аналогічно до доведення теореми 1.

На рис. 2–7 наведені графіки функцій комплексної змінної $\operatorname{Sh} z$, $\operatorname{Ch} z$, де $z = x + iy$.

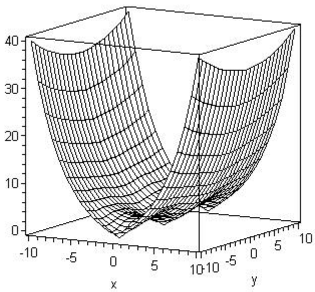


Рис. 2. *Графік функції* $|\operatorname{Sh} z|$

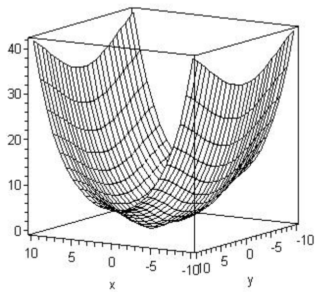


Рис. 3. *Графік функції* $|\operatorname{Ch} z|$

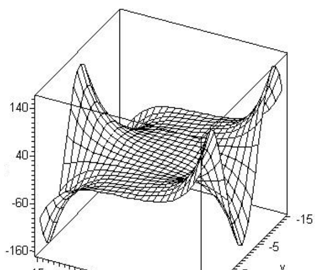


Рис. 4. *Графік функції* $\operatorname{Re}(\operatorname{Sh} z)$

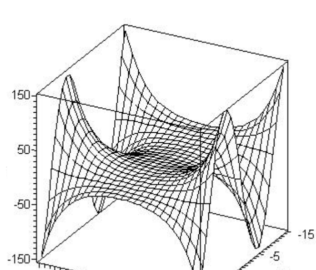
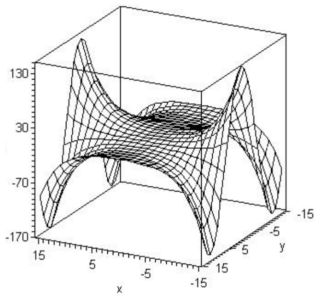


Рис. 5. *Графік функції* $\operatorname{Im}(\operatorname{Sh} z)$



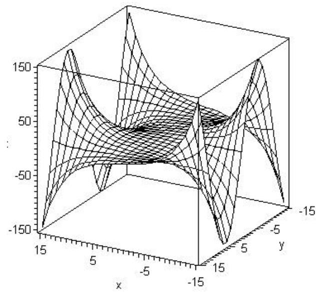


Рис. 6. *Графік функції* $\mathrm{Re}\left(\mathrm{Ch}\, z\right)$ ***Рис. 7.*** *Графік функції* $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Ch}\, z\right)$

6. Функції $\mathrm{Shc}\, x$, $\mathrm{Chc}\, x$, побудовані при допомозі центральних факторіальних степенів. Позначимо через $\mathrm{Shc}\, x$, $\mathrm{Chc}\, x$ функції дійсної змінної, визначені формулами

$$\mathrm{Shc}\, x = \frac{\mathrm{Expc}\, x - \mathrm{Expc}(-x)}{2}, \quad \mathrm{Chc}\, x = \frac{\mathrm{Expc}\, x + \mathrm{Expc}(-x)}{2}. \tag{17}$$

З (10), (11) і (17) одержуємо степеневі розвинення

$$\mathrm{Shc}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}} = x + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n (2n-1)!(3n)!\, x^{2n+1}}{(n-1)!(6n+1)!}, \tag{18}$$

$$\mathrm{Chc}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)^{[2n]}} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\, x^{2n}}{(3n-1)!}, \tag{19}$$

причому ряди в (18), (19) збігаються для всіх дійсних x.

Графіки функцій $y = \mathrm{Shc}\, x$, $y = \mathrm{Chc}\, x$ зображені на рис. 8.

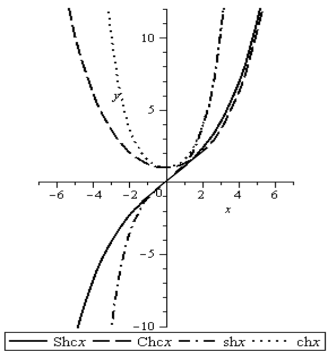


Рис. 8. *Графіки функцій* $y = \mathrm{Shc}\, x,\ y = \mathrm{Chc}\, x$

Теорема 4. Для всіх дійсних x справджуються тотожності

$$\mathrm{Shc}\, x = x \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{x^2}{27}\right), \tag{20}$$

$$\operatorname{Chc} x = 1 + \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^2}{27}\right), \tag{21}$$

де ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$ — узагальнена гіпергеометрична функція.

Доведення теореми 4 проводиться аналогічно до доведення теореми 1 з використанням формул (5), (18), (19).

На рис. 9–14 наведені графіки функцій комплексної змінної $\operatorname{Shc} z$, $\operatorname{Chc} z$, де $z = x + iy$.

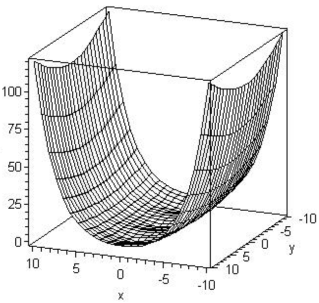


Рис. 9. *Графік функції* $|\operatorname{Shc} z|$

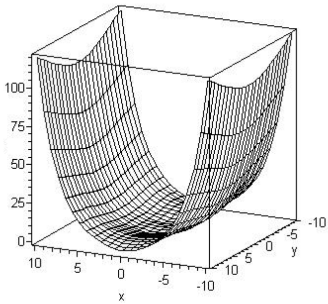


Рис. 10. *Графік функції* $|\operatorname{Chc} z|$

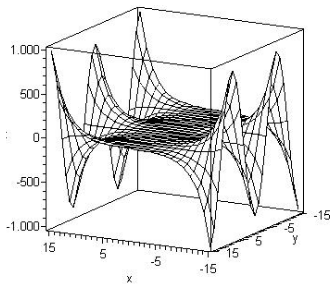


Рис. 11. *Графік функції* $\operatorname{Re}(\operatorname{Shc} z)$

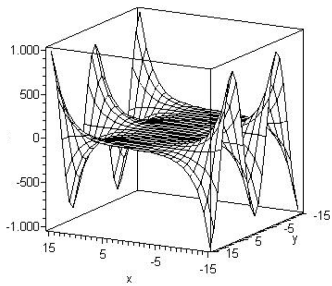


Рис. 12. *Графік функції* $\operatorname{Im}(\operatorname{Shc} z)$

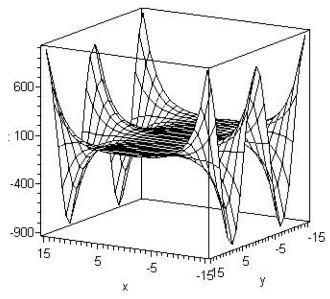


Рис. 13. *Графік функції* $\operatorname{Re}(\operatorname{Chc} z)$

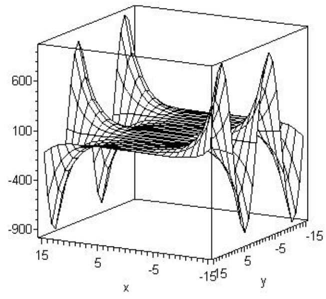


Рис. 14. *Графік функції* $\operatorname{Im}(\operatorname{Ch} z)$

7. Диференціальні рівняння для функцій Sh*x*, Ch*x*, Shc*x*, Chc*x*.

Теорема 4. Функції $\operatorname{Sh} x$, $\operatorname{Ch} x$ є розв'язками відповідно таких задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$16x^2y'' - 16xy' + (12 - x^2)y = -4x,\ y(0) = 0, y'(0) = 1; \qquad (22)$$

$$16x^2y'' - 16xy' + (12 - x^2)y = x^2 + 12,\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \qquad (23)$$

Доведення. Те, що функції $y = \operatorname{Sh} x$, $y = \operatorname{Ch} x$ задовольняють початкові умови з (22) і (23), випливає з формул (13), (14) відповідно.

Доведемо, що функція $y = \operatorname{Sh} x$ є частинним розв'язком диференціального рівняння з (22). Згідно з (15)

$$\operatorname{Sh} x = \frac{\sqrt{\pi x}}{2}(A - B),$$

де $A \equiv \exp\left(x/4\right)\operatorname{erf}\left(\sqrt{x}/2\right)$, $B \equiv i\exp\left(-x/4\right)\operatorname{erf}\left(i\sqrt{x}/2\right)$. Тоді

$$(\operatorname{Sh} x)' = \frac{1}{8\sqrt{x}}\left(2\sqrt{\pi}(A - B) + \sqrt{\pi}x(A + B) + 4\sqrt{x}\right),$$

$$(\operatorname{Sh} x)'' = \frac{1}{32x\sqrt{x}}\left(\sqrt{\pi}(x^2 - 4)(A - B) + 4\sqrt{\pi}x(A + B) + 8\sqrt{x}\right).$$

Виключаючи тепер вирази $A \pm B$ з отриманих співвідношень для $\operatorname{Sh} x$, $(\operatorname{Sh} x)'$ і $(\operatorname{Sh} x)''$, після нескладних перетворень одержуємо диференціальне рівняння з (22).

Далі, оскільки згідно з (16) $\operatorname{Ch} x = 1 + \dfrac{\sqrt{\pi x}}{2}(A + B)$, то

$$(\operatorname{Ch} x)' = \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{x}}\left(2(A + B) + x(A - B)\right),$$

$$(\operatorname{Ch} x)'' = \frac{1}{32x\sqrt{x}}\left(\sqrt{\pi}(x^2 - 4)(A + B) + 4\sqrt{\pi}x(A - B) + 4x\sqrt{x}\right),$$

і виключаючи з цих співвідношень вирази $A \pm B$, переконуємось, що функція $y = \operatorname{Ch} x$ є розв'язком рівняння з (23).

Теорему доведено.

Теорема 5. Функції $\operatorname{Shc} x$, $\operatorname{Chc} x$ є розв'язками відповідно таких задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь третього порядку:

$$\begin{gathered} 27x^3y''' + 4x(6 - x^2)y' - 4(x^2 + 6)y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0; \end{gathered} \qquad (24)$$

$$\begin{gathered} 27x^3y''' - 27x^2y'' + x(51 - 4x^2)y' - 48y = -48, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1/2. \end{gathered} \qquad (25)$$

Доведення. Те, що функції $y = \operatorname{Shc} x$, $y = \operatorname{Chc} x$ задовольняють початкові умови з (24) і (25), випливає з формул (18), (19) відповідно.

Доведемо, що функція $y = \operatorname{Shc} x$ є розв’язком диференціального рівняння з (24). Узагальнена гіпергеометрична функція ${}_1F_2\left(a; b_1, b_2; z\right)$, через яку, згідно з (20), виражається функція $\operatorname{Shc} x$, є розв’язком лінійного звичайного диференціального рівняння третього порядку [10, с. 185]

$$\left(\delta\left(\delta + b_1 - 1\right)\left(\delta + b_2 - 1\right) - z\left(\delta + a\right)\right) w(z) = 0,$$

де $\delta w(z) = z w'(z)$. Отже, функція ${}_1F_2\left(1; 5/6, 7/6; z\right)$ з (20) є розв'язком операторного рівняння

$$\left(\delta\left(\delta - 1/6\right)\left(\delta + 1/6\right) - z\left(\delta + 1\right)\right) w(z) = 0. \qquad (26)$$

Оскільки $\delta^2 w = z w' + z^2 w''$, $\delta^3 w = z w' + 3 z^2 w'' + z^3 w'''$, то з (26), виконавши нескладні перетворення, одержуємо, що узагальнена гіпергеометрична функція $w(z) = {}_1F_2\left(1; 5/6, 7/6; z\right)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$z^3 w''' + 3 z^2 w'' + z\left(\frac{35}{36} - z\right) w' - z w = 0. \qquad (27)$$

Виконаємо у (27) заміну незалежної змінної $z = x^2 / 27$. Тоді

$$w'_z = \frac{27}{2} \frac{w'_x}{x}, \quad w''_z = \frac{729}{4} \cdot \frac{x w''_x - w'_x}{x^3}, \quad w'''_z = \frac{19683}{8} \cdot \frac{x^2 w'''_x - 3 x w''_x - 3 w'_x}{x^5}$$

і, підставляючи у рівняння (27), одержуємо, що функція $w(x) = {}_1F_2\left(1; 5/6, 7/6; x^2/27\right)$ є розв'язком рівняння

$$27 x^2 w''' + 81 x w'' + 4(6 - x^2) w' - 8 x w = 0.$$

Нарешті, підставляючи в останнє рівняння функцію $y = x \cdot w(x)$ (див. (20)), переконуємося, що функція $y = \operatorname{Shc} x$ є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку з (24).

Те, що функція $y = \operatorname{Chc} x$ є розв’язком рівняння з (25), доводиться аналогічно з використанням формули (21).

Теорему доведено.

8. Висновки. У статті досліджуються деякі властивості нових неелементарних функцій, побудованих у вигляді степеневих рядів з використанням зростаючих і центральних факторіальних степенів (за аналогією зі степеневими розвиненнями гіперболічних функцій). Встановлені деякі властивості цих функцій, побудовані їхні графіки. Показано, що вони є розв’язками задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами.

Список використаних джерел:

1. Гой Т. П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Буковинський матем. журн. — 2013. — Т. 1, № 1–2. — С. 28–33.
2. Гой Т. П. Про диференціальні рівняння функцій, породжених центральними факторіальними степенями / Т. П. Гой // КММК–2013 : тези Кримської міжнар. матем. конф. — Сімферополь : Вид-во КНЦ НАНУ, 2013. — Т. 2. — С. 4–5.
3. Гой Т. П. Функції, породжені центральними факторіальними степенями, та їхні властивості / Т. П. Гой // «Теоретичні та прикладні проблеми технічних і математичних наук» : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. — К. : Центр Науково-Практичних Студій, 2014. — С. 8–13.
4. Jordan C. Calculus of Finite Differences / C. Jordan. — New York : Chelsea Publishing, 1939. — 652 p.
5. Грэхем Р. Конкретная математика. Основания математики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М. : Мир, 1998. — 703 с.
6. Steffensen J. F. On the definition of the central factorial / J. F. Steffensen // J. Inst. Actuaries. — 1933. — Vol. 64, № 2. — P. 165–168.
7. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський. — Івано-Франківськ : Сімик, 2010. — 508 с.
8. Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. — М. : Наука, 1982. — 254 с.
9. Roman S. The Umbral Calculus / S. Roman. — New York : Academic Press, 1984. — 193 p.
10. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1973. — 294 с.

We consider new non-elementary functions defined by rising and central factorial powers and find some of their main properties. In particular, we established a relationship of these functions with the generalized hypergeometric functions. It is shown that constructed functions are solutions of ordinary linear differential equations with polynomial coefficients derived in the paper.

Key words: *rising factorial powers, central factorial powers, generalized hypergeometric function.*

Отримано: 11.07.2014