УДК 681.51

В. А. Федорчук*, д-р техн. наук,
Л. А. Митько**, канд. физ.-мат. наук,
В. А. Тихоход***, канд. техн. наук

*Каменец-Подольский национальный университет
имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский,
**Институт проблем моделирования
в энергетике им Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,
***Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев

ОЦЕНКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

В работе рассмотрена задача выбора множества критически важных параметров автоматических систем, позволяющих оценить их работоспособность на основе анализа корневой чувствительности характеристического уравнения системы.

Ключевые слова: *работоспособность, контроль, характеристики, устойчивость.*

Введение. Судить о работоспособности автоматической системы можно непосредственно по характеристикам или их показателям, проверяя условия работоспособности или контролируя совокупность параметров, однозначно определяющих характеристики системы. Если контролировать все нестабильные параметры, то можно с полной достоверностью (с вероятностью равной единице) определить работоспособность системы. Однако реальные сложные системы могут иметь или большое число параметров, или параметры, контроль которых оказывается сложным [1]. В связи с этим возникает задача выбора для контроля из всей совокупности параметров системы только ограниченного числа нестабильных параметров. Вполне очевидно, что в этом случае судить о работоспособности системы можно только с некоторой вероятностью, меньшей единицы.

Упорядочение множества нестабильных параметров. Для облегчения задачи выбора ограниченного числа контролируемых параметров всю совокупность нестабильных параметров системы целесообразно упорядочить. Введем упорядочение параметров по степени их влияния на работоспособность системы. Один нестабильный параметр считается более важным, чем другой, если чувствительность корней характеристического уравнения системы к изменениям первого выше соответствующей чувствительности к изменениям второго. Такое упорядочение естественно с точки зрения работоспособности системы, поскольку положение корней в основном определяет ее динамические возможности, т.е. ее состояние. При этом введение упорядочения множества нестабильных параметров позволяет определить функцию $p(v)$ вероятности правильности суждения о работоспособности системы в случае, если контролируется только ограниченное число нестабильных параметров v из общего числа параметров системы n.

По характеру подхода к упорядочению множества нестабильных параметров приходится различать два случая:

1) корни характеристического уравнения все различны;
2) среди множества корней имеются кратные корни.

Это обусловлено тем, что в первом случае в качестве чувствительности любого корня к изменению параметра можно рассматривать модуль частной производной от корня по данному параметру, ибо такая производная существует и ограничена. Во втором случае, при наличии кратных корней частные производные от кратных корней по нестабильному параметру обращаются в 0. Таким образом, чувствительность кратных корней оказывается всегда выше чувствительности некратных. Поэтому при наличии кратных корней упорядочение в параметрах следует производить по модулю высшей производной кратного корня по нестабильному параметру. При этом порядок производной равен кратности данного корня.

Рассмотрим полином:

$$F\left(x,\Lambda\right)=x^{n}+a_{n-1}\left(\lambda_{n-1}\right)x^{n-1}+\ldots+a_{1}\left(\lambda_{1}\right)x+a_{0}\left(\lambda_{0}\right), \tag{1}$$

где $\Lambda=\left(\lambda_{0},\ldots,\lambda_{n}\right)$ — n-мерный вектор параметров.

Упорядочение в случае разных корней характеристического уравнения. Рассмотрим первый случай, когда все корни характеристического уравнения различны (простые корни).

Пусть при $\Lambda=\Lambda_{0}=\left(\lambda_{0}^{0},\ldots,\lambda_{n}^{0}\right)$ все корни $x_{1}^{0},\ldots,x_{n}^{0}$ уравнения $F(x,\Lambda_{0}=0)$ различны и $\operatorname{Re}x_{i}^{0}<0$.

Рассмотрим следующие неотрицательные числа:

$$t_{kp}=\left|\frac{1}{\operatorname{Re}x_{k}^{0}}\frac{\partial x_{k}}{\partial\lambda_{p}}\left(x_{k}^{0},\Lambda_{0}\right)\right|=\left|\frac{1}{\operatorname{Re}x_{k}^{0}}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_{p}}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_{k}}}(x_{k}^{0},\Lambda_{0})\right| \tag{2}$$

Причем $k = 1, 2,\ldots,n$; $p = 0, \ldots, n–1$.

Определение 1. Вектор $T_{\lambda_{p}}=(t_{1p},\ldots,t_{np})$ назовем вектором относительных чувствительностей простых корней $x_{k}(\Lambda)$ уравнения $F(x,\Lambda)$ к изменению параметра λ_{p} в точке (x_{k}^{0},Λ_{0}) .

Определение 2. В множестве $\{T_{\lambda_p}\}$ введем упорядочение, полагая $T_{\lambda_p} \geq T_{\lambda_m}$, если $\|T_{\lambda_p}\| \geq \|T_{\lambda_m}\|$. Отметим, что норма $A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, если $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Аналогично введем упорядочение в множестве $\{\lambda_p\}$, полагая $\lambda_p \geq \lambda_m$, если $T_{\lambda_p} \geq T_{\lambda_m}$. В случае $\lambda_p > \lambda_m$ будем говорить, что параметр λ_p больше (или сильнее) λ_m.

Любое множество $\{\lambda_p\}$ оказывается вполне упорядоченным. Отметим, что множество $\{\lambda_p\}$ называется вполне упорядоченным, если для любых его элементов справедливо одно из 3-х соотношений [1]:

$$\lambda_i > \lambda_j; \lambda_i < \lambda_j; \lambda_i = \lambda_j.$$

Упорядочение в случае наличия кратных корней среди множества корней характеристического уравнения. Пусть при $\Lambda = \Lambda_0$ среди корней уравнения $F(x, \Lambda_0) = 0$ имеются кратные. Рассмотрим вполне упорядоченное множество корней уравнения (1) при $\Lambda = \Lambda_0$:

$$x_1^0 \leq x_2^0 \leq, \ldots, \leq x_n^0, \tag{3}$$

причем здесь каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность. Порядок в (3) соответствует расположению следующих неотрицательных чисел:

$$\left|Re\, x_1^0\right| \leq \left|Re\, x_2^0\right| \leq \ldots \leq \left|Re\, x_n^0\right|,$$

причем, как и ранее, мы предполагаем, что $\mathrm{Re}\, x_j < 0$.

Из множества $\{x_j^0\}$ удалим все достаточно большие элементы и будем в дальнейшем рассматривать лишь элементы

$$x_1^0 \leq x_2^0 \leq, \ldots, \leq x_n^0 \quad (m \leq n), \tag{4}$$

для которых выполнено условие:

$$\left|\mathrm{Re}\, x_i^0\right| \leq \gamma \left|\mathrm{Re}\, x_1^0\right| \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

где $\gamma > 1$ — некоторое число.

Таким образом, мы отбрасываем те корни уравнения (2), у которых $\left|\mathrm{Re}\, x_j^0\right|$ (причем $j > m$) достаточно велики. Эти корни мало влияют на работоспособность, так как их реальные части велики по модулю, т.е. дают составляющие, быстро затухающие во времени.

В результате будем иметь два случая:

1) в множестве (4) все корни различны (этот случай рассмотрен выше);
2) в множестве (4) имеются кратные корни.

Пусть имеются корни, $x_1^0 \le x_2^0 \le, \ldots, \le x_n^0$, кратности которых соответственно $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge, \ldots, \ge \alpha_k > 1$.

Рассмотрим следующие неотрицательные числа:

$$\varphi_{qp} = \left| \frac{1}{\operatorname{Re} x_k^0} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_p}(x_q^0, \Lambda_0)}{\dfrac{\partial^{\alpha q} F}{\partial x_q^{\alpha}}(x_q^0, \Lambda_0)} \left[\alpha_q - 1\right]! \right| \tag{6}$$

Причем $q = 1, 2, \ldots, k$; $p = 0, 1, \ldots, n — 1$, $(k + 1)$-мерные векторы:

$$\Phi_{\lambda_p} = \left(\varphi_{1p}, \varphi_{2p}, \ldots, \varphi_{kp}, \varphi_{(k+1)p}\right), \tag{7}$$

где $\varphi_{(k+1)p} = \left\| \left(t_{lp}, t_{(l+1)p}, \ldots, t_{mp}\right) \right\|$, $l = \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 + 1$, если $\sum_{i=1}^{k} \alpha_1 < m$, и

$$\varphi_{(k+1)p} = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 = m.$$

Определение 3. Вектор Φ_{λ_p} назовем вектором относительных чувствительностей кратных корней $x_q(\Lambda)$ уравнения (1) к изменению параметра λ_p в точке $\left(x_q^0, \Lambda_0\right)$ ($q = 1, 2, \ldots, k$; $p = 0, 1, \ldots, n — 1$).

Замечание 1. Легко проверить, что φ_{qp} может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi_{qp} = \left| \frac{\left(\alpha_q - 1\right)!}{\operatorname{Re} x_k^0} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_p}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_q}} \left(x - x_q^0\right)^{\alpha_q - 1} \left(x_q^0, \Lambda_0\right) \right| \tag{8}$$

Выражения (8) и (2) отличаются множителем $\left(x - x_q^0\right)^{\alpha_q - 1}$, который обеспечивает необращённые в нуль $\dfrac{\partial F}{\partial x_q}\left(x_q^0, \Lambda_0\right)$ в случае, когда x_q^0 — корень кратности α_q. Поэтому, чем выше кратность корня, тем большей чувствительностью он должен обладать к изменению параметров.

Определение 4. В соответствии с замечанием 1 в множестве Φ_{λ_p} определим отношение порядка по следующему лексикографическому принципу:

$\Phi_{\lambda_p} > \Phi_{\lambda_\omega}$, если $\varphi_{1p} > \varphi_{1m}$ (остальные координаты φ_{lp} и φ_{lm} не учитываются) или при $\varphi_{1p} = \varphi_{1m}$, $\varphi_{2p} > \varphi_{2m}, \ldots, \varphi_{rp} > \varphi_{rm}, \varphi_{(r+1)p} > \varphi_{(r+1)m}$ $(r \leq k)$.

Элементы $\Phi_{\lambda_p} > \Phi_{\lambda_\omega}$, если $\varphi_{ip} = \varphi_{im}$ $(i = 1, 2, \ldots, k + 1)$.

Определение 5. Отношение порядка в множестве $\{\lambda_p\}$ $\left(\lambda_{p_1} \leq \lambda_{p_2} \leq \ldots \leq \lambda_{p_n}\right)$ означает, что $\Phi_{\lambda_{p1}} \leq \Phi_{\lambda_{p2}} \leq \ldots \leq \Phi_{\lambda_{pn}}$.

При этом, если $\lambda_p > \lambda_m$, будем говорить, что λ_p больше (или сильнее) λ_m (индекс при λ_p означает его порядковый номер в множестве при введенном упорядочении).

Замечание 2. Очевидно, что множество $\{\lambda_p\}$ при введенном упорядочении (определения 1 и 5) оказывается вполне упорядоченным. Следовательно, в нем всегда можно указать v элементов, являющихся максимальными для всех остальных $n — v$.

Выбор контролируемых параметров для определения работоспособности автоматической системы. Автоматическую систему можно рассматривать как совокупность двух групп звеньев: объект управления (или регулирования) и регулятор. В ряде практических случаев характеристики объекта в период эксплуатации изменяются мало (характеристики объекта могут изменяться заметно, но при этом закон изменения известен оператору; этот случай аналогичен рассматриваемому). Тогда основные изменения, характеризующие степень работоспособности системы, определяются изменениями, происходящими в регуляторе. Это обстоятельство позволяет определить степень работоспособности системы управления по результатам контроля параметров регулятора. При выборе из всего множества параметров регулятора ограниченного числа контролируемых параметров будем учитывать корневую чувствительность характеристического уравнения системы [2].

Передаточная функция замкнутой системы управления в общем случае имеет следующий вид [3]:

$$K(p) = \frac{K_1(p)}{K_2(p) + \sigma(p) K_1(p)}, \tag{9}$$

где $\dfrac{K_1(p)}{K_2(p)}$ — передаточная функция объекта, $\sigma(p)$ — коэффициент передачи регулятора.

Из выражения (9) следует, что изменения, происходящие в регуляторе, действительно сказываются на изменении характеристического уравнения системы, т.е. вызывают перемещения полюсов передаточной функции (9). Отсюда следуют приведенные выше положения: при выборе контролируемых параметров регулятора необходимо учитывать корневую чувствительность характеристического уравнения системы.

Определение 6. Пусть мы контролируем V наибольших параметров $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_v}$, регулятора и в результате контроля убеждаемся, что все контролируемые параметры не выходят за допустимые пределы. Тогда мы будем говорить, что с вероятностью $p(v)$система работоспособна, причем $p(v) < 1$ определяется следующим соотношением:

$$p(v) = \frac{\sum_{j=1}^{v} v_j}{\sum_{j=1}^{m} v_j}, \tag{10}$$

где m — общее число нестабильных параметров; $v_j = \left\| T_{\lambda_{i_j}} \right\|$, если среди корней характеристического уравнения системы нет кратных ($\left\| T_{\lambda_q} \right\|$ определена выше), либо $v_j = \left| \varphi_{1 i_j} \right|$, если есть кратные корни.

Пример. Рассмотрим автоматическую систему управления, изображенную на рис. 1.

Структурные блоки в схеме имеют следующую природу:

$K_1(p) = \dfrac{k_1}{1 + T_1 p}$ — магнитный усилитель;

$K_1(p) = \dfrac{k_2}{1 + T_2^{'} p + T_2^{''} p^2 + T_3^{'''} p^3}$ — блок управления;

$K_3(p) = \dfrac{k_3}{1 + T_3 p}$ — гидравлический усилитель;

$K_4(p) = \dfrac{k_4}{p}$ — силовой гидропривод.

k_5 — жесткая обратная связь.

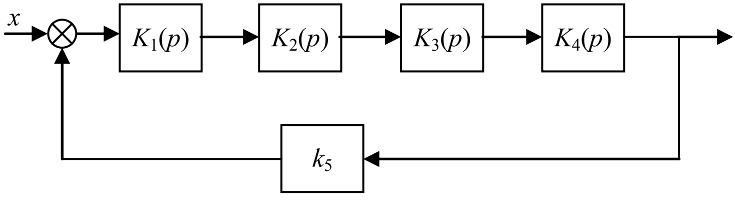

***Рис. 1.** Структурная схема системы управления*

Характеристическое уравнение системы управления имеет следующий вид:

$$F(p) = p^6 + 8,47p^5 + 94,2p^4 + 510p^3 + a_2(\lambda_2)p^2 + a_1(\lambda_1)p + a_0(\lambda_0) = 0.$$

В системе имеются три нестабильных параметра:

$$a_2(\lambda_2) = 442 + \lambda_2; a_1(\lambda_1) = 144,4 + \lambda_1; a_0(\lambda_0) = 4,68 + \lambda_0 .$$

В исходном (невозмущенном) состоянии векторный параметр имеет вид

$$\Lambda = (\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2) = 0 = (0,0,0) = \Lambda_0 .$$

При этом корни характеристического уравнения (принято $p = x$) равны:

$$x_1^0 = -0,005; x_2^0 = x_3^0 = -0,47; x_4^0 = -5,53; x_{5,6}^0 = -0,47 \pm j8,66 .$$

т.е. мы имеем второй случай, так как среди корней есть кратные.

Составим вектор относительной чувствительности Φ_{λ_i} .В силу формулы (6) $\Phi_{\lambda_0} = (\varphi_{10}), \Phi_{\lambda_1} = (\varphi_{11}), \Phi_{\lambda_2} = (\varphi_{12})$.

Так как у корня x_2 кратность $\alpha_2 = 2$, то имеем

$$\varphi_{1i} = \frac{1}{\operatorname{Re} x_2^0} \left| \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}(x_2^0, \Lambda_0)}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_2^0, \Lambda_0)} \right| ; \Lambda_0 = 0 = (0,0,0); x_2^0 = -0,47; i = 0,1,2.$$

Находим $\varphi_{10} = \dfrac{1}{0,47} a; \varphi_{11} = \dfrac{1}{0,47} 0,47a; \varphi_{12} = \dfrac{(0,47)^2}{0,47} a$,

где

$$a = \left| \left(\partial^2 F \big/ \partial x^2 \, (x_2^0, 0) \right)^{-1} \right| .$$

В силу определения 4, не вычисляя a, можно утверждать, что $\Phi_{\lambda_0} > \Phi_{\lambda_1} > \Phi_{\lambda_2}$ и, таким образом, $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2$.

Предположим, что контролируемым является один параметр λ_0 (наибольший из всех). Определим при $v = 1$ вероятность $p(v)$ того, что система будет работоспособна (при условии, что контролируемый параметр λ_0 не выходит за заданные границы). В соответствии с определением 6 имеем:

$$p(1) = \frac{V_0}{\sum_{i=0}^{2} v_i} = \frac{a}{a\left(1 + 0,47 + (0,47)^2\right)} \approx 0,6 \cdot$$

В том случае, если контролируемыми параметрами являются λ_0 и λ_1, вероятность работоспособности системы равна:

$$p(2) = \frac{a(1+0,47)}{a(1+0,47+(0,47)^2)} \approx 0,8 .$$

Как видно, вероятность работоспособности рассматриваемой автоматической системы выше при двух контролируемых параметрах, чем при контроле одного параметра системы.

Выводы. Таким образом, предложенный способ отбора множества контролируемых параметров обеспечивает оценку работоспособности автоматических систем.

Список использованной литературы:

1. Солодовников В. В. Теория автоматического управления техническими системами : учебное пособие / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. — М. : Изд-во МГТУ, 1993. — 492 с.
2. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем автоматического управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. — Л. : Энергия, 1969. — 208 с.
3. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. — М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 616 с.

The selecting a plurality of critical parameters of automatic systems via analysing the performance of such systems based on analysis of the sensitivity of the roots of the characteristic equation of the system.

Key words: *performance, control, characteristics, stability.*

Отримано: 19.03.2014