13. Чабанюк Я. М. Асимптотика стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі усереднення / Я. М. Чабанюк, П. П. Горун // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2012. — №2. — С. 251–256.
14. Горун П. П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / П. П. Горун, Я. М. Чабанюк, В. Р. Кукурба // XVI International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU-2010, October 4–8, 2010). — К. : Освіта України. — С. 54
15. Korolyuk V. S. Average and diffusion approximation for evolutionary systems in an asymptotic split phase space / V. S. Korolyuk, N. Limnios // Annals Appl. Probab. — 2004. — 14(1). — P. 489–516.
16. Невельсон М. Б. Стохастическая апроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение : в 2-х т. / В. Феллер. — М. : Мир, 1967. — Т. 2. — 751 с.

In case depending on the environment singularly perturbed regression function the asymptotic behavior of stochastic optimization procedure in diffusion approximation scheme in Markov medium was investigated. It was shown that the generator of the diffusion process is heterogeneous in time and its fluctuations depends on the evolution.

Key words: *jumping markov process, stochastic optimization, asymptotic behavior, diffusion approximation.*

Отримано: 31.03.2014

УДК 517.929

А. Б. Дорош, асистент,
І. М. Черевко, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджуються крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь із змінним запізненням. Запропоновано та обґрунтовано схему наближеного розв'язання крайової задачі за допомогою кубічних сплайнів дефекту два.

Ключові слова: *крайова задача, запізнення, сплайн-функції, ітераційний процес.*

Вступ. Диференціальні рівняння із запізненням виникають у багатьох областях математичного моделювання. Врахування запізнення дозволяє описати багато нових ефектів і явищ у біології, екології, імунології та інших науках. У зв'язку з відсутністю ефективних алгоритмів інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням у явному вигляді важливого значення набувають дослідження наближених методів їх інтегрування.

У цій статті досліджується наближений метод розв'язання крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь зі змінним запізненням, що базується на апроксимації розв'язку кубічними сплайнами дефекту два.

Питання існування та єдиності розв'язків крайових задач із запізненням у різних функціональних просторах вивчались у [1–3] та інших. Зведення лінійної крайової задачі із запізненням до інтегрального рівняння і застосування до його розв'язання проекційно-ітераційних методів розглянуто в [4]. Застосування методу сплайн-апроксимацій до диференціально-різницевих рівнянь досліджувалось у працях [5–7].

Позначення та постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{gathered} y''(x) = p_1(x)y'(x) + q_1(x)y(x) + p_2(x)y'\big(x-\tau(x)\big) + \\ +q_2(x)y\big(x-\tau(x)\big) + f(x),\ x \in [a;b], \end{gathered} \tag{1}$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x),\ j = 0,1,\ x \in \left[a^*;a\right],\ y(b) = \gamma, \tag{2}$$

де $p_i(x), q_i(x), i = 1,2$ — неперервні на $[a;b]$ функції, $\varphi(x)$ — задана на $\left[a^*;a\right]$ неперервно-диференційовна функція, $\gamma \in R$, $a^* = \min\limits_{x\in[a;b]}\big(x-\tau(x)\big)$.

Нехай запізнення $\tau(x) \geq 0$ — така неперервна на $[a;b]$ функція, що існує скінченна множина точок

$$E = \left\{x_i \in [a;b],\ x_i - \tau(x_i) = a,\ i = \overline{1,l}\right\}.$$

Введемо позначення $\delta_1 = [a, x_1], \delta_2 = [x_1, x_2], \ldots, \delta_{l+1} = [x_l, b]$ та визначимо множину функцій

$$V = \left\{y(x) : y(x) \in \left(C\left[a^*,b\right]\right) \cap \left(C^1\left[a^*,a\right] \cup C^1[a,b]\right)\left(\bigcup_{j=1}^{l+1} C^2[\delta_j]\right)\right\}. \tag{3}$$

Розв'язком крайової задачі (1)–(2) будемо вважати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівняння (1) (за можливим винятком точок $x_i,\ i = \overline{1,l}$) та крайові умови (2). В подальшому будемо припускати, що існує розв'язок задачі (1)–(2), який належить V.

Обчислювальна схема. Задамо на $\left[a,b\right]$ сітку $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ так, щоб $E \subset \Delta$. Будемо шукати наближений розв'язок задачі (1)–(2) у вигляді інтерполяційного кубічного сплайну $S\left(y,x\right)$ дефекту 2 на сітці Δ, що належить простору функцій V.

Введемо позначення $h_j = x_j - x_{j-1},\ j = 1,\ldots,n,$

$$M_j^{+} = S''\left(y, x_j + 0\right),\ j = 0,\ldots,n-1,\ M_j^{-} = S''\left(y, x_j - 0\right),\ j = 1,\ldots,n.$$

Для сплайна $S\left(y,x\right)$ нескладно одержати зображення:

$$S\left(y,x\right) = M_j^{-}\frac{\left(x - x_{j-1}\right)^3}{6h_j} + M_{j-1}^{+}\frac{\left(x_j - x\right)^3}{6h_j} + \left(\frac{y_{j-1}}{h_j} - M_{j-1}^{+}\frac{h_j}{6}\right)\left(x_j - x\right) + \left(\frac{y_j}{h_j} - M_j^{-}\frac{h_j}{6}\right)\left(x - x_{j-1}\right),\ x \in \left[x_{j-1}, x_j\right],\ j = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Враховуючи неперервність похідної сплайна $S\left(y,x\right)$ у внутрішніх вузлах сітки Δ та крайові умови (2), одержуємо систему лінійних рівнянь, яку задовольняють величини M_j^{+} і M_j^{-}:

$$h_{j+1}y_{j-1} - \left(h_j + h_{j+1}\right)y_j + h_j y_{j+1} = \frac{h_j - h_{j+1}}{6}(h_j M_{j-1}^{+} + 2h_j M_j^{-} + 2h_{j+1}M_j^{+} + h_{j+1}M_j^{-}),\ j = 1,\ldots,n-1,\ y_0 = \varphi\left(a\right),\ y_n = \gamma. \tag{5}$$

Із означення множини функцій V дістаємо, що $M_j^{+} = M_j^{-}$ для $x_j \notin E$.

Наведемо властивості матриці A, що визначається коефіцієнтами в лівій частині системи (5).

Лема. Справджуються співвідношення

$$\det\left(A\right) = \left(-1\right)^{n-1} h_2 h_3 \ldots h_{n-1}\left(b-a\right), \tag{6}$$

$$\left\|A^{-1}\right\| = \max_i \sum_{j=1}^{n-1}\left|a_{ij}^{-1}\right| \le \frac{K^2}{8h^3}\left(b-a\right)^2, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left|a_{ij}^{-1}\right| \le \frac{K^2\left(b-a\right)}{2h^2},\ i = \overline{1,n-1},\ \max_{1\le i\le n-2}\sum_{j=1}^{n-1}\left|a_{i+1,j}^{-1} - a_{ij}^{-1}\right| \le \frac{K^2\left(b-a\right)}{2h^2}, \tag{8}$$

де a_{ij}^{-1} — елементи матриці A^{-1}, $K = \dfrac{H}{h}$, $h = \min\limits_j h_j$, $H = \max\limits_j h_j$.

Розглянемо тепер ітераційну схему знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)–(2) у вигляді кубічних сплайнів дефекту два (4).

1. Вибираємо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)},x\right)$ довільним чином, щоб задовольнялись крайові умови (2) (наприклад, $S\left(y^{(0)},x\right)=$ $=\dfrac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a)+\varphi(a)$).
2. Використовуючи вихідне рівняння (1) та сплайн $S\left(y^{(0)},x\right)$, знаходимо множини для $k=0,1,\ldots$

$$M_j^{+(k+1)}=p_1\left(x_j\right)S'\left(y^{(k)},x_j+0\right)+q_1\left(x_j\right)S\left(y^{(k)},x_j+0\right)+$$
$$+t_j\left(p_2\left(x_j\right)S'\left(y^{(k)},x_j+0-\tau\left(x_j\right)\right)+q_2\left(x_j\right)S\left(y^{(k)},x_j+0-\tau\left(x_j\right)\right)\right)+f\left(x_j\right)+$$
$$+\left(1-t_j\right)\left(p_2\left(x_j\right)\varphi'\left(x_j-\tau\left(x_j\right)\right)+q_2\left(x_j\right)\varphi\left(x_j-\tau\left(x_j\right)\right)\right),\ j=\overline{0,n-1},$$
$$M_j^{-(k+1)}=p_1\left(x_j\right)S'\left(y^{(k)},x_j-0\right)+q_1\left(x_j\right)S\left(y^{(k)},x_j-0\right)+$$
$$+t_j\left(p_2\left(x_j\right)S'\left(y^{(k)},x_j-0-\tau\left(x_j\right)\right)+q_2\left(x_j\right)S\left(y^{(k)},x_j-0-\tau\left(x_j\right)\right)\right)+$$
$$+f\left(x_j\right)+\left(1-t_j\right)\left(p_2\left(x_j\right)\varphi'\left(x_j-\tau\left(x_j\right)\right)+q_2\left(x_j\right)\varphi\left(x_j-\tau\left(x_j\right)\right)\right),\ j=\overline{1,n},$$

де $t_j=\begin{cases}0,\ x_j-\tau\left(x_j\right)<a,\\ 1,\ x_j-\tau\left(x_j\right)\geq a.\end{cases}$

3. Розв'язуючи систему рівнянь (5), знаходимо $y_j^{(k+1)},\ j=\overline{0,n}$.
4. За множинами $\left\{y_j^{(k+1)}\right\}$, $\left\{M_j^{+}\right\}$, $\left\{M_j^{-}\right\}$ будуємо сплайн $S\left(y^{(k+1)},x\right)$, який виступає в якості наступного наближення.
5. Продовжуючи ітераційний процес, одержуємо послідовність сплайнів $S\left(y^{(k)},x\right),k=0,1,\ldots$. Якщо ця послідовність збігається до розв'язку задачі (1)–(2), то при достатньо великому k сплайн $S\left(y^{(k)},x\right)$ буде апроксимацією шуканого розв'язку.

Збіжність ітераційного процесу. Введемо позначення

$$L_1=\max_{x\in[a,b]}\left(\left|q_1(x)\right|+\left|q_2(x)\right|\right),\ L_2=\max_{x\in[a,b]}\left(\left|p_1(x)\right|+\left|p_2(x)\right|\right),$$

$$u = \frac{H^2}{8} + \frac{K^5}{8}\left(b-a\right)^2,\ v = \frac{2H}{3} + \frac{K^5\left(b-a\right)}{2},\ \mu = 5\left(1 + L_2H + \frac{1}{2}L_1H\right).$$

Теорема. Нехай розв'язок крайової задачі (1)–(2) існує і належить простору V. Тоді при виконанні нерівності

$$\theta = uL_1 + vL_2 < 1 \tag{9}$$

існує $H^* > 0$, що для всіх $H < H^*$ послідовність $S\left(y^{(k)}, x\right),\ k = 0,1,\ldots$ рівномірно збігається на $\left[a,b\right]$ і справджуються співвідношення

$$\left\|\lim_{k\to\infty} S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right) - y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le R_p\omega\left(y''\left(x\right), H\right),\ p = 0,1,$$

де $y\left(x\right)$ — розв'язок задачі (1)–(2), $R_0 = \frac{\mu u}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}$, $R_1 = \frac{\mu v}{1-\theta} + 5H$,

$$\omega\left(y''\left(x\right), H\right) = \max_{1\le r\le l} \omega_r\left(y''\left(x\right), H\right),$$

$\omega_r\left(y''\left(x\right), H\right)$ — модуль неперервності $y''\left(x\right)$ на δ_r.

Доведення. Згідно (6), побудова послідовності $S\left(y^{(k)}, x\right)$ можлива. Запишемо ітераційний алгоритм у матричній формі:

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}\left(x\right) = \frac{A^{-1}B}{6}(P_1\left(x\right)S'\left(y^{(k)}, x\right) + Q_1\left(x\right)S\left(y^{(k)}, x\right) + \\ + P_2\left(x\right)S'\left(y^{(k)}, x-\tau\left(x\right)\right) + Q_2\left(x\right)S\left(y^{(k)}, x-\tau\left(x\right)\right) + F\left(x\right)) + A^{-1}d, \end{aligned} \tag{10}$$

де P_1, Q_1, P_2, Q_2 — діагональні матриці з елементами $p_1\left(x\right), q_1\left(x\right)$, $p_2\left(x\right), q_2\left(x\right)$ на діагоналі, F — вектор-стовпчик, d — сталий вектор, що залежить тільки від крайових умов (2).

Нехай $x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$, тоді, згідно (10), маємо

$$\begin{aligned} \left\|y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}\right\| \le \frac{1}{6}\left\|A^{-1}\right\|\left\|B\right\|\left(L_1\left\|S\left(y^{(k)}, x\right) - S\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\| + \right. \\ \left. + L_2\left\|S'\left(y^{(k)}, x\right) - S'\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\|\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Із рівності (4), враховуючи (11) та лему, дістаємо

$$\begin{aligned} \left\|S\left(y^{(k+1)}, x\right) - S\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \le u\left(L_1\left\|S\left(y^{(k)}, x\right) - S\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\| + \right. \\ \left. + L_2\left\|S'\left(y^{(k)}, x\right) - S'\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\|\right), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right)-S'\left(y^{(k)},x\right)\right\|\le v\left(L_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\right.$$
$$\left.+L_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right). \tag{13}$$

Введемо позначення

$$\alpha=L_1\left\|S\left(y^{(1)},x\right)-S\left(y^{(0)},x\right)\right\|+L_2\left\|S'\left(y^{(1)},x\right)-S'\left(y^{(0)},x\right)\right\|.$$

Ітеруючи нерівності (12) та (13), одержуємо

$$\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right)-S\left(y^{(k)},x\right)\right\|\le$$
$$\le u\theta^{k-1}\alpha,\ \left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right)-S'\left(y^{(k)},x\right)\right\|\le v\theta^{k-1}\alpha. \tag{14}$$

Співвідношення (14) при виконанні нерівності (9) забезпечують збіжність послідовностей $\left\{S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots,$ $p=0,1$. Позначимо

$$\lim_{k\to\infty}S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)=S^{(p)}\left(\overline{y},x\right),\ p=0,1.$$

Якщо $S(y,x)$ — кубічний сплайн дефекту 2, що інтерполює на сітці Δ розв'язок $y(x)$ крайової задачі (1)–(2), тоді

$$\left\|S^{(p)}\left(\overline{y},x\right)-y^{(p)}(x)\right\|\le\left\|S^{(p)}\left(\overline{y},x\right)-S^{(p)}(y,x)\right\|+$$
$$+\left\|S^{(p)}(y,x)-y^{(p)}(x)\right\|,\ p=0,1. \tag{15}$$

Для другого доданку в правій частині (15) справедлива оцінка [8]

$$\left\|S^{(p)}(y,x)-y^{(p)}(x)\right\|\le K_pH^{2-p}\omega\left(y'(x),H\right),\ p=0,1,2,\ K_0=\frac{5}{2},$$
$$K_1=K_2=5. \tag{16}$$

Для оцінки перших доданків у (15) знайдемо допоміжні нерівності

$$|\,M_j^+-p_1\left(x_j\right)S'\left(y,x_j+0\right)-q_1\left(x_j\right)S\left(y,x_j+0\right)-$$
$$-p_2\left(x_j\right)S'\left(y,x_j+0-\tau\left(x_j\right)\right)-q_2\left(x_j\right)S\left(y,x_j+0-\tau\left(x_j\right)\right)-f\left(x_j\right)|\le$$
$$\le\left|S''\left(y,x_j+0\right)-y''\left(x_j+0\right)\right|+\left|p_1\left(x_j\right)\left(S'\left(y,x_j+0\right)-y'\left(x_j+0\right)\right)\right|+$$
$$+\left|q_1\left(x_j\right)\left(S\left(y,x_j+0\right)-y\left(x_j+0\right)\right)\right|+ \tag{17}$$
$$+\left|p_2\left(x_j\right)\left(S'\left(y,x_j+0-\tau\left(x_j\right)\right)-y'\left(x_j+0\right)\right)\right|+$$

$$+\left|q_2\left(x_j\right)\left(S\left(y,x_j+0-\tau\left(x_j\right)\right)-y\left(x_j+0\right)\right)\right|\le$$

$$\le\left(5+\frac{5}{2}L_1H^2+5L_2H\right)\omega\left(y'',H\right)=\mu\omega\left(y'',H\right),\ j=\overline{0,n-1}.$$

Аналогічно одержуємо

$$|M_j^- - p_1\left(x_j\right)S'\left(y,x_j-0\right)-q_1\left(x_j\right)S\left(y,x_j-0\right)-$$
$$-p_2\left(x_j\right)S'\left(y,x_j-0-\tau\left(x_j\right)\right)-q_2\left(x_j\right)S\left(y,x_j-0-\tau\left(x_j\right)\right)-f\left(x_j\right)|\le \quad (18)$$
$$\le\mu\omega\left(y'',H\right),\ j=\overline{1,n}.$$

Позначимо $\max\limits_{a\le x\le b}\left|S^{(p)}\left(\overline{y},x\right)-S^{(p)}\left(y,x\right)\right|=\beta_p,\ p=0,1.$

Враховуючи, що для сплайна $S\left(\overline{y},x\right)$ має місце зображення вигляду (4), M_j^+,M_j^- задовольняють співвідношення (5) та нерівності (17)–(18), нескладно дістати систему нерівностей

$$\begin{cases}\beta_0\le u\left(L_1\beta_0+L_2\beta_1+\mu\omega\left(y'',H\right)\right),\\ \beta_1\le v\left(L_1\beta_0+L_2\beta_1+\mu\omega\left(y'',H\right)\right).\end{cases} \quad (19)$$

Розв'язуючи систему нерівностей (19), маємо

$$\beta_0\le\frac{u\mu\omega\left(y'',H\right)}{1-\left(L_1u+L_2v\right)},\ \beta_1\le\frac{v\mu\omega\left(y'',H\right)}{1-\left(L_1u+L_2v\right)}. \quad (20)$$

Нерівності (20) разом із оцінками (9) та (16) забезпечують потрібні співвідношення

$$\left\|S\left(\overline{y},x\right)-y\left(x\right)\right\|\le\left(\frac{u\mu}{1-\theta}+\frac{5}{2}H^2\right)\omega\left(y'',H\right),$$

$$\left\|S'\left(\overline{y},x\right)-y'\left(x\right)\right\|\le\left(\frac{v\mu}{1-\theta}+5H\right)\omega\left(y'',H\right).$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$y''-4y'\left(x\right)+4y\left(x\right)+xy\left(x-\frac{x}{2}\right)-x^2+8=0,\ x\in\left[1;2\right],$$

$$y\left(x\right)=2x,x\in\left[0,5;1\right],\ y\left(2\right)=5e^2-2.$$

Точний розв'язок крайової задачі, знайдений методом кроків

$$y=e^{2x-2}\left(3+x\right)-2.$$

Наближений розв'язок крайової задачі згідно дослідженої в роботі ітераційної схеми знайдено за допомогою прикладної програми, розробленої в середовищі MS Visual Studio 2010.

Результати обчислень наведено в таблиці 1, де y — точний розв'язок, z — наближений розв'язок, знайдений при $h = 0.025$ на 9-й ітерації, Δ — похибка. Порівнюючи точний і наближений розв'язки, одержуємо, що відносна похибка не перевищує 0.1%, а абсолютна — 0.01.

Таблиця 1

x	y	z	Δ
1.0	2.0	2.0	0.0
1.2	4.2693	4.2657	0.0036
1.4	7.8	7.7924	0.0076
1.6	13.2827	13.273	0.0097
1.8	21.7811	21.7746	0.0065
2.0	34.9453	34.9453	0.0

Висновки. Апарат сплайн-функцій дозволяє побудувати ефективні обчислювальні алгоритми розв'язання крайових задач із запізненням. Одержані достатні умови збіжності ітераційної схеми є коефіцієнтними, простими для перевірки. Числові експерименти підтверджують одержані теоретичні результати.

Список використаних джерел:

1. Grim L. J. Boundary value problems for delay differential equations / L. J. Grim, K. Schmitt // Bull. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 74, № 5. — P. 997–1000.
2. Каменский Г. А. Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа / Г. А. Каменский, А.Д. Мышкис // Дифференц. уравн. — 1972. — Т. 8, № 12. — С. 2171–2179.
3. Biga A. Existence, uniqueness and approximation for the solution of a second order neutral differential equation with delay in Banach spaces / A. Biga, R. Gaber // Mathematica. — 2007. — Vol. 49, № 2. — P. 117–130.
4. Лучка А. Ю. О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / А. Ю. Лучка // Дифференциально-функциональные и разностные уравнения. — К. : Ін-т математики АН УРСР, 1981. — С. 35–56.
5. Nikolova T. S. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations / T. S. Nikolova, D. D. Bainov // Yokohama Math. J. — 1981. — Vol. 29, № 1. — P. 108–122.
6. Настасьєва Н. П. Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач / Н. П. Настасьєва, І. М. Черевко // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 1999. — Вип. 1. — С. 69–73.
7. Cherevko I. Solving boundary value problems for neutral delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // Actual

problems of training specialists in ICT. Conferenrence Proceedigs. — Sumy : Sumy State University, 2013. — Part 2. — P. 226–234.
8. Завялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завялов, В. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

The boundary value problem for differential equation with delay is researched. Iterative scheme of finding the solution using interpolating cubic spline with defect two is constructed and explained. Numerical experiments are conducted for test boundary value problems.

Key words: *differential equations, delay, boundary value problem, approximation, spline-functions.*

Отримано: 18.02.2014

УДК 517.956.4

Т. О. Заболотько, аспірант,
С. Д. Івасишен, д-р фіз.-мат. наук, професор

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПОВНЕ АНАЛІТИЧНЕ ОПИСАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається параболічне за Петровським рівняння довільного порядку у випадку, коли рівняння містить члени з похідними першого порядку за просторовими змінними і коефіцієнтами, які лінійно зростають на нескінченності як функції цих змінних, а інші коефіцієнти не залежать від просторових змінних. Для такого рівняння дається повне аналітичне описання фундаментального розв'язку задачі Коші.

Ключові слова: *параболічне рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, фундаментальний розв'язок, задача Коші, повне аналітичне описання.*

Вступ. При математичному моделюванні деяких реальних процесів виникають параболічні рівняння з різними особливостями і виродженнями, зокрема рівняння зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. Так, наприклад, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера-Планка-Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі [1, с.177–179].

Важливим поняттям для таких рівнянь і, взагалі, для всіх параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), точна

